

幾何概論 I および同演習の講義メモ (6月9日)

本日の講義の要点

1. 開基

開基の定義は p.14 の定義 3.15 をみること。ただし開基に関する議論は次の命題が基本である。講義で解説したことを整理しておく。

- 命題 3.13 の証明

\mathcal{B} が開基であれば空でない開集合 U は $U = \cup_{\lambda} V_{\lambda}$, $V_{\lambda} \in \mathcal{B}$ と表せる。ゆえに $x \in U$ について $x \in V_{\lambda}$ となる λ が存在するが、これは $x \in V_{\lambda} \subset U$ を満たす \mathcal{B} の要素である。

逆に空でない開集合 $U \in \mathcal{O}(X)$ が $\forall x \in U; (\exists V \in \mathcal{B}; (x \in V \subset U))$ を満たしたとする。 $x \in U$ についてこの条件を満たす $V_x \in \mathcal{B}$ をとれば、 $U = \cup_{x \in U} V_x$ となる。よって U は \mathcal{B} の要素の合併で表すことができ、 \mathcal{B} は開基である。

- 命題 3.14 の簡略化

距離空間 (X, d) について $\{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ は $\mathcal{O}_d(X)$ の開基である。これは距離空間における開集合の特徴づけ (命題 2.33) と命題 3.13 の主張を比較すればよい。

- 与えられた集合族を開集合とする最弱の位相

\mathcal{B}_0 を X の部分集合の族とする。もちろんこれは開集合の公理を満たさない。そこで、これを含む最小の開集合系を構成する。まず

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_0 \text{ の有限個の要素の共通部分全体の集合}\} \cup \{X\}$$

とおく。そして

$$\mathcal{O}(X) = \{\mathcal{B} \text{ の (一般には非可算無限個の) 要素の和集合全体の集合}\} \cup \{\emptyset\}$$

とおく。これは位相であり \mathcal{B} はその開基である。

証明 (1) $X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{O}(X)$ より $X \in \mathcal{O}(X)$ である。また定義から $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$ である。

(2) $\mathcal{O}(X)$ の定義から $\mathcal{O}(X)$ の要素の和集合は $\mathcal{O}(X)$ に属する。

(3) 2 個の $\mathcal{O}(X)$ の要素の共通部分が $\mathcal{O}(X)$ に属することを示せば十分である (n 個の集合の共通部分は 2 個の集合の共通部分を取る操作を $n-1$ 回繰り返せばよい)。 $\mathcal{O}(X)$ の要素は \mathcal{B} の要素の和集合なので $U_{\alpha} \in \mathcal{B}, V_{\beta} \in \mathcal{B}$ について

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_{\beta} \right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_{\alpha} \cap V_{\beta})$$

が成り立つ。 $U_{\alpha} \cap V_{\beta} \in \mathcal{B}$ なのでこれは $\mathcal{O}(X)$ の要素である。

2. 直積位相

定義 3.7 をみよ。なお、

$$\bigcap_{j=1}^N (U_j \times V_j) = \left(\bigcap_{j=1}^N U_j \right) \times \left(\bigcap_{j=1}^N V_j \right)$$

なので \mathcal{B} の有限個の共通部分は \mathcal{B} に他ならない。それゆえ \mathcal{B} を含む最弱の位相は \mathcal{B} を開基とする位相でありそれが直積位相である。

- 命題 3.20 は命題 3.13 を直積位相に関し書き直したものである。 $U \times V \in \mathcal{B}$ に注意せよ。
- 命題 3.21 の証明

(1) $U \in \mathcal{O}(X)$ について $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, $V \in \mathcal{O}(Y)$ について $p_Y^{-1}(V) = X \times V$ である。ゆえに直積位相のもとで p_X, p_Y はともに連続である。

逆に p_X, p_Y がともに連続であれば, $U \times Y, X \times V$ は $X \times Y$ の開集合でなければならない。よって $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ より \mathcal{B} の要素はすべて開集合になる。この位相は直積位相を含む。すなわち直積位相より強い位相である。

(2) $p_X \circ f$ と $p_Y \circ f$ はともに連続だとする。 $U \in \mathcal{O}(X)$ について $(p_X \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(p_X^{-1}(U))$ は Z の開集合だがこれは $f^{-1}(U \times Y) \in \mathcal{O}(Z)$ を意味する。同様に $V \in \mathcal{O}(Y)$ について $f^{-1}(X \times V) \in \mathcal{O}(Z)$ であり, 2つの共通部分をとって $f^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{O}(Z)$ を得る。 $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ は $W = \bigcup_{\lambda} (U_{\lambda} \times V_{\lambda})$, $U_{\lambda} \in \mathcal{O}(X), V_{\lambda} \in \mathcal{O}(Y)$ と表されるので命題 1.12 より

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} U_{\lambda} \times V_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(U_{\lambda} \times V_{\lambda}) \in \mathcal{O}(Z)$$

となる。ゆえに f は連続である。

- 講義ではきちんと述べなかったが, 距離空間の直積空間の位相は, 位相空間としての直積空間の位相と一致する。すなわち $\mathcal{O}_{d_{X \times Y}}(X \times Y)$ は $\mathcal{O}_{d_X}(X)$ と $\mathcal{O}_{d_Y}(Y)$ の直積位相である。これについては次回補足しよう。

3. 等化位相

定義 3.8 で等化位相を定めた。これが位相になることは命題 1.12 を利用して開集合の公理を一つずつチェックすればよい。

- 位相空間 X に同値関係 \sim を与えた時, その商集合に射影 $p: X \rightarrow X/\sim$ による等化位相を入れたものを商空間という。部分集合に相対位相をいれた部分空間, 直積集合に直積位相を入れた直積空間, 商集合に等化位相を入れた商空間が位相の導入の仕方の最も基本的なものである。

- 命題 3.23 の証明

(1) $\mathcal{O}(Y)$ の定義から f の連続性は明らかであり, またこれ以上開集合を増やすと連続でなくなることも明らかである。(1) は自明である。

(2) $g \circ f$ が連続だとする。 $W \in \mathcal{O}(Z)$ について $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{O}(X)$ だがこれは $g^{-1}(W) \in \mathcal{O}(Y)$ を意味している。ゆえに g は連続である。

4. 直積集合の内部 (演習)

直積空間 $X \times Y$ において $(A \times B)^{\circ} = A^{\circ} \times B^{\circ}$ が成り立つことを考えてもらった。使うことは内点であること条件

$$x \in A^{\circ} \iff \exists U \in \mathcal{O}(X); x \in U \subset A$$

である。この理解により $(A \times B)^{\circ} \subset A^{\circ} \times B^{\circ}$ は次のように自然に証明できる。

- $(x, y) \in (A \times B)^{\circ}$ をとる。
- 内点であることから $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ を $(x, y) \in W \subset A \times B$ となるようにとる。
- 直積位相についての命題 3.20 から $U \in \mathcal{O}(X)$ と $V \in \mathcal{O}(Y)$ を $(x, y) \in U \times V \subset W$ となるようにとる。
- $x \in U \subset A$ より $x \in A^{\circ}$, $y \in V \subset B$ より $y \in B^{\circ}$ を得る。ゆえに $(x, y) \in A^{\circ} \times B^{\circ}$ である。

逆の包含関係も同様に示せるが, $A^{\circ} \times B^{\circ} \in \mathcal{O}(X \times Y)$ と $A^{\circ} \times B^{\circ} \subset A \times B$ および $(A \times B)^{\circ}$ が $A \times B$ に含まれる最大の開集合であることを組み合わせても簡単に分かる。

5. 対角線写像の連続性 (演習)

位相空間 X とその直積空間 $X \times X$ について, 対角線写像 $f: X \rightarrow X \times X, f(x) = (x, x)$ の連続性を考えてもらった. 解答は直積位相の定義を利用して開集合の逆像が開集合であることを示す方法 (レポート課題にした) と, 命題 3.21(2) を利用する方法がある. なお射影を p_X と書いてしまうと両方同じになってしまうので $p_1(x_1, x_2) = x_1, p_2(x_1, x_2) = x_2$ と表すと良い. これにより $p_1 \circ f$ と $p_2 \circ f$ はともに恒等写像になるので連続である.

6. 等化位相の特徴づけ (演習)

位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続, 全射, 開写像のとき $O(Y)$ は f による等化位相 $O^*(Y)$ と一致することを考えてもらった. なお, 開写像とは開集合の像が開集合であること, すなわち

$$U \in O(X) \implies f(U) \in O(Y)$$

が成り立つことをいう.

- f は連続なので命題 3.23(1) より $O(Y)$ は $O^*(Y)$ より弱い. すなわち $O(Y) \subset O^*(Y)$ である.
- $V \in O^*(Y)$ をとる. 等化位相の定義から $f^{-1}(V) \in O(X)$ である.
- f は開写像なので $f(f^{-1}(V)) \in O(Y)$ である.
- $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$ と f が全射であることから $V = f(f^{-1}(V))$ が成り立つ.
- ゆえに $V \in O(Y)$ であり $O^*(Y) \subset O(Y)$ を得る. よって $O(Y) = O^*(Y)$ である.

本日のレポート課題とヒント

課題 1 直積空間 $X \times Y$ において $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ が成り立つことを示せ.

【ヒント】 集合の相等なので一方の要素が他方の要素になることを言えばよい. なお次を基本事項として使うこと.

$$x \in \overline{A} \iff \exists U \in O(X) \implies U \cap A \neq \emptyset$$

課題 2 位相空間 $(X, O(X))$ について $f: X \rightarrow X \times X$ を $f(x) = (x, x)$ で定める. このとき $W \in O(X \times X)$ について $f^{-1}(W) \in O(X)$ となることを示せ.

【ヒント】 $f^{-1}(W) = \emptyset$ の場合は確かに開集合になっている. 空でない場合に $x \in f^{-1}(W)$ をとって直積位相の定義を使い $x \in U \subset f^{-1}(W)$ となる開集合を見つければよい.

課題 3 $\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \cap V_\beta)$ を示せ.

次回の講義について

次回は第二可算公理と可分について解説する. 位相空間はあまりに一般的な概念なので, それだけではなかなか使えない. そこで実際に位相空間を扱う場合はなにがしかの不可的性質をつけて扱う. その最初の例が次回扱う概念である.