

幾何概論 I のレポート課題 (5 月 12 日) の解答例とコメント

決して難しい問題ではないのだが提出者が減っている。曖昧な理解のまま放置しているので授業内容についてこれないのではないか。曖昧な理解を確実なものにするのは家庭学習が基本だが、家庭学習で分からない場合は周りに聞いてほしい。私のところに質問に来ても良い。

課題 1 連続写像の合成が連続であることの証明で使った等式 $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ を示せ。

【解答例】

$$x \in f^{-1}(g^{-1}(W)) \iff f(x) \in g^{-1}(W) \iff g(f(x)) \in W \iff (g \circ f)(x) \in W \iff x \in (g \circ f)^{-1}(W)$$

【コメント】

- 逆像の定義と合成写像の定義を使うだけ。この程度の証明は 5 分以内にできてほしい。

課題 2 n 次直交行列全体の集合 $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の閉集合であることを示せ。

【解答例】 $M_n(\mathbb{R})$ を n 次正方行列全体とする。これは \mathbb{R}^{n^2} に他ならないので通常の距離で距離空間になっている。写像 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ を $f(A) = 'AA$ で定義する。 $f(A)$ の各成分は A の成分の 2 次多項式なのでこの写像は連続である。一方直交行列とは $f(A) = 'AA = E$ を満たす行列なので $O(n) = f^{-1}(\{E\})$ である。一点からなる集合 $\{E\}$ は閉集合なので $O(n)$ は閉集合である。

【コメント】

- 直交行列とは何かを考えることが出発点だ。講義での解説は行列式を利用していたがそれは役に立たないことに気付いてほしい。意味を考えずに真似をしても数学の力はつかない。
- 解答は $M_n(\mathbb{R})$ を距離空間とみなす方法から書いたが、これは別に省略しても良い。ただ、この程度のことはきちんと意識しておくべきだ。

課題 3 命題 2.44 を示せ。

【解答例】 A からの距離は 0 以上なので $d(x, A) + d(x, B) = 0$ となるのは $d(x, A) = d(x, B) = 0$ の時に限る。 A, B が閉集合であることからこれは $x \in A$ かつ $x \in B$ の場合である。しかし $A \cap B = \emptyset$ であるからこのような x は存在しない。よってすべての x について $d(x, A) + d(x, B) > 0$ が成り立つ。 $g(x)$ は連続関数を正值連続関数で割ったものだから連続である。

$$0 \leq d(x, A) \leq d(x, A) + d(x, B) \text{ より}$$

$$0 \leq g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \leq 1$$

である。また $g(x) = 0$ は $d(x, A) = 0$ の場合に限るので $g(x) = 0 \iff x \in A$ である。また $g(x) = 1$ は $d(x, B) = 0$ の場合に限るので $g(x) = 1 \iff x \in B$ である。

【コメント】

- 殆どが分母が正であることに言及していなかった。この証明の最重要ポイントである。なお、距離空間においても連続関数の商は定義できる範囲で連続である。証明も全く同じなので省略する。
- 他の部分の証明は易しい。特にいうことはない。