幾何概論 I のレポート課題（4 月 14 日）の解答例とコメント

レポート課題

課題 1 $[0,1]$ 区間上の連続関数全体の集合 V について

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)|$$

のそれぞれについて三角不等式が成り立つことを示せ．すなわち次が成り立つことを示せ．

$$\|f+g\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|g\|_1, \qquad \|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

【解答例】

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leqq \int_0^1 |f(x)|+|g(x)|dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$$\|f+g\|_\infty = \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)+g(x)| \leqq \max_{0 \leqq x \leqq 1}(|f(x)|+|g(x)|) \leqq \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)| + \max_{0 \leqq x \leqq 1} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

課題 2 上のノルムについて $\|f\|_1 \leqq \|f\|_2 \leqq \|f\|_\infty$ を示せ．

【解答例】 $g = |f|$ と $h = 1$ についてコーシー・シュワルツの不等式 $|(g,h)| \leqq \|g\|_2 \|h\|_2$ を適用する．

$$(g,h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx = \|f\|_1$$

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx} = \|f\|_2 \qquad \|h\|_2 = \sqrt{\int_0^1 1dx} = 1$$

より $\|f\|_1 \leqq \|f\|_2$ を得る．

$\|f\|_\infty = \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)| = M$ とおく．$|f(x)| \leqq M$ なので

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \leqq \sqrt{\int_0^1 M^2 dx} = M = \|f\|_\infty$$

【コメント】 コーシー・シュワルツの不等式をどう使うのかあいまいな解答が目立つ．ここに掲げた解答例と自分の解答を比較してほしい．

課題 3 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定義された次の関数が $\mathbb{R}$ の距離になるか否か考察せよ．

$$(1)\ d(x,y) = |x^3 - y^3| \qquad (2)\ d(x,y) = |x^4 - y^4|$$

【解答例】(1)(2) とも $d(x,y) = d(y,x)$ と $d(x,y) \geqq 0$ は自明だ．三角不等式も

$$|x^k - y^k| + |y^k - z^k| \geqq |x^k - z^k|$$

より成り立つ．問題は $d(x,y) = 0$ が $x = y$ の場合に限るかということである．

(1) では $d(x,y) = |x^3 - y^3| = 0$ から $x = y$ が出るので距離である．しかし (2) では $d(x,y) = |x^4 - y^4| = 0$ からは $x = \pm y$ しか出てこない．実際 $d(1,-1) = 0$ となるので距離ではない．

【コメント】$\mathbb{R}$ の距離だから x, y は実数である．複素数で考えている人がいたが注意せよ．