幾何概論 I および同演習の講義メモ (5 月 26 日)

前回の講義メモは距離空間までの事項しかまとめていなかった．実際には位相空間の話に入っていたので不十分なものを掲載してしまったことになる．今回の講義メモでは，前回の内容も含めて位相空間の初めからまとめることにする．

本日の講義の要点

1. 位相およびその例

   位相とは「連続性」を定義できるようにするための構造である．様々な集合に位相を定めることによって，考察の対象を幾何学的に扱うことが可能になる．距離よりもはるかに分かりづらい概念であるが，議論は単純になっている．この講義では位相を開集合系によって定めた（定義 3.1）．最も基本的な方法である．位相を一つ定めた集合を位相空間という．

   位相の例としては，距離空間における開集合系（位相とはこれを一般化したものといえる）が最も基本的である．他につまらない例として離散位相（例 3.4）と密着位相（例 3.5）がある．このうち密着位相は距離による位相としては実現できない．

   興味深い位相の例として例 3.6 を紹介した．

2. 連続写像

   2 つの位相空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるとは，Y の開集合の逆像がつねに X の開集合になることを言う．距離空間の間の写像の連続性の開集合による特徴づけ（定理 2.38）を確認せよ．なお，「$a \in X$ で連続」という概念は（定義できないわけではないが）考える必要はない．

   この定義から連続写像の合成が連続であることは簡単に示せる．命題 2.39 の証明（5 月 12 日の講義メモ）とまったく同じである．

3. 位相の強弱

   x の 2 つの位相について強弱を考えた．同じ集合であっても位相が違えば連続の概念も変わってくることに注意せよ．例えば $f : X \longrightarrow Y$ において X の位相が離散位相なら f は連続である．$f^{-1}(V)\mathcal{O}(X)$ は無条件に成り立つからだ．一方 Y の位相が密着位相の時も X の位相の取り方によらず連続になる．Y の開集合は Y および $\emptyset$ だけなので $f^{-1}(Y) = X,\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ はいずれも X の開集合である（命題 3.9）．

   命題 3.10 も簡単だが証明を書いておく．i は恒等写像なので $i^{-1}(V) = V$ であることに注意せよ．

   > 恒等写像 i が連続だとする．$V \in \mathcal{O}_2(X)$ について $i^{-1}(V) = V \in \mathcal{O}_1(X)$ となる．ゆえに $\mathcal{O}_2(X) \subset \mathcal{O}_1(X)$ であり $\mathcal{O}_2(X)$ は $\mathcal{O}_1(X)$ より弱い位相である．逆に $\mathcal{O}_2(X) \subset \mathcal{O}_1(X)$ であれば $\forall V \in \mathcal{O}_2(X)$ について $i^{-1}(V) = V \in \mathcal{O}_1(X)$ が成り立つ．ゆえに $i : (X, \mathcal{O}_1(X)) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_2(X))$ は連続である．

4. 内点と内部

   テキストに書き忘れていたので補足しておく．位相空間 X と $A \subset X$ について

   > **定義** x が $A \subset X$ の内点であるとは $x \in U \subset A$ となる開集合 U が存在することを言う．A の内点全体の集合を A° とおき，A の内部と呼ぶ．

   距離空間での概念を位相空間に拡張したものである．$B_r(x)$ が意味を持たないので代わりに $x \in U$ を満たす開集合を利用している．これについて次が成り立つ．

   > **命題**　A° は A に含まれる最大の開集合である．すなわち A° は開集合であり，$U \subset A$ を満たす開集合は $U \subset A^\circ$ を満たす．
   >
   > **証明** 開集合 U が $U \subset A$ を満たせば $x \in U$ について $x \in U \subset A$ が成り立つ．U は開集合なので $x \in A^\circ$ である．よって $U \subset A^\circ$ が成り立つ．

$x \in A^\circ$ について $U_x \in \mathcal{O}(x)$ を $x \in U \subset A$ となるようにとる．開集合の合併は開集合なので

$$\bigcup_{x\in A^\circ} U_x \subset A$$

は開集合である．前半で示したことからこの集合は A° の部分集合になる．一方 $x \in A^\circ$ は $x \in U_x$ を満たすので

$$A^\circ \subset \bigcup_{x\in A^\circ} U_x \subset A^\circ$$

よって A° は開集合 U_x たちの合併集合になるので開集合である．

5. 閉集合，触点と閉包

距離空間の場合と同様に開集合の補集合を閉集合と呼ぶ．開集合の性質とド・モルガンの法則（命題 1.10）から次を得る．

命題　(1) 全体集合と空集合は閉集合である．

(2) 閉集合の（無限個の）共通部分は閉集合である．

(3) 閉集合の有限個の合併は閉集合である．

補集合の内部の補集合を閉包と呼ぶ．$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$

命題　$x \in \overline{A}$ であることと次が成り立つことは同値である．

$$\forall U \in \mathcal{O}(X), x \in U; U \cap A \neq \emptyset$$

証明 $x \in \overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ は $x \in (A^c)^\circ$ が成り立たないということなので，内点であることの否定命題により

$$\forall U \in \mathcal{O}(X), x \in U; U \not\subset A^c$$

が成り立つ．ここで $U \not\subset A^c$ とは A^c に含まれないということだから A と交わることと同値である．すなわち $A \cap U \neq \emptyset$ と同値である．

この条件を満たす x を A の触点と呼ぶ．閉包 $\overline{A}$ とは A の触点全体の集合である．

命題 A の閉包 $\overline{A}$ は A を含む閉集合である．閉集合 F が $F \supset A$ を満たすとき $F \supset \overline{A}$ である．すなわち $\overline{A}$ は A そ含む最小の閉集合である．

証明 $(A^c)^\circ$ は開集合なのでその補集合 $\overline{A}$ は閉集合である．次に F を $F \subset A$ を満たす閉集合とする．$F^c \subset A^c$ であるが F は閉集合なので F^c は開集合である．よって $F^c \subset (A^c)^\circ$ が成り立つ．両辺の補集合をとれば包含関係の向きが変わるので $F \supset ((A^c)^\circ)^c = \overline{A}$ を得る．

触点の定義は距離空間の時にきちんと与えておかなければならなかった．距離空間では開集合の代わりに開球が使えるので

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

が触点と閉包の定義である．補足しておく．

6. 相対位相

位相空間の部分集合に定義 3.6 により位相を定めることができる．これが実際位相になることは次のようにすればよい．

$V_\lambda \in \mathcal{O}(Y)$, $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ を $V_\lambda = U_\lambda \cap Y$ となるようにとる．

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda} (U_\lambda \cap Y) = \left(\bigcup_{\lambda} U_\lambda\right) \cap Y$$

だが，開集合系の公理から $\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ なので右辺は $\mathcal{O}(Y)$ に属する．Y の開集合の合併は開集合であることが示された．他の主張は省略する．なお，上の変形で命題 1.11 を使っていることに注意せよ．

この位相を相対位相と呼ぶ．部分集合に相対位相を入れた位相空間を部分（位相）空間と呼ぶ．

相対位相は包含写像 $i : Y \longrightarrow X$ を連続にするような Y の最弱の位相である（命題 3.18）．このことの証明の概略は以下の通り．

$i : Y \longrightarrow X$ が連続であるためには任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ について $i^{-1}(U)$ が Y の開集合になっていないといけない．$i^{-1}(U) = U \cap Y$ なので $U \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ でなくてはならないが，相対位相はちょうどこのような集合だけを開集合と定めたのであるから i は連続であり，かつ i を連続にする位相は相対位相を含んでいなくてはならない．

もう一つ重要な事実は命題 3.19 である．i は連続なので $i \circ f$ 連続なら f が連続であることのみ示せばよい．

$V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる．$U \in \mathcal{O}(X)$ を $V = U \cap Y$ となるようにとる．$i \circ f$ の連続性から

$$(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(Z)$$

であるが，$i^{-1}(U) = U \cap Y = V$ なので $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(Z)$ を得る．よって f は連続である．

7. p.6 の例 2.1 の距離による位相（演習）

この距離空間において 1 点からなる集合が開集合になることを考察してもらった．異なる点との距離は常に 1 なので $B_{1/2}(x) = \{x\}$ と 1 点のみからなることが分かる．距離空間では $B_r(x)$ は開集合（例 2.29）なので $\{x\}$ は開集合である．任意の集合は 1 点のみからなる集合の合併で表されるので開集合の性質からすべての集合が開集合になる．ゆえにこの距離による位相は離散位相である．

一方，2 点以上持つ距離空間では全体集合でも空集合でもない開集合が存在する．この証明はレポート課題にした．この事実から位相空間の中には距離に由来しないものが存在することが分かる．距離空間はすべて位相空間を定めるが，位相空間は必ずしも距離に由来するものばかりではない．

8. 距離の関係と位相の強弱（演習）

X の 2 つの距離の間に $d_1 \leqq K d_2$ という関係があるとき $\mathcal{O}_{d_1}(X)$ は $\mathcal{O}_{d_2}(X)$ より弱い位相になる．このことの証明を解説した．

$U \in \mathcal{O}_{d_1}(X)$ をとる．$x \in U$ について $r > 0$ を $B_r^{d_1}(x) \subset U$ となるようにとる．$z \in B_{r/K}^{d_2}(x)$ をとれば $d_2(z, x) < r/K$ より $d_1(z.x) \leqq K d_2(z, x) < r$ が成り立つ．よって $z \in B_r^{d_1}(x)$ であり $z \in U$ を得る．$B_{r/K}^{d_2}(x) \subset U$ となるので $U \in \mathcal{O}_{d_2}(X)$ である．よって $\mathcal{O}_{d_1}(X) \subset \mathcal{O}_{d_2}(X)$ が成り立つ．

この主張から同値な距離は同じ位相を定める．

9. 内部を取ることと合併，共通部分の関係（演習）

$(A \cup B)^\circ A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成立しない．例えば $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$ とでもおいてみればよい．$(A \cup B)^\circ = (-1, 1) \supsetneqq A^\circ \cup B^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1)$ である．もっと極端な例としては A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合として見ればよい，$A^\circ = B^\circ = \emptyset$ であるが $A \cup B = \mathbb{R}$ なので $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$ である．対称的に $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ が成り立つ．これはレポート課題にする．

10. 上半連続（演習）

位相空間から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_l(\mathbb{R}))$ への連続写像を上半連続関数と呼ぶ．X が距離空間の時は次の命題が成り立つ（テキストにミスがあるので訂正しておいてください）．

命題　距離空間上の関数が上半連続であることと次が成り立つことは同値である．

$$\forall a \in X,\ \forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (d(x,a) < \delta \Longrightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon))$$

命題 3.11 の不等式は間違いなので訂正しておいてください．

証明　$\forall a \in X$ をとる．$\forall \varepsilon > 0$ について $f(a) \in (f(a) - \varepsilon, \infty) \in \mathcal{O}_l(\mathbb{R})$ である．f の上半連続性から $f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$ は X の開集合である．この集合は a を含むので $\delta > 0$ を

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow x \in f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$$

が成り立つようにとれる．これは $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, \infty)$ すなわり $f(x) > f(a) - \varepsilon$ に他ならない．

逆に

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon$$

は $x \in B_\delta(a) \longrightarrow x \in f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$ を意味する．これは

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$$

であり $f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$ が開集合であること，すなわち f が上半連続であることが分かる．

本日のレポート課題とヒント

来週は試験なので今回のレポート課題の提出締め切りは試験終了後の 6 月 5 日 13 時とする．

課題 1　2 点以上含む距離空間 X について $U \neq X$ かつ $U \emptyset$ を満たすものがあることを示せ．

【ヒント】異なる点を x，ｙ とおけば $d(x,y) > 0$ である．ここで x を含み y を含まないような開集合（$B_r(x)$ の形で考えると良い）を作ってみよ．

課題 2　$(A \cap B)^\circ A^\circ \cap B^\circ$ を示せ．

【ヒント】$(A \cap B)^\circ$ とは $A \cap B$ に含まれる最大の開集合である．右辺が開集合であることは明らかなのでこれが $A \cap B$ に含まれることと $(A \cap B)^\circ$ を含むことを示せばよい．

次回の講義について

来週は試験なので授業（演習を含めて）は行わない．再来週は直積位相，等化位相の紹介から始める．