

幾何概論 I のレポート課題 (6 月 23 日) の解答例とコメント

課題 1 X, Y が T_3 を満たす時, 直積空間 $X \times Y$ も T_3 を満たすことを示せ.

【解答例】 6 月 23 日の講義メモ 7 にある T_3 の言い換え T'_3 を利用して証明する. $(p, q) \in X \times Y$ と, それを含む開集合 $(p, q) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとる. 直積位相の定義により $(p, q) \in U \times V \subset W$ となる $U \in \mathcal{O}(X)$ と $V \in \mathcal{O}(Y)$ が存在する. $p \in U \in \mathcal{O}(X)$ と $q \in V \in \mathcal{O}(Y)$ なので, X, Y が T'_3 を満たすことを使えば

$$p \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset U, \quad q \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$$

を満たす $U_0 \in \mathcal{O}(X), V_0 \in \mathcal{O}(Y)$ がとれる. よって

$$(p, q) \in U_0 \times V_0 \subset \overline{U_0} \times \overline{V_0} \subset U \times V \subset W$$

である. ここで 6 月 9 日のレポート課題 1 より $\overline{U_0} \times \overline{V_0} = \overline{U_0 \times V_0}$ なので $X \times Y$ が T'_3 を満たすことが分かる. よって T_3 も満たす.

【コメント】

- $X \times Y$ が T'_3 を満たすことを示したいので, $(p, q) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ について $(p, q) \in W_0 \subset \overline{W_0} \subset W$ を満たす $W_0 \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をどうとるか具体的に示すのが課題である. 解答例では
 - $(p, q) \in U \times V \subset W$ を満たす $U \in \mathcal{O}(X), V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる (直積位相の定義).
 - $p \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset U, \quad q \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$ を満たす $U_0 \in \mathcal{O}(X), V_0 \in \mathcal{O}(Y)$ をとる. (X, Y が T'_3 を満たすこと)
 - $W_0 = U_0 \times V_0$ が求めるものである.
- 上の議論で W を直積 $U \times V$ とおいてはいけない. 特殊な W のみ考えたことになるからだ. しかし, 最後の W_0 は直積の形で良い. 存在を示すのだから一つの例を与えれば十分である.

課題 2 無限集合 X の位相を「 $U \in \mathcal{O}(X) \iff U = \emptyset$ または U^c は有限集合」で定めるとき, $U, V \in \mathcal{O}(X)$ で $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ ならば $U \cap V \neq \emptyset$ であることを示せ.

【解答例】 U, V はともに空集合ではないので $\mathcal{O}(X)$ に属することから U^c, V^c はともに有限集合である. よって $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ も有限集合である. X は無限集合なので $U \cap V$ は無限集合であり空集合ではない.

【コメント】

- この位相では空でない開集合の補集合は有限集合だ. このことに着目すれば証明は難しくない.

課題 3 Y がハウスドルフ空間であるとき, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ についてそのグラフ $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ は閉集合であることを示せ.

【解答例】 $(p, q) \in G^c$ をとる. $q \neq f(p)$ よりこの 2 点を開集合で分離する.

$$q \in V \in \mathcal{O}(Y), \quad f(p) \in W \in \mathcal{O}(Y), \quad V, W \in \mathcal{O}(Y), \quad V \cap W = \emptyset$$

次に $(x, y) \in f^{-1}(W) \times V \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとる.

$$f(x) \in W, \quad y \in V, \quad W \cap V = \emptyset$$

より $y \neq f(x)$ なので $(x, y) \in G^c$ であり $f^{-1}(W) \times V \subset G^c$ が成り立つ. $(p, q) \in f^{-1}(W) \times V$ から (p, q) は G^c の内点であり, G^c は開集合である. よって G は閉集合である.

【コメント】

- $f(x) \in W, y \in V, W \cap V = \emptyset$ より $y \neq f(x)$ を導くのがポイントだ. よく考えてみるように.