

幾何概論Ⅰのレポート課題（4月21日）の解答例とコメント

レポート課題

課題1 例2.12の $\{g_n\}$ の収束性を例2.4の各距離に関して調べる

$$d_1(g_n, 0) = \|g_n\|_1 = \int_0^1 |g_n(x)| dx = \int_0^1 \sqrt{n} x^n dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\{g_n\}$ は d_1 に関して0に収束する。ここで $\{g_n\}$ が d_2 に関し $h(x)$ に収束したとすると、 d_1 についても $h(x)$ に収束するので極限の一意性から $h(x) = 0$ でなくてはならない。ゆえに0との距離が0に収束するか否かを考えればよい。

$$d_2(g_n, 0) = \|g_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g_n(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 n x^{2n} dx} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

これは0に収束しないので $\{g_n\}$ は d_2 に関し発散する。ゆえに d_∞ に関しても発散する。

【コメント】

- 何故ノルムの極限をとるのかコメントしていない答案が多い。自分の解答と上の解答例を比較し、何が欠けているか考察すること。この問題では極限が存在すれば定数関数0なので、 g_n のノルムを計算すれば十分である。しかし、「極限が存在すれば定数関数0」ということが分からなければ、 g_n のノルムを計算しても $\{g_n\}$ の収束性は分からない。
- 解答例では $\|g_n\|_\infty$ は計算せず、 d_2 について発散するから d_∞ についても発散するという議論を行った。命題2.12を利用したわけである。もちろん $\|g_n\|_\infty$ を実際に計算しても良い。 g_n の最大値は $x=1$ でとるので $\|g_n\|_\infty = \sqrt{n}$ であり、0に収束しない。

課題2 区間 $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(x) = nx(1-x)^n\}$ の極限を調べる

$$d_1(f_n, 0) = \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\{f_n\}$ は d_1 に関し定数関数0に収束する。ゆえに d_2, d_∞ に関し収束すればその極限はやはり定数関数0なので0との距離、すなわち f_n のノルムを計算する。

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 n^2 x^2 (1-x)^{2n} dx} = \frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\|f_n\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} \{nx(1-x)^n\} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1} = \frac{n}{1+n} \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\{f_n\}$ は d_2 に関して0に収束するが d_∞ については定数関数0に収束しない。よって発散する。

【コメント】

- 前の問題より積分計算はだいぶ大変になるが、 $1-x=u$ とおいて置換積分すればいいのでこの程度の問題は正しく答えてほしい。
- $\|f_n\|_\infty$ の極限を1とするものが多かった。この極限は 1^∞ 型の不定形であり、中身が1に収束するからと言って全体が1に収束するとは言えない。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = e$ は基本公式なのでこれを使うことぐらい思いついてほしい。

課題3 命題 2.16 の逆の証明

$f(x)$ が $x = a$ で不連続として矛盾を導く．不連続であることの定義から

$$\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x; (d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon))$$

が成り立つ．ゆえにそのような $\varepsilon > 0$ を一つ取り ε_0 とおく．

$$\forall \delta > 0; (\exists x; (d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0)$$

が成り立っている． δ は任意なので特に $\delta = 1/n$ とし、それに対して上の条件を満たす x を一つ取って x_n とおく． x_n は

$$d_X(x_n, a) < 1/n \text{ かつ } d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0$$

を満たしている．最初の条件から $\{x_n\}$ は距離空間 (X, d_X) において a に収束する．一方次の条件から $\{f(x_n)\}$ は距離空間 (Y, d_Y) において $f(a)$ に収束しない．これは仮定に矛盾する．

【コメント】

- 背理法による証明だが背理法とは対偶を示すことと同じである． $P \implies Q$ を示す時に Q が成り立たないとする P に矛盾するというのが背理法だが、これは $\neg Q \implies \neg P$ を示したことに他ならない．意識しておくといい．
- 「すべての a に収束する点列 $\{x_n\}$ について $\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束する」と矛盾する事実は「 a に収束する点列 $\{x_n\}$ で $\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束しないものがある」ということだ．そのような条件を満たす点列の存在が示すべきことであり、それをどのように作るのかが課題といえる．こう考えると講義（前回の講義メモの8）でほぼ解説済みであることに気付くはずだ．考えておくこと．