幾何概論 I および同演習の講義メモ (6 月 30 日)

本日の講義の要点

1. 連結性

   位相空間 X が連結であるとは，$X = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ U, V \in \mathcal{O}(X)$ ならば U, V の一方が全体集合（従って他方は空集合）になることだ（定義 3.12）．これに関してまず次の命題を紹介した．

   命題 位相空間 X について次の 3 つの主張は同値である．

   (1) X は連結である．

   (2) X の開集合かつ閉集合である部分集合は X と $\emptyset$ に限る．

   (3) X から離散空間 $\{1, 2\}$ への連続写像は定値写像に限る．

   証明「(1)$\Longrightarrow$(2)」U は閉集合かつ開集合であるとする．U^c も開集合なので $X = U \cup U^c,\ U \cap U^c = \emptyset$ より $U = X$ または $U = \emptyset$ である．

   「(2)$\Longrightarrow$(3)」離散空間においてはすべての集合が開集合かつ閉集合なので $U = f^{-1}(\{1\})$ も開集合かつ閉集合である．$U = X$ の場合は 1 に値をとる定値写像，$U = \emptyset$ の場合は 2 に値をとる定値写像である．

   「(3)$\Longrightarrow$(1)」 X の開集合 U, V で $X = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset$ を満たすものをとる．写像 $f : X \longrightarrow \{1, 2\}$ を

   $$x \in U \text{ について } f(x) = 1, \qquad x \in V \text{ について } f(x) = 2$$

   と定める．$f^{-1}(\{1, 2\}) = X,\ f^{-1}(\{1\}) = U,\ f^{-1}(\{2\}) = V\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ より離散空間 $\{1, 2\}$ の 4 つの開集合（4 つの部分集合）の逆像はすべて開集合なので f は連続である．(3) より f は定値写像になるが，これは $U = X,\ V = \emptyset$ または $U = \emptyset,\ V = X$ であることを意味する．

2. 連結集合の像の連結性

   位相空間 X の部分集合 A が連結であることの定義は定義 3.12 の後半に記述している．これについて定理 3.34 を紹介した．証明しておく．

   定理 3.34 の証明 A を X の連結集合とし，連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ による A の像を $f(A)$ とおく．連続写像 $g : f(A) \longrightarrow \{1, 2\}$ を考える．包含写像を $i : A \longrightarrow X$ とおけば $g \circ f \circ i : A \longrightarrow \{1, 2\}$ は連結空間からの連続写像なので定値写像である．仮に $g \circ f \circ i(x) = g(f(x)) = 1,\ x \in A$ とおけば，任意の $y \in f(A)$ について，$y = f(x),\ x \in A$ とかけるので $g(y) = g \circ f(x) = 1$ である．よって g は定値写像であり $f(A)$ は連結である．

   この事実の系として中間値の定理（系 3.35）が得られる．それには次を示せばよい．

   命題 B を $\mathbb{R}$ の連結集合とする．$a, b \in B,\ a < b$ ならば $[a, b] \subset B$ である．

   定理 3.34 から $f(A)$ は $\mathbb{R}$ の連結集合になるので，$f(a), f(b) \in f(A)\ f(a) < f(b)$ について $[f(a), f(b)] \subset f(A)$ となる．これを言い換えれば系 3.35 の主張になる．

   系 3.35 でさらに $X = \mathbb{R},\ A = [a, b]$ としたものが通常の中間値定理である．

3. 連結成分

   まず次の事実を示した．

   命題　$\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ を連結集合の族とする．$\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$ なら $A = \bigcup A_\lambda$ は連結である．

   この事実から $x \in X$ について，x を含む連結集合で最大のものが存在する．それを C_x と表し（x の属する）連結成分という．ここで $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ とすると，$C_x \cup C_y$ も連結集合になるが，C_x は x を含む最

大の連結集合なので $C_x = C_x \cup C_y$ である．同様に $C_y = X_x \cup C_y$ も成り立つので $C_x = C_y$ を得る．X の各点はただ一つの連結成分に属しており，X は連結成分の互いに交わらない合併集合になる．

4. 弧状連結性

   定義 3.13 に記述した．2 点が曲線で結べるという意味なので，直感的に理解しやすいだろう．この概念について弧状連結ならば連結であること（命題 3.36）を証明した．

   証明 X を弧状連結な位相空間とする．X の 2 つの開集合を $X = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset$ となるようにとる．ここで $U \neq \emptyset$ かつ $V \neq \emptyset$ とし $p \in U,\ q \in V$ をとる．X の弧状連結性から $C : [0,1] \longrightarrow X$ を $C(0) = p,\ C(1) = q$ ととる．$A = C^{-1}(U) \subset [0,1]$ とおく．また $\sup A = \alpha$ とおく．A は開集合なので $\alpha \notin A$ である．$[0,1] = C^{-1}(X) = C^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ なので $\alpha \in f^{-1}(V)$ だが，$f^{-1}(V)$ も開集合なので $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap [0,1] \subset C^{-1}(V)$ である．$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ なので，α の周りに $A = f^{-1}(U)$ の点はないことになり，$\alpha = \sup A$ に矛盾する．

   講義では $[0,1]$ の連結性に帰着させて証明したが，$\mathbb{R}$ の連結性を示すのに「弧状連結ならば連結」という事実を利用したので循環論法になってしまう．ここでは証明を上限を使ったものに修正している．

5. $\mathbb{R}$ の連結集合（演習）

   A を $\mathbb{R}$ の連結集合とし，$a, b \in A,\ A < b$ をとる．このとき $[a,b] \subset A$ が成り立つことについて考えてもらった．

   - 背理法を使って $[a,b] \not\subset A$ と仮定しよう．
   - $x \in [a,b]$ であっても $x \in A$ とは限らないという意味だから $x \in [a,b]$ で $x \notin A$ なるものをとる．
     集合の包含関係を要素によって書き直すことは基本である．このような言いかえができない人が多かったが，当たり前のことと実感できるまで考えてほしい．
   - $a, b \in A$ より $a < x < b$ である．$U = (-\infty, x),\ V = (x, \infty)$ とおく．
   - $A \subset U \cup V = \mathbb{R} \setminus \{x\},\ U \cap V = \emptyset,\ U, V \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ が成り立つので A の連結性から $A \subset U$ または $A \subset V$ が成り立つ．
   - $A \subset U$ は $b \in A,\ x < b$ に矛盾する．$A \subset V$ は $a \in A,\ a < x$ に矛盾する．
   - 背理法の仮定 $[a,b] \not\subset A$ は偽であり，$[a,b] \subset A$ が成り立つ．

6. 連結集合の閉包が連結であること（演習）

   A を連結集合とし，離散空間への連続写像 $f : \overline{A} \longrightarrow \{1,2\}$ を考える．A は連結なので f は A 上定値写像でありその値を 1 としておく．$x \in \overline{A} \setminus A$ について $f(x) = 2$ だったとして矛盾を導こう．

   - $\{2\}$ は開集合なので $U = f^{-1}(\{2\}) \in \mathcal{O}(X)$ である．
   - $x \in U$ と $x \in \overline{A}$ から $A \cap U \neq \emptyset$ である．
   - $y \in A \cap U$ をとると $y \in A$ より $f(y) = 1$ である．また $y \in U = f^{-1}(\{2\})$ より $f(y) = 2$ である．これは矛盾である．

   よって $x \in \overline{A} \setminus A$ についても $f(x) = 1$ であり，f は 1 に値をとる定値写像である．よって $\overline{A}$ は連結である．

7. 連結性の伝播（演習）

   連結空間の部分空間が連結とは限らないことは少し考えれば簡単に分かるはずだ．連結空間からの全射によって作られる等化空間が連結になることは連結集合の連続写像による像が連結であることからすぐに分かる．連結空間の直積空間が連結になることについてはレポート課題にした．

8. $\mathbb{R}$ の連結性（演習）

   $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ について $C(t) = (1-t)a + tb$ とおいてみれば弧状連結であることは簡単に分かる．直感

的にも明らかだろう．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 連結成分は閉集合であることを示せ．また連結成分の個数が有限個のとき，連結成分は開集合かつ閉集合であることを示せ.

課題 2 2 つの連結空間の直積空間は連結であることを示せ.

【ヒント】 課題 1 は今回の講義メモの 6 を使うと良い．簡単だ．課題 2 は直積空間から離散空間 $\{1,2\}$ への連続写像を考えてみること．$X\times\{y\}$ が $X\times Y$ の連結集合であることを利用する．