幾何概論 I のレポート課題 (6 月 9 日) の解答例とコメント

課題 1 直積空間 $X \times Y$ において $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ が成り立つことを示せ．

【解答例】 まず $(a,b) \in \overline{A \times B}$ をとる．$a \in U \in \mathcal{O}(X)$ および $b \in V \in \mathcal{O}(Y)$ を満たす U, V をとれば $(a,b) \in U \times V \in \mathcal{O}(X \times Y)$ なので $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$ である．

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset$$

より $U \cap A \neq \emptyset$ と $V \cap B \neq \emptyset$ を得る．よって $a \in \overline{A}$ かつ $b \in \overline{B}$ であり $(a,b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ である．

逆に $(a,b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ とする．$(a,b) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ について $(a,b) \in U \times V \subset W$ となる $U \in \mathcal{O}(X)$ と $V \in \mathcal{O}(Y)$ がとれる．$a \in \overline{A}$ より $A \cap U \neq \emptyset$ である．同様に $b \in \overline{B}$ より $B \cap V \neq \emptyset$ である．よって $W \cap (A \times B) \supset (U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset$ であり $(a,b) \in \overline{A \times B}$ である．

【コメント】

- 前半の証明で最初に $(a,b) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ なる W をとってしまうと $U \times V \subset W$ となる U, V は任意にとったものではなくなる．$a \in \overline{A}$ の証明には使えない．
- $(x,y) \in (U \times V) \cap (A \times B)$ は $x \in U$ かつ $y \in V$ かつ $x \in A$ かつ $y \in B$ である．4 つの命題を「かつ」で結んでいるので順序はなんでもかまわない．証明で使った事実はこのことから理解できる．

課題 2 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ について $f : X \longrightarrow X \times X$ を $f(x) = (x,x)$ で定める．このとき $W \in \mathcal{O}(X \times X)$ について $f^{-1}(W) \in \mathcal{O}(X)$ となることを示せ．

【解答例】 $f^{-1}(W) = \emptyset$ のときは定義より開集合である．$f^{-1}(W) \neq \emptyset$ とし $x \in f^{-1}(W)$ をとる．$f(x) = (x,x) \in W \in \mathcal{O}(X \times X)$ である．ゆえに $U, V \in \mathcal{O}(X)$ で $(x,x) \in U \times V \subset W$ を満たすものが存在する．

$y \in U \cap V$ について $f(y) = (y,y) \in (U \cap V) \times (U \cap V) \subset U \times V \subset W$ より $y \in f^{-1}(W)$ である．よって $x \in U \cap V \subset f^{-1}(W)$ であり $U \cap V \in \mathcal{O}(X)$ と合わせて $f^{-1}(W) \in \mathcal{O}(X)$ を得る．

【コメント】

- $(x,x) \in U \times U \subset W$ とした答案が目立ったが，なぜ同じ U に取れるのかは注意が必要だ．間違いとまでは言い切れないが．

課題 3 $\displaystyle \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\right) = \bigcup_{\alpha,\beta} \left(U_\alpha \cap V_\beta\right)$ を示せ．

【解答例】 $x \in (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\right)$ をとる．$x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ かつ $x \in \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$ である．合併の定義から $x \in U_{\alpha_0}$ を満たす $\alpha_0 \in A$ をとる．同様に $x \in V_{\beta_0}$ を満たす $\beta_0 \in B$ をとる．$x \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0} \subset \bigcup_{\alpha,\beta} \left(U_\alpha \cap V_\beta\right)$ より $\subset$ の包含関係を得る．

逆に $x \bigcup_{\alpha,\beta}(U_\alpha \cap V_\beta)$ をとる．合併の定義から $x \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0}$ を満たす α_0, β_0 を取ることができる．$x \in U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ および $x \in V_{\beta_0} \subset \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$ より $x \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0} \subset (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\right)$ であり $\supset$ の包含関係を得る．

【コメント】

- 定義を組み合わせるだけだ．易しい証明であることを理解してほしい．