

## 幾何概論 I のレポート課題 (6 月 16 日) の解答例とコメント

課題 1  $f: X \rightarrow Y$  を連続とする. このとき  $B \subset Y$  について  $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$  が成り立つことを示せ.

【解答例】  $x \in f^{-1}(B^\circ)$  をとる.  $f(x) \in B^\circ$  なので  $V \in \mathcal{O}(Y)$  で  $f(x) \in V \subset B$  を満たすものが存在する.  $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(B)$  であり  $f$  の連続性から  $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$  なので  $x \in (f^{-1}(B))^\circ$  である. よって  $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$  が成り立つ.

【コメント】 手ごろな問題なのでよくできていた. 特にコメントすべきことはない.

課題 2  $f: X \rightarrow Y$  を閉写像とする (閉集合の像が常に閉集合になるような写像をいう). このとき  $A \subset X$  について  $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$  が成り立つことを示せ.

【解答例】  $y \in \overline{f(A)}$  をとり,  $y \notin f(\overline{A})$  として矛盾を満ちびく.  $\overline{A}$  は閉集合であり,  $f$  は閉写像なので  $f(\overline{A})$  は閉集合である. よってその補集合は開集合になる.  $y \in (f(\overline{A}))^c \in \mathcal{O}(Y)$  と  $y \in \overline{f(A)}$  より  $f(A) \cap (f(\overline{A}))^c \neq \emptyset$  であるが  $f(A) \subset f(\overline{A})$  より  $(f(\overline{A}))^c \subset (f(A))^c$  なので  $f(A) \cap (f(A))^c \neq \emptyset$  を得る. これは矛盾である. よって  $y \in f(\overline{A})$  が成り立つ.

【コメント】

- 難しかったようだ. 閉写像という条件をどう使うかが課題だが, 背理法を使うことに気付かないとなかなかうまくいかない.
- $y \in \overline{f(A)}$  から  $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$  を満たす  $V$  をとって  $f^{-1}(y) \in f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$  とする答案が目についたが  $f^{-1}$  は写像として定められているわけではないので  $f^{-1}(y)$  という書き方は許されない.  $f^{-1}(\{y\})$  とするとこれは集合なので  $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V)$  と書かなくてはいけない.  $\in$  は使えない.
- 閉写像の定義は問題文中に記述しておいた. これを理解していない答案が目についた.