幾何概論 I および同演習の講義メモ (6 月 23 日)

本日の講義の要点

1. 分離公理

   テキストにはハウスドルフしか記述しなかったが，分離公理には以下の 4 種類がある．

公理	分離の対象	分離の仕方
T_1	異なる 2 点 $p \neq q$	$\exists U \in \mathcal{O}(X); (p \in U,\ q \notin U)$
T_2	異なる 2 点 $p \neq q$	$\exists U, V \in \mathcal{O}(X); (p \in U,\ q \in V,\ U \cap V = \emptyset)$
T_3	点 p と閉集合 F，$p \notin F$	$\exists U, V \in \mathcal{O}(X); (p \in U,\ F \subset V,\ U \cap V = \emptyset)$
T_4	2 つの閉集合 F, G，　$F \cap G = \emptyset$	$\exists U, V \in \mathcal{O}(X); (F \subset U, G \subset V,\ U \cap V = \emptyset)$

   T_2 がハウスドルフの分離公理である．

2. 1 点のみの集合は閉集合になるか（命題 3.30）

   密着位相を考えれば 1 点のみの集合が閉集合とは必ずしも言えない．しかし，分離公理 T_1 を満たせば閉集合になる．テキストではハウスドルフ（T_2）で記述している．証明を記しておく．

   証明 $p \in X$ をとる． $X \setminus \{p\}$ が開集合であることを言えばよい．そこで $q \in X \setminus \{p\}$ をとれば $p \neq q$ である．そこで T_1 により $U \in \mathcal{O}(X)$ を $q \in U,\ p \notin U$ となるようにとる．$q \in U \subset X \setminus \{p\}$ より $q \in (X \setminus \{p\})^\circ$ となる．よって $X \setminus \{p\}$ は開集合である．

   T_2 を満たす位相空間をハウスドルフ空間という．T_3 と T_1 を満たす位相空間を正則空間という．正則空間はハウスドルフである．T_4 と T_1 を満たす位相空間を正規空間と呼ぶ．正規空間は正則空間である．

3. 分離公理の部分空間への伝播（定理 3.32）

   公理 T_1, T_2, T_3 については部分空間に伝播する．すなわち X が $T_i,\ i = 1, 2, 3$ を満たせばその部分空間 Y も $T_i,\ i = 1, 2, 3$ を満たす．T_1 と T_2 については易しいので講義では T_3 について証明した．

   証明 $p \in Y$ と Y の閉集合 F で $p \notin F$ を満たすものをとる．相対位相の定義から X の閉集合 G で $F = G \cap Y$ を満たすものが存在する．$p \notin F = G \cap Y$ と $p \in Y$ より $p \notin G$ なので X が T_3 を満たすことから $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X)$ で $p \in U_1,\ G \subset U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるように選ぶ．Y との共通部分をとれば

   $$p \in U_1 \cap Y,\ G \cap Y \subset U_1 \cap Y,\ (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \emptyset$$

   である．これは p と F が $U_1 \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ と $U_2 \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ で分離されることを意味する．

   T_4 については一般には伝播しない．Y の二つの閉集合 $F_1, F_2, F_1 \cap F_2 = \emptyset$ について，$F_1 = G_1 \cap Y,\ F_2 = G_2 \cap Y$ となるような X の閉集合 G_1, G_2 をとった時に，$G_1 \cap G_2 = \emptyset$ となる保証がないからだ．ただし，Y が X の閉集合のときには $F_i = G_i \cap Y$ が X の閉集合になるので $G_i = F_i$ として差支えないことになる．すなわち Y が閉部分空間の場合には X が T_4 を満たせば Y も T_4 を満たす．証明を考えてみよ．

4. 分離公理の直積空間への伝播（定理 3.32）

   T_1 と T_2 の公理が直積空間に伝播することは易しい．T_2 の場合が定理 3.32 でありこの証明を与えておく．

   命題 X, Y が T_2 を満たす時，$X \times Y$ も T_2 を満たす．

   証明 $X \times Y$ の異なる 2 点 $(p_1, q_1),\ (p_2, q_2)$ をとる．$p_1 \neq p_2$ のときは X が T_2 を満たすことから $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X)$ を $p_1 \in U_1,\ p_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるようにとれる．(p_1, q_1) と (p_2, q_2) は $U_1 \times Y$ と $U_2 \times Y$ で分離される．

$p_1 = p_2$ のときは $q_1 \neq q_2$ なので，q_1, q_2 を分離する開集合 $V_1, V_2 \in \mathcal{O}(Y)$ をとれば X と Y を入れ替えた形で全く同じ議論ができる．いずれにしても開集合で分離できるので T_2 を満たす．ハウスドルフである．

T_3 も伝播するがそれは後ほど．

5. 対角線集合が閉集合であることとハウスドルフ空間であることとの同値性（定理 3.31）

対角線集合とは $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ をいう．

証明 X がハウスドルフ空間であるとし，D^c が開集合であることを示す．$(p, q) \in D^c$ とは $p \neq q$ ということなので T_2 より $U, V \in \mathcal{O}(X)$ を $p \in U,\ q \in V,\ U \cap V = \emptyset$ となるようにとれる．$U \cap V = \emptyset$ より $U \times V \cap D = \emptyset$ である．よって $(p, q) \in U \cap V \subset D^c$ なので D^c は開集合である．よってその補集合 D は閉集合である．

6. 距離空間は正規空間である．すなわち T_1 と T_4 を満たす．（例 3.29）

T_1 については $d(p, q) = r$ とおき，$U = B_{r/2}(p)$ とおけばよい．

T_4 については距離空間 X の 2 つの閉集合 $F < G$ を $F \cap G = \emptyset$ となるようにとる．命題 2.44（証明は 5 月 12 日のレポート課題の解説を見よ．）より

$$g(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, G) + d(x, F)}$$

は X 上の連続関数になる．$F = g^{-1}(\{0\})$ と $G = g^{-1}(\{1\})$ より F と G は開集合 $U = g^{-1}((-\infty, 1/3))$ と $V = g^{-1}((2/3, \infty))$ で分離できる．

7. 分離公理 T_3 の言いかえ

命題 X が T_3 を満たすことと次の条件 T_3' が成り立つことは同値である．

$$(T_3') \qquad \forall p \in X,\ p \in \forall U \in \mathcal{O}(X); (\exists V \in \mathcal{O}(X); (p \in V \subset \overline{V} \subset U))$$

証明 X が T_3 を満たすとし，$p \in U \in \mathcal{O}(X)$ なる U をとる．U^c は閉集合であり，かつ $p \notin U^c$ なので開集合 $V,\ W$ で $p \in V,\ U^c \subset W,\ V \cap W = \emptyset$ を満たすものが存在する．$V \subset W^c$ と W^c が閉集合であることから $\overline{V} \subset W^c$ であり

$$p \in V \subset \overline{V} \subset W^c \subset U$$

が成り立つ．ゆえに T_3' が成り立つ．

逆に T_3' が成り立つとし $p \in X$ と $p \notin F$ を満たす閉集合 F をとる．$p \in F^c \in \mathcal{O}(X)$ より T_3' により $p \in V \subset \overline{V} \subset F^c$ を満たす V がとれる．$F \subset (\overline{V})^c \in \mathcal{O}(X)$ より，p と F は V と $(\overline{V})^c$ で分離される．よって T_3 が成り立つ．

この命題を利用して T_3 が直積空間に伝播することが示せるがこれはレポート課題にした．

8. (演習)T_1 を満たし T_2 を満たさない位相空間の例

X を無限集合とし $\mathcal{O}(X) = \{U \subset X \mid U^c \text{は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$ と定める．これはは位相空間であることを示せ．また T_1 を満たすことを示せ．

証明 (1) X の補集合は有限集合 (空集合) なので $X \in \mathcal{O}(X)$ である．また定義から $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$ である．

(2) 開集合の合併 $\bigcup U_\lambda$ を考える．$(U_\lambda)^c$ は有限集合または全体集合である．

$$\left(\bigcup U_\lambda\right)^c = \bigcap (U_\lambda)^c$$

であるが，これは有限集合または全体集合である，よって $\bigcup U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ が成り立つ．

(3) 有限個の開集合の共通部分を考える．

$$\left(\bigcap_{n=1}^{N} U_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{N} (U_n)^c$$

なのでこれは有限集合かまたは全体集合である．よって $\bigcap_{n=1}^{N} U_n$ も有限集合か全体集合であり $\mathcal{O}(X)$ に属する．以上から $\mathcal{O}(X)$ は開集合の公理を満たす．

T_1 を満たすことについては $U = X \setminus \{q\}$ とおけば $p \in U,\ q \notin U$ であり T_1 が成り立つ．

9. (演習)Y がハウスドルフであるとき，2 つの連続写像 $f, g : X \longrightarrow Y$ について $A = \{x | f(x) = g(x)\} \subset X$ は閉集合であることを示せ．

   A^c が開集合であることを示す．$p \in A^c$ をとる．
   - $p \notin A$ より $f(p) \neq g(p)$ である．
   - Y はハウスドルフなので $V_1, V_2 \in \mathcal{O}(Y)$ を $f(p) \in V_1,\ g(p) \in V_2,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となるようにとる．
   - $p \in f^{-1}(V_1) \in \mathcal{O}(X)$ と $p \in g^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}(X)$ より $U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ とおく．$p \in U \in \mathcal{O}(X)$ である．
   - $x \in U$ をとる．$x \in U \subset f^{-1}(V_1)$ より $f(x) \in V_1$ である．また $x \in U \subset g^{-1}(V_2)$ より $g(x) \in V_2$ である．$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ なので $f(x) \neq g(x)$ であり $x \notin A$ を得る．$x \in A^c$ であり $U \subset A^c$ が得られた．
   - A^c は開集合なので A は閉集合である．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 X, Y が T_3 を満たす時，直積空間 $X \times Y$ も T_3 を満たすことを示せ．

課題 2 無限集合 X の位相を「 $U \in \mathcal{O}(X) \iff U = \emptyset$ または U^cは有限集合」で定めるとき，$U, V\mathcal{O}(X)$ で $U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset$ ならば $U \cap V \neq \emptyset$ であることを示せ．

課題 3 Y がハウスドルフ空間であるとき，連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ についてそのグラフ $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ は閉集合であることを示せ．

【ヒント】課題 1 は今日の講義メモの 7 の T_3 の言いかえ T_3' を利用する．$(p, q) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ として，直積位相の定義および 6 月 9 日出題の課題 1 を利用する．

課題 2 は易しい．補集合をとって考えよ．

課題 3 は G^c が開集合であることを示す．$(x, y) \in G^c$ をとると $y \neq f(x) \in Y$ なので，ここに Y がハウスドルフであることを利用する．この問題は少しむずかしめだが考えてみてほしい．