幾何概論 I のレポート課題 (5 月 19 日) の解答例とコメント

課題 1 A, B を X の点列コンパクト集合とするとき $d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ を実現する $a \in A$ と $b \in B$ が存在することを示せ．

【解答例】 $f(x) = d(x,B)$ とおけば f は連続である（5 月 12 日の講義メモ 6）．A は点列コンパクトなので A 上の最小値を持ち，それを $f(a_0) = d(a_0,B)$ とおく．a_0 について $g(y) = d(a_0,y)$ を考える．$g(y)$ は連続であり B は点列コンパクトなので g は B 上最小値を持つ．それを $g(b_0)$ とおく．任意の $a \in A,\ b \in B$ について

$$d(a_0,b_0) = d(a_0,B) \leqq d(a,B) \leqq d(a,b)$$

となるので $d(a_0,b_0)$ は $\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ の最小値であり $d(a_0,b_0) = d(A,B)$ である．

【コメント】

- よせられた解答では $d(A,B) = \inf_{x \in A} d(x,B)$ を用いたものが多かった．確かに

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y) = \inf_{x \in A}\left(\inf_{y \in B} d(x,y)\right) = \inf_{x \in A} d(x,B)$$

  であるが，自明とまでは言えない．
- これから証明しようとする事実を記載するときは，それが明確に分かるように記述してほしい．議論の流れが読み取れない解答があった．

課題 2 距離空間 X の部分集合 A で定義された一様連続写像 $f : A \longrightarrow Y$ を考える．$p \in \overline{A} \setminus A$ をとる．さらに Y は完備とする．このとき p に収束する任意の A の点列 $\{a_n\}$ について $\{f(a_n)\}$ は収束することを示せ．

【解答例】 p は集積点なので p に収束する A の点列をとり $\{a_n\}$ とおく．$\{a_n\}$ は収束するので Cauchy 列である（命題 2.45 5 月 12 日の講義メモ 3）．f は一様連続なので $\{f(a_n)\}$ も Cauchy 列になる（5 月 19 日の講義メモ 5）．Y は完備なので $\{f(a_n)\}$ は収束する．

【コメント】

- 命題 2.50 を示すには $\{f(a_n)\}$ の極限の一意性を言う必要がある．これは背理法を使って次のように示せばよい．

  > $\{b_n\}$ を p に収束する別の A の点列とすれば同じ議論で $\{f(b_n)\}$ も収束する．これが $\{f(a_n)\}$ と異なる極限に収束したとすると，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を交互に並べた点列 $\{c_n\}$ について $\{f(c_n)\}$ が収束できなくなる．$\{c_n\}$ はやはり p に収束する A の点列なのでこれは矛盾である．

  この議論は一意性を示す際によく使われる議論だ．よく考えてみてほしい．
- $p \notin A$ なので $f(p)$ は定義されていない．$f(p)$ という記号を使った答案は間違いである．