幾何概論 I および同演習の講義メモ (6 月 16 日)

本日の講義の要点

1. 第二可算公理

   位相空間についての議論は，さらに付加的な条件を付けて展開することが多い．この不可的な条件を数回に分けて解説していく．今日の講義では可算性に関する 2 つの性質を紹介した．公理というが，自明な事実というわけではない．さて，第二可算公理とは，可算個の開集合からなる開基が存在することを言う．これについて以下の事実を紹介した．

   - 第 2 可算公理を満たす位相空間の部分空間が第 2 可算公理を満たすこと（命題 3.24(1)）

     証明　Y を X の部分空間とし，X の可算開基を $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．$\forall V \in \mathcal{O}(Y)$ について，相対位相の定義から $V = Y \cap U$ を満たす $U \in \mathcal{O}(X)$ が存在する．$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(X)$ の開基なので

     $$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$$

     と表せる[*1]．$V = U \cap Y = \bigcup_{k=1}^{\infty}(B_{n_k} \cap Y)$ だが $B_n \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ なので，これは $\mathcal{B}_0 = \{B_n \cap Y \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathcal{O}(Y)$ の開基であることを意味する．

   - 第 2 可算公理を満たす 2 つの位相空間の直積空間が第 2 可算公理を満たすこと（命題 3.24(2)）

     証明　$\mathcal{B}_X = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{O}(X)$ の可算開基，$\mathcal{B}_Y = \{C_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{O}(Y)$ の可算開基とする．このとき

     $$\mathcal{B} = \{B_n \times C_m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$$

     が $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基になることを示せばよい（添え字集合 $\mathbb{N}^2$ は加算集合であることに注意せよ）．これは開基の特徴づけとして命題 3.13 を利用して証明する．

     $\emptyset \neq W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ および $(x, y) \in W$ をとる．直積位相の定義から

     $$(x, y) \in U \times V \subset W, \qquad U \in \mathcal{O}(X),\ V \in \mathcal{O}(Y)$$

     を満たす U, V が存在する．$\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ は開基なので

     $$x \in B_{n_0} \subset U, y \in C_{m_0} \subset V, \quad B_{n_0} \in \mathcal{B}_X,\ C_{m_0} \in \mathcal{B}_Y$$

     となる n_0, m_0 をとることができる．ゆえに

     $$(x, y) \in B_{n_0} \times C_{m_0} \subset U \times V \subset W$$

     であり $B_{n_0} \times C_{m_0} \in \mathcal{B}$ なので $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基である．

2. 稠密

   $A \subset X$ について $\forall U \in \mathcal{O}(X); A \cap U \neq \emptyset$ と $X = \overline{A}$ が成り立つことは同値である．この条件が成り立つ集合を稠密集合という．

   同値性の証明 $\forall U \in \mathcal{O}(X); A \cap U \neq \emptyset$ が成り立つとする．$x \in X$ と $x \in U \subset \mathcal{O}(X)$ をとるとき $U \cap A \neq \emptyset$ なので $x \in \overline{A}$ である（5 月 26 日の講義メモの 5 参照）．ゆえに $X = \overline{A}$ が成り立つ．逆に $X = \overline{A}$ とし，$U \in \mathcal{O}(X)$ を空でない開集合とする． $x \in U$ について $x \in \overline{A}$ から $A \cap U \neq \emptyset$ である．

[*1] 有限個の合併になることもあるが，場合分けがわずらわしいので無限個の合併として記述した．有限個の場合は表記の仕方が変わるだけだ．

稠密集合の代表的な例としては $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ がある．$\mathbb{R}$ の空でない開集合 U は開区間を含むが，開区間の中には必ず有理数が属している．すなわち $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ である．

3. 可分

位相空間が可算稠密集合を持つとき可分であるという．

- 2 つの可分な位相空間の直積空間は可分である．（命題 3.27(1)）

  証明 A を X の可算稠密集合，B を Y の可算稠密集合とする．6 月 9 日のレポート課題 1 より

  $$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = X \times Y$$

  となるので $A \times B$ は $X \times Y$ の稠密集合である．

- 全射連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ について X が可分なら Y も可分である．特に可分な位相空間から作られる等化位相は可分である．（命題 3.27(2)）

  証明 A を X の稠密集合とする．$\forall V \in \mathcal{O}(Y), V \neq \emptyset$ について $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ であり，かつ全射なので $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である[*2]．よって A の稠密性から $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である．$x \in A \cap f^{-1}(V)$ をとれば $f(x) \in V$ であり，かつ $f(x) \in f(A)$ である．よって $f(A) \cap V \neq \emptyset$ であり $f(A)$ は Y の稠密集合である．A は可算なので $f(A)$ も可算であり Y は可分である．

4. 第 2 可算公理と可分の関係

- **命題** 第 2 可算公理を満たす位相空間は可分である．

  証明 $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を X の可算開基とし $B_n \neq \emptyset$ としておく．$x_n \in B_n$ をとり $A = \{x_n\}$ とおく．このとき A が稠密集合であることを示す．

  $U \in \mathcal{O}(X)$, $U \neq \emptyset$ をとる．$x \in U$ について $x \in B_{n_0} \subset U$ となる B_{n_0} をとる．$x_{n_0} \in B_{n_0} \cap A \subset U \cap A$ より $U \cap A \neq \emptyset$ なので A は稠密である．

- 距離により定めた位相についてはこの逆が成立する．（命題 3.28）

  証明 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を可算稠密集合とする．可算個の開集合の族

  $$\mathcal{B} = \{B_{1/m}(x_n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$$

  が開基になることを示す．U を X の空でない開集合とし $x \in X$ をとる．自然数 m_0 を $B_{1/m_0}(x) \subset U$ となるようにとる．A が稠密であることから，自然数 n_0 を $x_{n_0} \in B_{1/(2m_0)}(x) \cap A$ となるようにとる．

  $$y \in B_{1/(2m_0)}(x_{n_0}) \Longleftrightarrow d(x_{n_0}, y) \leqq \frac{1}{2m_0} \Longrightarrow d(x, y) \leqq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \frac{1}{2m_0} + \frac{1}{2m_0} = \frac{1}{m_0}$$

  より $y \in B_{1/m_0}(x) \subset U$ であり $B_{1/(2m_0)}(x_{n_0}) \subset U$ を得る．また $d(x, x_{n_0}) < 1/(2m_0)$ も成り立つので

  $$x \in B_{1/(2m_0)}(x_{n_0}) \subset U$$

  を得る．命題 3.13 より $\mathcal{B}$ は開基である．

5. $f : X \longrightarrow Y$ が連続であれば $B \subset Y$ について $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ が成り立つこと (演習)

演習の時間に扱った事項なので，いかに自然に証明ができるのかを理解するようにしてほしい．

- 包含関係の証明なので $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ を仮定して $x \in f^{-1}(\overline{B})$ を導く．
- いうべきことは $f(x) \in \overline{B}$ なので，5 月 26 日の講義メモの 5 を示すために $f(x) \in V$ を満たす開集合 $V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる．

[*2] 講義ではこのことに注意するのを忘れていました．補足しておきます．

- $x \in f^{-1}(V)$ と f の連続性より $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ なので，仮定 $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ から $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ が成り立つ．
- 命題 1.12 より $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(V \cap B) \neq \emptyset$ なので $V \cap B \neq \emptyset$ である．
- $f(x) \in \overline{B}$ となるので $x \in f^{-1}(\overline{B})$ が得られた．

6. $f : X \longrightarrow Y$ が開写像（すなわち，開集合の像が常に開集合になるような写像）とするとき，$A \subset X$ について $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$ が成り立つこと (演習)
   - $y \in f(A^\circ)$ をとる．$f(x) = y$ と $x \in A^\circ$ を満たす x が存在する．
   - $x \in A^\circ$ より開集合 $U \in \mathcal{O}(X)$ で $x \in U \subset A$ を満たすものが存在する．
   - f は開写像なので $f(U) \in \mathcal{O}(Y)$ である．また $y = f(x) \in f(U) \subset f(A)$ が成り立つ．
   - これは $y \in (f(A))^\circ$ を意味するので，$f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$ が成り立つ．

   今日，演習の時間に扱った 2 つの問題は，一瞬難しそうに見えるが，連続（開写像）の定義と内点触点の定義（5 月 26 日の講義メモ 4 と 5）を組み合わせるだけだ．証明の単純さを感じ取るようにしてほしい．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 $f : X \longrightarrow Y$ を連続とする．このとき $B \subset Y$ について $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ が成り立つことを示せ．

課題 2 $f : X \longrightarrow Y$ を閉写像とする（閉集合の像が常に閉集合になるような写像をいう）．このとき $A \subset X$ について $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ が成り立つことを示せ．

【ヒント】 どちらの問題も今日やった 2 つの命題と同じように証明できる．なお，「A の閉包とは A を含む最小の閉集合である」「A の内部とは A に含まれる最大の開集合である」という事実を使うと簡単に証明できるが，ここではこの講義メモに書いた証明の方針をまねて考えること．