幾何概論 I および同演習の講義メモ (4 月 28 日)

本日の講義の要点

このメモを作成していて，講義内容の一部を演習の時間に補ったこともあり，量が多くなってしまったことを感じた．消化不良に陥った人も少ないかと思うが，一つ一つの言葉の意味を確実に理解していけば決して難しい話ではない．GW 中にじっくり考えてほしい．

1. 一様連続

   距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が X 上連続であるとは X の各点 x で f が連続になるということだ．すなわち $\forall\varepsilon > 0$ に対して
   $$d_X(x', x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$$
   となる $\delta > 0$ が存在することだ．この δ は x ごとに取れればいい．一方，X 上一様連続であること（定義 2.7）では δ は x によらずにとる必要がある．当然，一様連続のほうがきつい条件で，一様連続ならば連続になる（命題 2.8）．

   ただし連続であっても一様連続とは限らない．講義では次のような例を紹介した．

   $f : (0, 1] \longrightarrow [1, \infty)$ を $f(x) = 1/x$ で定義する．もちろんこの関数（写像）は $(0, 1]$ 上連続である．一方一様収束でないことの定義は
   $$\exists\varepsilon > 0;\ (\forall\delta > 0;\ (\exists x, x';\ (|x - x'| < \delta \text{かつ} |f(x) - f(x')| \geqq \varepsilon)))$$
   が成り立つことだ．例えば $\varepsilon = 1$ として $\forall\delta > 0$ に対し n を $1/\delta$ より大きく取って $x = 1/n,\ x' = 1/(n + 1)$ とおけば
   $$|x - x'| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta \quad \text{かつ} \quad |f(x) - f(x')| = |n - (n + 1)| = 1$$
   が成り立つ．すなわち一様連続ではない．

2. リプシッツ連続

   リプシッツ連続については演習の時間に解説した．簡単な事項なので講義のみの受講者も学習しておいてほしい．定義は定義 2.8 にまとめられている．$\varepsilon\delta$ を使わないので扱いやすい．リプシッツ連続なら一様連続であることは，$\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon/L$ とおくことにより次のように簡単に示せる．
   $$d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leqq Ld_X(x.x') < L\delta = \varepsilon$$
   しかし，一様連続であっても連続とは限らない．例としては $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1],\ f(x) = \sqrt{x}$ を考えればよい．平均値定理により
   $$|f(x) - f(0)| = |f'(c)||x - 0|$$
   となる c が $0 < c < x$ の範囲に存在するが $f'(c) = (2\sqrt{c})^{-1}$ なので x を 0 に近づけていけば $|f'(c)|$ はいくらでも大きくなる．ゆえに $|f(x) - f(0)| \leqq L|x - 0|$ となる定数 L は存在しない． リプシッツ連続なら一様連続，一様連続なら連続であるがそれぞれの逆は成り立たない．

3. リプシッツ連続による連続写像の例

   最も基本的な例は点 a からの距離関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = d(x, a)$ であろう．三角不等式の変形バージョン $d(a, b) \geqq |d(a, c) - d(b, c)|$ から
   $$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leqq d(x, y)$$

だがこれは $L = 1$ とした時のリプシッツ連続の条件に他ならない．

面白い例として V を $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合とし，距離を例 2.4 の d_1 でとれば

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

は

$$|\phi(f) - \phi(g)| = \left|\int_0^1 f(x) - g(x)dx\right| \leqq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = d_1(f, g)$$

より $L = 1$ としてリプシッツ連続の条件を満たす．特に関数列 $\{f_n\}$ が d_1 について g に収束すれば

$$\lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \phi(g), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

が成り立つ．これは極限と積分の交換と呼ばれ，通常一様収束（d_∞ 収束）の仮定で証明されるがそれよりはるかに弱い d_1 収束の仮定で成立している．

この話題に関するレポート課題として命題 2.22 の証明を課した．直積空間の距離の定義を確認すれば $L = 1$ としてリプシッツ連続の条件を満たすことが分かるだろう．

4. 内点，外点，境界点，内部，外部，境界

まず準備として $B_r(p)$ という記号を導入した．p を中心とする半径 r の開球体ということだが，感覚的にもつかみやすいだろう．さてこの記号を使って，内点と外点を定義した．A を平面内の領域の時に内点外点がどういうことを意味するのかきちんと考えておくように．さて，内点と外点の定義が両立しえないことは分かるだろう．さらに境界点の定義は内点でも外点でもないということなので，X の点は A の内点，境界点，外点のいずれか一つのみの条件を満たす．内点全体を内部（A°），外点全体を外部（A^e），境界点全体を境界（∂A）と定めたので $X = A^\circ \cup \partial A \cup A^e$ と互いに交わらない合併集合になる．

p が A の補集合 A^c の内点であることは $\exists r > 0; B_r(p) \subset A^c$ と記述されるが，$B_r(p) \subset A^c$ は $B_r(p) \cap A = \emptyset$ という意味なので A の外点に他ならない．これから $(A^c)^\circ = A^e$ を得る．また A を A^c に置き換えれば $(A^c)^e = A^\circ$ も得られる．これから $\partial A = \partial(A^c)$（命題 2.31） である．

A が平面内のある曲線に囲まれた領域なら，内部，外部，境界は直観的にも分かりやすい．ただし $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の時は $\partial A = \mathbb{R}$ である．なぜなら $x \in \mathbb{R}$ について $B_r(x) = (x - r, x + r)$ には有理数も無理数も含まれることから $x \in \partial A$ である．

5. 開集合，閉集合

$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = (A^e)^c$ を A の閉包と呼ぶ．$A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ である．$A = A^\circ$ を満たす集合を開集合，$A = \overline{A}$ を満たす集合を閉集合と呼ぶ（定義 2.10）.

開集合は要素の条件によって命題 2.33 で特徴づけられる．これを開集合の定義とする場合もあり，ここで証明を与えておこう．

> 命題 2.33 の証明：$A^\circ \subset A$ は常に成り立つので開集合であることは $A \subset A^\circ$ と同値である．これは $p \in A$ について $p \in A^\circ$ が成り立つことと同値なので，$\forall p \in A; \exists r > 0; B_r(p) \subset A$ に他ならない．

一方 A が閉集合であることは $\overline{A} = A$ が成り立つことだが これは $\overline{A} \subset A$ と同値である．すなわち $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in A$ が成り立つことだ．この対偶は $x \notin A \Longrightarrow x \notin \overline{A}$ であるが，$x \in A^c \Longrightarrow x \in (\overline{A})^c = A^e = (A^c)^\circ$ と書き直せる．これは A^c が開集合であることに他ならない（命題 2.34).

6. 開集合の基本性質（定理 2.35）

証明を与えておこう．まず，空集合と全体集合は開集合である．これは定義を満たすことによっても確認できるが，定義の一部と思っても差支えない．

次に開集合の合併が開集合になることだが，$x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$ は $\exists\lambda; x \in A_\lambda$ という意味なので λ_0 を $x \in A_{\lambda_0}$ となるようにとる．A_{λ_0} が開集合であることから $r > 0$ を $B_r(x) \subset A_{\lambda_0}$ となるようにとる．

$$x \in B_r(x) \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_\lambda A_\lambda$$

なので x は $\bigcup_\lambda A_\lambda$ の内点になる． ゆえに $\bigcup_\lambda A_\lambda$ は開集合である．

有限個の開集合の共通部分が開集合になることについては　$x \in \bigcap_{k=1}^N A_k$ はすべての k について $x \in A_k$ ということなので，A_k が開集合であることから $r_k > 0$ を $B_{r_k}(x) \subset A_k$ となるようにとれる．ここで $r > 0$ を $r_1, r_2, \ldots, r_N$ の最小値と置けば

$$\forall k;\ B_r(x) \subset B_{r_k}(x) \subset A_k \qquad \text{より} \qquad B_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^N A_k$$

を得る．ゆえに $\bigcap_{k=1}^N A_k$ は開集合である．

一般に無限個の開集合の共通部分は開集合になるとは限らない．例 2.37 にその例をあげている．1 はすべての自然数 k について $1 \in (0, 1 + 1/k)$ という条件を満たしており，共通部分の要素になっている．

7. 距離の同値性と開集合族（定理 2.36）

この定理の証明で少し混乱してしまった．申し訳ない．まず定理 2.36 の内容を次のように変更しておく．

定理　X の 2 つの距離 d_1, d_2 について $Kd_1 \leqq d_2$ を満たす正数 K が存在すれば $\mathcal{O}_{d_1}(X) \subset \mathcal{O}_{d_2}(X)$ が成り立つ．特に d_1 と d_2 が同値ならば $\mathcal{O}_{d_1}(X) = \mathcal{O}_{d_2}(X)$ である．

証明 $U \in \mathcal{O}_{d_1}(X)$ をとる．$p \in U$ について $B_r^{d_1}(p) \subset U$ となる $r > 0$ が存在する．$x \in B_{rK}^{d_2}(p)$ とすれば $Kd_1(p, x) \leqq d_2(p, x) < rK$ より $d_1(p, x) < r$ を得る．ゆえに $x \in B_r^{d_1}(p)$ であり

$$B_{rK}^{d_2}(p) \subset B_r^{d_1}(p) \subset U$$

が成り立つ．ゆえに $U \in \mathcal{O}_{d_2}(X)$ であり $\mathcal{O}_{d_1}(X) \subset \mathcal{O}_{d_2}(X)$ が成り立つ．同値の場合は両方の包含関係が成り立つので一致する．

8. 演習（命題 2.27 の証明）

$p \in \overline{A} \setminus A$ は A の集積点であることを考えてもらった．仮定は $p \in \overline{A}$ と $p \notin A$，結論すべきことは $\forall r > 0; ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset)$ だ．$p \in \overline{A}$ は $\forall r > 0; (B_r(p) \cap A \neq \emptyset)$ なので，これと $p \notin A$ を組み合わせれば集積点の条件が得られる．

後半は孤立点に関する事実だがこれはレポート課題にした．

9. 演習（集合演算子としての内部）

$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ が成り立つことを考えてもらった．ちょうど手頃な演習問題だ．まず集合の等式を示すには双方向の包含関係として認識し，要素をとって議論することが基本になる．これはきちんと理解してほしい．

$(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ を示す．$p \in (A \cap B)^\circ$ をとる．p は内点なので $r > 0$ を $B_r(p) \subset (A \cap B)$ となるようにとる．$B_r(p) \subset (A \cap B) \subset A$ より $p \in A^\circ$，同様に $B_r(p) \subset (A \cap B) \subset B$ より $p \in B^\circ$ が成り立つ．ゆえに $p \in A^\circ \cap B^\circ$ が成り立つ．

次に $(A \cap B)^\circ \supset A^\circ \cap B^\circ$ を示す．$p \in A^\circ \cap B\circ$ をとる．$p \in A^\circ$ より $r_1 > 0$ を $B_{r_1}(p) \subset A$ となるようにとれる．同様に $p \in B^\circ$ より $r_2 > 0$ を $B_{r_2}(p) \subset B$ となるようにとれる．ここで $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ とおけば $B_r(p) \subset A \cap B$ が成り立つ．よって $p \in (A \cap B)^\circ$ を得る．

もう一つ，$(A^\circ)^\circ = A^\circ$ を取り上げた．これは A の内点が A° の内点であることを示せばよい．これについてはレポート課題にした．

10. 補足（ド・モルガンの法則の利用）

閉集合は開集合の補集合なので定理 2.35 とド・モルガンの法則を組み合わせれば次が簡単に示せる．

- 空集合 $\emptyset$ と全体集合 X は閉集合である．
- 閉集合の共通部分（非可算無限個でも可）は閉集合である．
- 有限個の閉集合の合併は閉集合である．

無限個の閉集合の合併は閉集合になるとは限らない．例として $\bigcup_{n=2}^{\infty}[0, 1-1/n] = [0, 1)$ をあげた．合併の定義からこの集合に 1 は含まれない．

もう一つ，閉包が補集合の内部の補集合であること（この講義メモの 5 を参照）を利用して集合演算子としての閉包の性質を導いた．

$$\overline{(A \cup B)} = (((A \cup B)^c)^\circ)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ)^c \cup ((B^c)^\circ)^c = \overline{A} \cup \overline{B}$$

本日のレポート課題とヒント

来週はこどもの日で休みなので次回は 5 月 12 日になる．レポート課題は 5 月 7 日（木）12 時半までに提出してほしい．もちろん評価のためのレポートではないので遅れても受け取る．

課題 1 命題 2.22 を示せ．ヒント：直積空間の距離の定義と，この場合のリプシッツ連続であることの条件（$L = 1$ でよい）を比較してみよ．

課題 2 命題 2.27 の後半を証明せよ．ヒント：集積点の定義の否定を作ることにより集積点でないことの定義が得られる．これと孤立点の定義を比較せよ．

課題 3 p が A の内点であれば A° の内点であることを示せ．ヒント：$p \in A^\circ$ より $r > 0$ を $B_r(p) \subset A$ となるようにとれる．証明すべきことは $B_r(p) \subset A^\circ$ である．$x \in B_r(p)$ とし $B_s(x) \subset A$ となる x を見つける．三角不等式の利用がカギになる．

次回の講義について

次回は連続写像の開集合による特徴づけを行う．その後，完備性に入る．実数の完備性は実数と論理で学習しているはずなので復習しておくように．