

## 幾何概論 I および同演習の講義メモ (4月21日)

### 本日の講義の要点

#### 1. 同値な距離が同じ点列の収束概念を定めること (定理 2.9)

テキストは重複があるので講義では命題 2.12 から証明した。証明は単なるはさみうちなので易しいがテキストに記述していないので書いておく。

【命題 2.12 の証明】  $\{a_n\}$  を  $d_2$  収束する点列とし、その極限を  $b$  とする。  $n \rightarrow \infty$  のとき  $d_2(a_n, b) \rightarrow 0$  である。一方仮定から

$$0 \leq d_1(a_n, b) \leq \frac{1}{K} d_2(a_n, b) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので  $d_1(a_n, b) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成り立つ。ゆえに  $\{a_n\}$  は  $b$  に  $d_1$  収束する。

【定理 2.9 の証明】  $Kd_1 \leq d_2$  より  $d_2$  収束する点列は同じ極限に  $d_1$  収束する。また  $(1/H)d_2 \leq d_1$  より  $d_1$  収束する点列は同じ極限に  $d_2$  収束する。ゆえに収束概念は同じである。

命題 2.3 より例 2.2 の 3 つの距離はどれも互いに同値なので、収束概念は共通である。  $\mathbb{R}^n$  での収束概念は以前の講義で学習したもののみ考えていけばよい。

#### 2. 関数の集合における様々な収束概念 (例 2.12, 命題 2.13)

関数の集合における距離 (例 2.4) はどれも互いに同値ではない。これは例 2.12 によって具体的な関数列を考察することによって議論した。この例での距離の計算は簡単な積分計算なので省略する。また、例 2.14 の  $\{f_n\}$  を使って同様の考察をしたがこれも省略する。さて、例 2.4 の距離に関する関数列の収束と、各点収束と一様収束の関係をまとめておく。関数列  $\{f_n(x)\}$  について

- 関数列  $\{f_n\}$  が関数  $g(x)$  に各点収束するとは各  $x$  について数列  $\{f_n(x)\}$  が  $g(x)$  に収束することを言う。数列の極限に帰着して考えるため分かりやすいが、何かの距離に関する収束ではないため扱いづらい。
- 一様収束は  $d_\infty$  収束と同値である (命題 2.13) ここに証明を記述しておく。  
関数列  $\{f_n\}$  が  $g$  に一様収束するとは  $\forall \varepsilon > 0$  に対して

$$n \geq N \implies |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数  $N$  を  $x$  によらずに取れることをいう (各  $x$  に対して  $N$  が取れることは各点収束に他ならない)。さて結論の不等式はすべての  $x$  について成り立っているので

$$d_\infty(f_n, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} \{|f_n(x) - g(x)|\} < \varepsilon$$

が成り立つ。ゆえに  $\{f_n\}$  は  $g$  に  $d_\infty$  収束する。逆は同じように議論をすればよいので省略する。ノルム  $\|f\|_\infty$  を一様ノルムという。一様ノルムによる収束が一様収束である。

- $d_\infty$  収束する関数列は一様収束するので各点収束している。しかし  $d_1$  収束、 $d_2$  収束では各点収束するとは言えない。これについては例 2.14 を見ればよい。しかし殆どいたるところでは各点収束することが分かっている (「殆どいたるところ」に数学的定義を与えるのはこの講義では扱わない)。点ごとに極限を求めることは関数列の極限を知るための手掛かりになる。

#### 3. 直積空間での点列の収束

テキストに記述していないので命題として述べておく。

**命題** 直積距離空間  $X \times Y$  の点列  $\{(a_n, b_n)\}$  が  $(\alpha, \beta)$  に収束することと、それぞれの成分の作る点列  $\{a_n\}$   $\{b_n\}$  がともに収束することは同値である。

証明  $X$  の場合を書くが  $Y$  の場合も同様である。まず次の不等式は簡単である。

$$0 \leq d_X(a_n, \alpha) \leq d_{X \times Y}((a_n, b_n), (\alpha, \beta)) = \sqrt{d_X(a_n, \alpha)^2 + d_Y(b_n, \beta)^2} \leq d_X(a_n, \alpha) + d_Y(b_n, \beta)$$

$\{(a_n, b_n)\}$  が  $(\alpha, \beta)$  に収束すれば、左の不等式から  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束する。 $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  が  $\alpha$  と  $\beta$  に収束すれば右の不等式から  $\{(a_n, b_n)\}$  は  $(\alpha, \beta)$  に収束する。

#### 4. 集積点

写像の極限を定義する前にまず、距離空間  $X$  の部分集合  $A \subset X$  について集積点を定義した。

定義  $a$  が  $A$  の集積点であるとは  $\forall \varepsilon > 0$  について  $0 < d(x, a) < \varepsilon$  となる  $x$  が存在することを言う。

この定義から  $0 < d(x, a) < \varepsilon$  を満たす  $x$  は無限個あることが分かる。何故ならそのような  $x$  が有限個  $(x_j, 1 \leq j \leq N)$  だったとすると  $d(x_j, a)$  たちの最小値が取れる。最小値の半分を  $\varepsilon > 0$  とおけば  $0 < d(x, a) < \varepsilon$  を満たす  $x$  は存在しない。これは集積点の定義に矛盾する。よって  $a$  から  $\varepsilon$  の距離に  $A$  の点が無数に存在することになり、集積点という言葉も納得できる。

#### 5. 写像の極限

テキストとは設定を変えて  $A \subset X$  について写像  $f: A \rightarrow Y$  の極限を考察した。その際  $x \rightarrow a$  での  $f(x)$  の極限を定めるには  $a$  は  $A$  の集積点でなくてはならない。なおこれさえ押さえておけば、極限の定義は関数の場合と変わらない。命題の証明は論理だけで行うのでなじみのある実関数の場合もこの講義での距離空間の間の写像の場合も全く変わらない。

#### 6. 写像の連続性

定義はテキストの 9 ページに記述してある。良く極限を使って  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  を  $a$  での連続性の定義にするが、極限を考える際の  $a$  は集積点でないといけなくて若干注意が必要である。 $a$  が孤立点 ( $A$  の点であるが  $A$  の集積点ではない点) の場合は極限は定義できないが、連続の定義は満たしている。写像は孤立点では連続である。例えば例 2.1 ではすべての点が孤立点なのでどんな写像も連続になる。

#### 7. 合成写像の連続性 (定理 2.16)

写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  について  $y = f(x)$  が  $x = a$  で  $z = g(y)$  が  $y = b = f(a)$  で連続なら合成写像  $g \circ f$  は  $x = a$  で連続である。この証明は基本的なのでじっくり考えておくと良い。

証明 任意に正数  $\varepsilon > 0$  をとる。 $z = g(y)$  の連続性から  $\delta_1 > 0$  を

$$d_Y(y, b) < \delta_1 \implies d_Z(g(y), g(b)) < \varepsilon$$

が成り立つようにとる。この  $\delta_1$  に対して  $y = f(x)$  の連続性から  $\delta > 0$  を

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1$$

が成り立つようにとる。このとき  $y = f(x)$ ,  $b = f(a)$  とおけば  $d_Y(y, b) < \delta_1$  なので

$$d_Z(g \circ f(x), g \circ f(a)) = d_Z(g(y), g(b)) < \varepsilon$$

が成り立つ。これは  $g \circ f$  の  $a$  における連続性を述べている。

ただし単なる極限については上のような事実は (一般には) 成り立たない。講義の時間の最後にこのことを述べようとして失敗した。ここで補足しておく。例の考察なので通常の場合として考えて差し支えない。

考察 単に  $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$  のときは  $y = f(x)$ ,  $b = f(a)$  が  $x = a$  で連続であっても  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$  とは言えない。何故なら  $x \rightarrow a$  の極限なので  $x \neq a$  は前提だが、 $f(x) \neq b$  とは限らない。 $f(x) = b$

となる  $x$  については  $g \circ f(x) = g(b)$  だが極限の仮定だけでは  $g(b) \neq c$  の場合もある.  $f(x) = b$  となる  $x$  が  $a$  の周りに無数にあれば,  $g \circ f(x) = g(b) \neq c$  となる  $x$  が無数にあることになる. ゆえに極限は  $c$  にならない.

#### 8. 連続でないことの定義と命題 2.16

演習の時間に解説した内容である. 講義のみの受講者には申し訳ない. まず写像が  $x = a$  で連続でないことの定義を記述した. この作り方は第 1 回の授業で扱った.

$$\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x; (d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon)))$$

さて,  $\delta$  は任意なので  $\delta = 1/n$  とおき, それに対して上の主張から定まる  $x$  を  $x_n$  とおく.  $d_X(x_n, a) < 1/n$  および  $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$  が成り立つ. これから  $x$  を  $a$  に近づけても  $f(x)$  は  $f(a)$  に近づいていくとは言えないことが分かるだろう.

次に命題 2.16 であるが連続なら  $\{f(x_n)\}$  が  $f(a)$  に収束することは合成写像の連続性の証明とほぼ同じなので自分で証明できるようになってほしい. 念のため書き下しておく.

任意の  $\varepsilon > 0$  について  $f(x)$  の  $x = a$  での連続性から  $\delta > 0$  を

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

が成り立つようにとる. この  $\delta > 0$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  の定義から  $N$  を

$$n \geq N \implies d_X(x_n, a) < \delta$$

が成り立つようにとる. すると  $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$  であり  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  が成り立つ. 逆の証明はレポート課題にした.

#### 本日のレポート課題

課題 1 例 2.14 の関数列  $\{g_n\}$  が  $d_1$  については収束するが  $d_2$  については発散することを示せ.

課題 2 区間  $[0, 1]$  上の関数列  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  の例 2.4 のそれぞれの距離に関する極限を調べよ.

課題 3 写像  $f: X \rightarrow Y$  について, 任意の  $a$  に収束する  $X$  の点列  $\{x_n\}$  に対して  $\{f(x_n)\}$  が  $f(a)$  に収束すれば  $f$  は  $x = a$  で連続であることを示せ.

課題 2 は余分だったかもしれない. 課題 3 については背理法を使うこと. 連続でないことを仮定するので講義での議論を思い出せばよい.

#### 来週の講義について

少し時間をかけすぎた. 次回は一様連続の概念を紹介した後位相の話に入る. 開集合, 閉集合という言葉聞いたことがあるだろうか. あるならそれを復習しておいてほしい. 距離空間の位相はその距離空間での一般化である. なお, リプシッツ連続の話は演習の時間に行おう. 講義のみの履修者には申し訳ないが, 分かりやすい課題なので講義メモを参考に自習しておいてほしい.