幾何概論 I のレポート課題 (5 月 26 日) の解答例とコメント

課題 1 2 点以上含む距離空間 X について $U \neq X$ かつ $U \neq \emptyset$ を満たすものがあることを示せ．

【解答例】 x, y を X の異なる 2 点としその距離を $r = d(x, y) > 0$ とおく．$U = B_r(x)$ とおけば，U は開集合であり（例 2.29）$x \in U$ を満たす．ゆえに $U \neq \emptyset$ である．一方 $d(x, y) = r$ より $r \notin B_r(x) = U$ なので $U \neq X$ である．

【コメント】

- やさしい問題だ．なお，$B_r(x)$ が開集合であることを使ったが，その証明は与えていなかったようだ．簡単なので考えてみてほし．
- この事実から 2 点以上の要素を持つ距離空間の位相は密着位相にはならない．距離に由来しない位相空間の存在が分かる．

課題 2 $(A \cap B)^\circ A^\circ \cap B^\circ$ を示せ．

【解答例】内部の定義を使った証明

$x \in A^\circ \cap B^\circ$ とする．$x \in A^\circ$ より $x \in U \subset A$ となる開集合 A が存在する．同様に $x \in V \subset B$ となる開集合 V が存在する．よって $x \in U \cap V \subset A \cap B$ であり $U \cap V$ は開集合なので x は $A \cap B$ の内点である．$A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ が成り立つ．

逆に $x \in (A \cap B)^\circ$ をとる．$x \in (A \cap B)^\circ \subset A^\circ$，同様に $x \in B^\circ$ より $x \in A^\circ \cap B^\circ$ であり $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ である．以上を合わせて $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である．

【解答例】A° とは A に含まれる最大の開集合であることを使った証明

A°, B° はともに開集合なので $A^\circ \cap B^\circ$ も開集合である．また $A^\circ \subset A$ かつ $B^\circ \subset B$ なので $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$ である．よって $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ である．

一方 $(A \cap B)^\circ \subset A \cap B \subset A$ より $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ である．同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ も成り立つので $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ である．以上を合わせて $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である．

【コメント】

- 議論で $B_r(x)$ のような記号を使った人が目についてが，これは距離空間での議論である．この問題では使ってはいけない．
- 一般に $A \subset B$ ならば $A^\circ \subset B^\circ$ である．この証明も簡単に行えるようになってほしい．