幾何概論 I および同演習の講義メモ (5 月 12 日)

本日の講義の要点

1. 連続性の開集合による特徴づけ（定理 2.38）

   この事実は「連続であること」の必要十分条件は「開集合の逆像は開集合であること」と理解してほしい．証明を与えておく．

   f は連続であるとする．Y の開集合 V について $p \in f^{-1}(V)$ をとる．逆像の定義から $f(p) \in V$ である．V は開集合なので $\varepsilon > 0$ を $B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)) \subset V$ となるようにとる．この ε に対して f の p での連続性により $\delta > 0$ を

   $$d_X(x, p) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

   となるようにとる．ここで $B_r(p)$ の定義から $d_X(x,p) < \delta$ は $x \in B_\delta^{d_X}(p)$ と同値であり，また $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ は $f(x) \in B_\varepsilon^{d_Y}(f(p))$ と同値である．よって $x \in B_\delta^{d_X}(p)$ であれば $f(x) \in B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)) \subset V$ であり $x \in f^{-1}(V)$ となる．ゆえに $B_\delta^{d_X}(p) \subset f^{-1}(V)$ であり p は $f^{-1}(V)$ の内点である．よって $f^{-1}(V)$ は開集合であるｂ．

   逆に，開集合の逆像が開集合になったとする．$p \in X$ について $B_\varepsilon^{d_Y}(f(p))$ は Y の開集合なので $f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)))$ は X の開集合である．$p \in f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)))$ より $\delta > 0$ を $B_\delta^{d_X}(p) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)))$ となるようにとる．

   $$d_X(x,p) < \delta \Longrightarrow x \in f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p))) \Longleftrightarrow f(x) \in B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)) \Longleftrightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

   であり f は p で連続である．

   一般に開集合の像は開集合になるとは限らない．例 2.40 に具体例を記述してあるので考えておくこと．この定理の応用として，連続写像の合成写像が連続であること (命題 2.39) を示した．この証明は次のようにすればよい．

   $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ がともに連続であるとする．Z の開集合 W について，g の連続性から $g^{-1}(W)$ は Y の開集合である．さらに f の連続性から $f^{-1}(g^{-1}(W))$ は X の開集合である．逆像の定義から $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ であり，$g \circ f$ は連続である．

   写像が連続であることは，「閉集合の逆像が閉集合である」とも読み替えられる．これは閉集合の補集合が開集合であること，補集合の逆像が逆像の補集合であることの 2 つを組み合わせれば，「閉集合の逆像が閉集合である」ことと「開集合の逆像が開集合である」ことの同値性が出る．具体的には

   閉集合の逆像が閉集合だったとする．Y の開集合 B について B^c は閉集合なので $f^{-1}(B^c)$ は閉集合である．$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ なので $f^{-1}(B)$ は開集合である．よって開集合の逆像は開集合である．逆は「閉」と「開」を入れ替えるだけだ．

   補集合の逆像が逆像の補集合であることは次のように示す．

   $$x \in f^{-1}(B^c) \Longleftrightarrow f(x) \in B^c \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B)^c$$

2. 開集合，閉集合の例

   開集合の逆像が開集合であることを利用して，様々な開集合の例を作れる．

   - $A = \{(x,y) \mid -1 < x^2 + xy - y^2 < 1\}$ は開集合である．なぜなら $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ は連続関数なので $A = f^{-1}((-1,1))$ は開区間（開集合）の逆像となり開集合である．

- n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ とみなす．正則行列は行列式が 0 でない行列であること，行列式は成分の多項式なので $\mathbb{R}^{n^2}$ 上の連続関数（f で表そう，$f(A) = |A|$ である．）であることから，正則行列全体の集合
$$GL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$
は開集合である．
- 上の例について $f^{-1}(\{1\})$ は閉集合である．これは行列式が 1 になる行列全体であり $SL(n, \mathbb{R})$ と表せる．$f^{-1}(\{0\})$ は行列式が 0 になる行列全体であり，正則でない行列の集合である．これが閉集合なので，正則行列全体の集合は開集合である．

3. Cauchy 列と完備性

定義については定義 2.11 と定義 2.12 を見ること．実数の数列については 2 年次の実数と論理で学習したはずであり，ここではそれを距離空間での概念として定義しなおした．講義では最初に収束する点列が Cauchy 列であることを証明した．

点列 $\{a_n\}$ が a に収束したとする．$\forall \varepsilon > 0$ に対し
$$n \geqq N \Longrightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$
となる自然数 N をとれる．この N について
$$n, m \geqq N \Longrightarrow d(a_n, a_m) \leqq d(a_n, a) + d(a.a_m) < 2\varepsilon$$
となるので $\{a_n\}$ は Cauchy 列である．

実数全体の集合が完備であることは実数と論理の講義で学習したのでここでは述べない．復習しておくこと．

4. 完備性と直積空間，部分空間

完備距離空間の直積は完備である（定理 2.46）．このことは直積距離の定義を使うだけだ．

$\{(a_n, b_n)\}$ を直積空間 $X \times Y$ の Cauchy 列とする．
$$d_X(a_n, a_m) \leqq d_{X\times Y}((a_n, b_n), (a_m, b_m))$$
より $\{a_n\}$ は X の Cauchy 列になる．X の完備性から X の点列 $\{a_n\}$ は収束するのでその極限を a とおく．同様に $\{b_n\}$ は Y の Cauchy 列であり収束するのでその極限を b とする．
$$d_{X\times Y}((a_n.b_n), (a, b)) \leqq d_X(a_n, a) + d_Y(b_n, b)$$
より左辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので $X \times Y$ の点列 $\{(a_n, b_n)\}$ は (a, b) に収束する．

部分空間については閉集合という条件が必要である (命題 2.49).

距離空間の部分空間 $A \subset X$ について，距離は同一なので A の Cauchy 列は X の Cauchy 列でもある．よって X の完備性から X の点 p に収束する．ここで A が閉集合なら $p \in A$ であり，A は完備になる．ゆえに完備距離空間の閉部分空間は完備である．

一方，A が閉集合でなければ $p \in \overline{A} \setminus A$ をとる．命題 2.27 より p は集積点なので p に収束する A の点列 $\{a_n\}$ が存在する（命題 2.25）．これは X の収束する点列なので Cauchy 列である．よって A の点列としても Cauchy 列であるが，その極限 p は A に属さない．よって集合 A においては収束せず，A は完備ではない．

5. 完備距離空間の例

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備なので，その直積 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ も完備である．$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ より，$\mathbb{R}^n$ は完備である．よって $\mathbb{R}^n$ の閉部分空間は完備である．

もう一つの重要な例は連続関数全体の集合の d_∞ に関する完備性 (例 2.48) である．コメントしておこう．

V を $[0,1]$ 区間上の連続関数全体の集合とし，距離を d_∞（例 2.4） で定める．$\{f_n\}$ を V の Cauchy 列とすれば $0 \leqq a \leqq 1$ について

$$d_\infty(f_n, f_m) = \max|f_n(x) - f_m(x)| \geqq |f_n(a) - f_m(a)|$$

より $\{f_n(a)\}$ は Cauchy 数列なので収束する．その極限を $f(a)$ と定めることにより $[0,1]$ 区間上の関数 $f(x)$ が定まる．

$$\forall\varepsilon > 0; (\exists N; (m, n \geqq N \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leqq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$$

において $m \to \infty$ とすれば

$$\forall\varepsilon > 0; (\exists N; (n \geqq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon))$$

となり N は x によらないので $\{f_n\}$ は f に一様収束する．連続関数の一様収束極限は連続（解析概論 I で学ぶはずだ）なので $f \in V$ であり，$\{f_n\}$ は f に d_∞ について収束する．Cauchy 列が収束したので完備である．

6. (演習) 集合からの距離

$A \subset X$ について $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$ で定める．この関数について命題 2.43 を考えてもらった．

$x \in A$ とする．下限の定義から $b \in A$ について

$$0 \leqq d(x, A) \leqq d(x, b)$$

であるが $b = x$ とできるので $0 \leqq d(x.A) \leqq d(x, x) = 0$ となり $d(x, A) = 0$ を得る．

逆に $d(x, A) = 0$ とする．下限の定義から $\varepsilon > 0$ は下界ではないので $0 \leqq d(x, b) < \varepsilon$ となる，A の要素 b が存在する．すなわち $b \in B_\varepsilon(x)$ となる b が存在するので $b \in A \cap B_\varepsilon(x)$ であり $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ を得る．すなわち $x \in \overline{A}$ であり A が閉集合であることから $x \in A$ となる．

講義でふれるのを忘れたが，$f(x) = d(x, A)$ は X 上の連続関数になる．この証明を補足しておく．

正数 $\varepsilon > 0$ をとる．上限の定義から $a \in A$ を $d(x, a) < d(x, A) + \varepsilon$ となるようにとる． $d(y, A) \leqq d(y, a)$ と合わせて

$$d(y, A) - d(x, A) \leqq d(y, a) - d(x, a) + \varepsilon \leqq d(x, y) + \varepsilon$$

を得るが，x, y を入れ替えても同じ議論ができるので

$$|d(y, A) - d(x, A)| \leqq d(x, y) + \varepsilon$$

を得る．ε は任意なので $|d(x, A) - d(y, A)| \leqq d(x, y)$ であり，$f(x) = d(x, A)$ はリプシッツ連続である．

7. (演習) 命題 2.32

A° は A に含まれる最大の開集合であることの証明を考えてもらった．すなわち $B \subset A$ で B が開集合なら $B \subset A^\circ$ となることの証明を考えてもらった．簡単な証明なので自分でできるようになってほしい．

$x \in B$ とする．B は開集合なので $B_r(x) \subset B$ となる正数 $r > 0$ が存在する．$B \subset A$ より $B_r(x) \subset A$ なので x は A の内点である．よって $x \in A\circ$ であり $B \subset A^\circ$ が成り立つ．

この事実は $A \subset B$ から $A^\circ \subset B^\circ = B$ とすれば簡単に示せる．ただし $A \subset B$ から $A^\circ \subset B^\circ$ がなぜかと問われると戸惑うだろう．上の証明はこの包含関係も含めて示したことになっている．

閉集合についても考察したがここでは省略する．自分で考えてみると良い．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 連続写像の合成が連続であることの証明で使った等式 $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ を示せ．

【ヒント】逆像の定義を使うだけ，易しいはずだ．

課題 2 n 次直交行列全体の集合 $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の閉集合であることを示せ．

【ヒント】直交行列であることの必要十分条件は ${}^tAA = E$ である．このことを利用して $O(n)$ をある連続写像の（閉集合の）逆像として見直せばよい．

課題 3 命題 2.44 を示せ．

【ヒント】連続関数の和差積商は定義される範囲で連続であることは使ってよい．命題 2.43 の結果を利用すること．

次回の講義について

次回は点列コンパクト集合の解説をする．その後で位相空間に入る．定理 2.52 は実数と論理で学習したと思うのだが如何だろうか．復習しておいてほしい．