幾何概論 I のレポート課題 (4 月 28 日) の解答例とコメント

レポートの提出がだいぶ減ってしまった．解答例を読んで理解するのも良いが，一度は自分で証明を考えたほうが良い．その努力によって徐々に証明力が付いてくる．解答例を読んでも分からないという人は一度話に来たほうがいいかもしれない．

課題 1 命題 2.22 を示せ．

【解答例】$(x_1, y_1) \in X \times Y$ と $(x_2, y_2) \in X \times Y$ について

$$d_X(p_X(x_1, y_1), p_X(x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) \leqq \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} = d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

が成り立つがこれは $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ がリプシッツ連続（$L = 1$）であることに他ならない．

【コメント】

- $f : X \longrightarrow Y$ がリプシッツ連続であるとは，定義域 X の要素 x_1, x_2 について $d_y(f(x_1), f(x_2)) \leqq L d_X(x_1, x_2)$ が成り立つこと．だから $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ がリプシッツ連続であることを示すには，まず定義域である $X \times Y$ の要素を 2 つ取らなければならない．これが意識できれば証明は自然なはずだ．条件式は設定に応じて自由に書き換える必要がある．基本的なことなので慣れてほしい．
- もちろん証明では直積距離 $d_{X\times Y}$ の定義を使う．定義の確認は怠ってはならない．

課題 2 命題 2.27 の後半を証明せよ．

【解答例】$p \in A$ をとる．これが A の集積点でないとは

$$\exists r > 0; ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset)$$

が成り立つことである．これと $p \in A$ を組み合わせれば，$B_r(p) \cap A = \{p\}$ であり p は A の孤立点である．

【コメント】

- $p \in A$ と集積点でないことの定義を組み合わせるだけの問題．この程度の議論で十分だろう．この部分を証明しようとすれば

$$\{p\} = \{p\} \cup \emptyset = \{p\} \cup ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A) = (\{p\} \cup (B_r(p) \setminus \{p\})) \cap (\{p\} \cup A) = B_r(p) \cap A$$

  とすればよい．

課題 3 p が A の内点であれば A° の内点であることを示せ．

【解答例】p は A の内点なので $r > 0$ を $B_r(p) \subset A$ となるようにとる．$x \in B_r(p)$ をとる．$d(p, x) < r$ より $s = r - d(p, x) > 0$ とおく．$y \in B_s(x)$ について

$$d(p, y) \leqq d(p, x) + d(x, y) < d(p, x) + s = r$$

より $y \in B_r(p)$ を得る．よって $B_s(x) \subset B_r(p) \subset A$ より x は A の内点である．よって $B_r(p) \subset A^\circ$ であり p は A° の内点である．

【コメント】

- 内点の定義で $B_r(p) \subset A$ となる r をとった後，$x \in B_r(p)$ が A の内点であることを示せばよい．ノート上に円を書いて考えれば，x を中心とする十分小さな円が $B_r(p)$ 内に含まれることが想像できるはずだ．x を中心とする円の半径は $r - d(x, p)$ 以下にすればよいことも図から想像がつく．このように直観で考察したことを如何に厳密に示すかが課題だ．
- 証明は三角不等式を使う．これによって直観を排した証明ができたことになる．