

幾何概論 I のレポート課題 (6 月 16 日) の解答例とコメント

課題 1 $f: X \rightarrow Y$ を連続とする. このとき $B \subset Y$ について $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ が成り立つことを示せ.

【解答例】 $x \in f^{-1}(B^\circ)$ をとる. $f(x) \in B^\circ$ なので $V \in \mathcal{O}(Y)$ で $f(x) \in V \subset B$ を満たすものが存在する. $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(B)$ であり f の連続性から $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ なので $x \in (f^{-1}(B))^\circ$ である. よって $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ が成り立つ.

【コメント】 手ごろな問題なのでよくできていた. 特にコメントすべきことはない.

課題 2 $f: X \rightarrow Y$ を閉写像とする (閉集合の像が常に閉集合になるような写像をいう). このとき $A \subset X$ について $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ が成り立つことを示せ.

【解答例】 $y \in \overline{f(A)}$ をとり, $y \notin f(\overline{A})$ として矛盾を満ちびく. \overline{A} は閉集合であり, f は閉写像なので $f(\overline{A})$ は閉集合である. よってその補集合は開集合になる. $y \in (f(\overline{A}))^c \in \mathcal{O}(Y)$ と $y \in \overline{f(A)}$ より $f(A) \cap (f(\overline{A}))^c \neq \emptyset$ であるが $f(A) \subset f(\overline{A})$ より $(f(\overline{A}))^c \subset (f(A))^c$ なので $f(A) \cap (f(A))^c \neq \emptyset$ を得る. これは矛盾である. よって $y \in f(\overline{A})$ が成り立つ.

【コメント】

- 難しかったようだ. 閉写像という条件をどう使うかが課題だが, 背理法を使うことに気付かないとなかなかうまくいかない.
- $y \in \overline{f(A)}$ から $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$ を満たす V をとって $f^{-1}(y) \in f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ とする答案が目についたが f^{-1} は写像として定められているわけではないので $f^{-1}(y)$ という書き方は許されない. $f^{-1}(\{y\})$ とするとこれは集合なので $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V)$ と書かなくてはいけない. \in は使えない.
- 閉写像の定義は問題文中に記述しておいた. これを理解していない答案が目についた.