幾何概論 I のレポート課題 (6 月 30 日) の解答例とコメント

課題 1 連結成分は閉集合であることを示せ．また連結成分の個数が有限個のとき，連結成分は開集合かつ閉集合であることを示せ．

【解答例】 C_x を x の属する連結成分とする．$\overline{C_x}$ も x を含む連結集合なので（6 月 23 日の講義メモ 6）連結成分の定義から $C_x \supset \overline{C_x}$ である．ゆえに $C_x = \overline{C_x}$ であり C_x は閉集合である．

次に連結成分の個数が有限個だとして，C_x の補集合を考える，X は連結成分の互いに交わらない合併集合なので C_x の補集合は C_x 以外の連結成分の合併である．連結成分は閉集合なので，その有限個の合併も閉集合であり，その補集合 C_x は開集合になる．よって C_x は開集合かつ閉集合である．

【コメント】

- 前半は連結集合の閉包が連結であることを使えば簡単だ．後半も X が連結成分の互いに交わらない合併になることを使えば簡単に示せる．問題を考えるときは，講義で扱った事実を確認することから始めてほしい．
- 連結成分が無限に多くある場合には連結成分が開集合になるとは限らない．例えば $X \subset \mathbb{R}$ を

$$X = \{0\} \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right] \right)$$

とすれば $C_0 = \{0\}$ は開集合ではない．

課題 2 2 つの連結空間の直積空間は連結であることを示せ．

【解答例】 X, Y を連結な位相空間とする．$b \in Y$ について $f : X \longrightarrow X \times Y$ を $f(x) = (x, b)$ で定めるとき，$p_X \circ f : X \longrightarrow X$ は恒等写像，$p_Y \circ f : X \longrightarrow Y$ は b への定値写像なので連続である．よって f は連続である．X が連結であることと，連結集合の連続写像による像が連結であることから，$f(X) = X \times \{b\} \subset X \times Y$ は連結である．同様に $\{a\} \times Y$ も連結である．

離散空間への連続写像 $g : X \times Y \longrightarrow \{1, 2\}$ を考える．$X \times \{b\}$ は連結なので g は $X \times \{b\}$ 上で定値写像である．よって $g(x, b) = g(a, b)$ である．同様に g は $\{x\} \times Y$ 上定値写像なので $g(x, b) = g(x, y)$ である．ゆえに $g(x, y) = g(a, b)$ がすべての $(x, y) \in X \times Y$ について成り立つので g は $X \times Y$ 上の定値写像になる．よって $X \times Y$ は連結である．【コメント】

- 離散空間 $\{1, 2\}$ への連続写像を利用すると比較的簡単に証明できる．なお解答例では $\{a\} \times Y$ の連結性の証明も含めたので若干長くなっている．