

幾何概論 I および同演習の講義メモ (5月19日)

本日の講義の要点

1. 点列コンパクト集合

距離空間 (X, d) について $K \subset X$ が点列コンパクト集合とは K に点列が K の点に収束する部分列を持つことを言う。まず、点列コンパクト集合が有界閉集合^{*1}であることを証明した。

K が有界でなかったとしよう。 $\forall r > 0$ について $K \not\subset B_r(p)$ なので $K \setminus B_r(p) \neq \emptyset$ である。よって $a_n \in K \setminus B_n(p)$ をとる。 $\{a_n\}$ は K の点列であり $d(a_n, p) \geq n$ を満たす。 K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ の収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ をとれる。この極限を a とおけば $\lim_{k \rightarrow \infty} d(a_{n_k}, p) = d(a, p)$ であるが、これは $d(a_{n_k}, p) \geq n_k \geq k$ に矛盾する。よって K は有界である。

次に K が閉集合でなかったとする。 $\bar{K} \neq K$ なので $p \in \bar{K} \setminus K$ を取ることができる。このとき p は K の集積点 (命題 2.27, 4月28日の講義メモ 8) なので K の点列 $\{a_n\}$ を p に収束するようにとれる (命題 2.25)。 K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ は K の点に収束する部分列を持つはずだが、その極限は p 以外の点にはなり得ないので $p \notin K$ から矛盾が生じる。よって K は閉集合である。

2. $\mathbb{R}^m$ の点列コンパクト集合

$\mathbb{R}^m$ においては有界閉集合は点列コンパクトになる。これを示す前にまず有界な数列が収束する部分列を持つことを示した。この事実は実数と論理で学習したはずだが改めて証明を与えておく。

$\{a_n\}$ を有界な実数列とする。 $L \leq a_n \leq K$ となる実数 L, K が存在する。

$$N(r) = \{n \mid a_n > r\} \subset \mathbb{N}$$

とおけば $N(L-1) = \mathbb{N}$ であり $N(K) = \emptyset$ である。また $s < r$ であれば $N(r) \subset N(s)$ である。よって $l = \inf\{r \mid N(r) \text{ は有限集合}\}$ とおけば $\forall \varepsilon > 0$ について $N(l+\varepsilon)$ は有限集合、 $N(l-\varepsilon)$ は無限集合である。よって

$$N(l-\varepsilon) \setminus N(l+\varepsilon) = \{n \mid l-\varepsilon < a_n \leq l+\varepsilon\}$$

は無限集合である。 $n_1 \in N(l-1) \setminus N(l+1)$ をとり、以下 $n_k \in N(l-1/k) \setminus N(l+1/k)$ を $n_k > n_{k-1}$ となるようにとる。 $\{a_{n_k}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列であり、 $l-1/k < a_{n_k} \leq l+1/k$ より l に収束する。

この事実を使って $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合 K が点列コンパクトであることを証明する。

$\{a_n\}$ を K の点列とする。 $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ とおくと m 個の数列 $\{a_{jn}\}$, $1 \leq j \leq m$ はすべて有界である。そこで第1成分の数列 $\{a_{1n}\}$ から収束する部分列 $\{a_{1n_k}\}$ を選ぶ。この部分列に対応する $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ を考えれば第1成分は収束している。そこで、さらにその第2成分が収束するように部分列を選ぶ。すると第1成分はすでに収束しているので、第1成分と第2成分がともに収束するような部分列が取れる。そこからさらに第3成分が収束するように部分列をとるという形で議論を進めれば、最終的にすべての成分が収束するような部分列、すなわち収束する $\{a_n\}$ の点列が得られる。ここまでは有界性のみを使ったことに注意せよ。

部分列の各項は K の点なので極限は K の閉包に含まれる。 K は閉集合なので極限は K の点である。よって K の点列は K の点に収束する部分列を持つ。

3. 点列コンパクト集合上の連続関数

^{*1} K が有界であるとは、 $K \subset B_r(a)$ となる $a \in X$ と $r > 0$ が存在することを言う。半径 r の球に含まれるということだと理解してほしい。

距離空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について、点列コンパクト集合の像は点列コンパクト集合である (命題 2.53). 開集合や閉集合の場合は逆像だったがここでは像であることに注意してほしい. 証明は易しい.

A を X の点列コンパクト集合とし, $f(A)$ の点列 $\{b_n\}$ を考える. $b_n \in f(A)$ より $a_n \in A$ を $b_n = f(a_n)$ となるようにとる. $\{a_n\}$ は A の点列なので収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ をとる. $\lim a_{n_k} = a \in A$ とおく. f の $a \in A$ での連続性から $\lim f(a_{n_k}) = f(a) \in f(A)$ である. ゆえに部分列 $\{b_{n_k}\} = \{f(a_{n_k})\}$ は $f(A)$ の点に収束する.

この事実を使えば, 点列コンパクト集合上の連続関数の値域 ($\mathbb{R}$ の部分集合, $f(A)$ とおく) は点列コンパクトなので有界閉集合である. 有界なので上限下限が存在し, 閉集合なので上限下限^{*2}は $f(A)$ に含まれる. よって最大最小であり, 点列コンパクト集合上の連続関数は最大値および最小値を持つ.

4. 集合への距離を実現する点 (演習)

A を距離空間 X の点列コンパクト集合とする. このとき $d(p, A) = \inf\{d(p, x) \mid x \in A\}$ を実現する A の点が存在することの証明を考えてもらった. ポイントは

- $f(x) = d(p, x)$ が連続関数であること. (4月28日の講義メモ3)
- A は点列コンパクト集合なので f は A 上で最小値を持つこと.
- f が $a \in A$ において最小値をとるとすると, $d(p, a) = \min\{f(x) \mid x \in A\} = \inf\{d(p, x) \mid x \in A\} = d(p, A)$ となる.

5. 一様連続な写像が Cauchy 列を Cauchy 列に移すこと. (演習)

写像 $f: X \rightarrow Y$ が一様連続であるとし, $\{a_n\}$ を X の Cauchy 列とする. このとき $\{f(a_n)\}$ は Y の Cauchy 列になる. 証明は以下のようにすればよい.

- $\varepsilon > 0$ をとる. f は一様連続なので

$$d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

を満たす $\delta > 0$ が存在する.

- $\{a_n\}$ は Cauchy 列なので

$$n, m \geq N \implies d_X(a_n, a_m) < \delta$$

となる自然数 N が存在する.

- $n, m \geq N$ のとき $d_Y(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$ が成り立つ. ゆえに $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列である.

6. 点列コンパクト集合上の連続写像の一様連続性

A を距離空間 X の点列コンパクト集合とし $f: A \rightarrow Y$ を A 上の連続写像とする. このとき f は一様連続である. 証明は背理法を用いる.

- f が一様連続でないとすれば $\varepsilon_0 > 0$ で

$$\forall \delta > 0; (\exists x, x' \in A; (d_X(x, x') < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon_0))$$

を満たすものが存在する.

- $\delta = 1/n$ について, 上の主張における x, x' を x_n, x'_n とおけば次が成り立つ.

$$x_n \in A, \quad x'_n \in A, \quad d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon_0$$

^{*2} 上限を α とすれば $\alpha - \varepsilon$ は上界ではないので $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ を満たす $f(A)$ の要素が存在する. よって α は $f(A)$ の触点である. $f(A)$ は閉集合なので α は値域 $f(A)$ に含まれる.

- $\{x_n\}$ は A の点列なので A の点 a に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ がとれる．その部分列による点列 $\{x'_{n_k}\}$ からさらに収束する部分列 $\{x'_{n_{k_l}}\}$ を選びその極限を $a' \in A$ とおく．
- $d_X(x_{n_{k_l}}, x'_{n_{k_l}}) < 1/(n_{k_l})$ より $l \rightarrow \infty$ として $d_X(a, a') = 0$ を得る．よって $a = a'$ である．
- $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon_0$ より $d_Y(f(a), f(a')) \geq \varepsilon_0$ である．最後の 2 つの主張は矛盾する．
- よって f は一様連続である．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 A, B を X の点列コンパクト集合とすると $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ を実現する $a \in A$ と $b \in B$ が存在することを示せ．

【ヒント】 $f(x) = d(x, B)$ とおけば f は連続である（5 月 12 日の講義メモ 6）． A は点列コンパクトなので A 上の最小値を持ち、それを $f(a) = d(a, B)$ とおく．さらに講義の議論（この講義メモ 4）を使えばよい．

課題 2 距離空間 X の部分集合 A で定義された一様連続写像 $f: A \rightarrow Y$ を考える． $p \in \overline{A} \setminus A$ をとる．さらに Y は完備とする．このとき p に収束する任意の A の点列 $\{a_n\}$ について $\{f(a_n)\}$ は収束することを示せ．

【ヒント】 収束する点列は Cauchy 列であることに注意せよ．後はこの講義メモの 5 を使えばよい．なお、この事実から $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ は収束する．すなわち $f(p)$ をこの極限值と定めることによって f を p で連続になるように拡張できる．（命題 2.16 参照）

次回の講義について

来週は位相空間の連続写像についての考察を続ける．再来週は距離空間の範囲での試験を行う．