幾何概論 I および同演習の講義メモ (7 月 7 日)

本日の講義の要点

1. コンパクト性
   定義 3.14 に，開被覆とコンパクト集合，コンパクト位相空間の定義がある．密着位相と離散位相においてコンパクト集合が何を意味するかを例 3.38 で与えた．
2. ハウスドルフ空間のコンパクト集合が閉集合であること（命題 3.39）
   証明 K を X のコンパクト集合とし，$p \in K^c$ をとる．各 $x \in K$ について $x \neq p$ でなのでハウスドルフを使って
   $$U_x,\ V_x \in \mathcal{O}(x), \quad p \in U_x, \quad x \in V_x, \quad U_x \cap V_x = \emptyset$$
   を満たす $U_x,\ V_x$ をとる．$x \in V_x$ より $\{V_x,\ x \in K\}$ は K の開被覆である．よって K のコンパクト性から有限個の x をとって
   $$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{x_k}$$
   とできる．ここで $U = \bigcap_{k=1}^{N} U_{x_k}$ とおく．U は開集合の有限個の共通部分なので開集合である．またすべての x について $p \in U_x$ なので $x \in U$ である．
   $$U \cap K \subset U \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} V_{x_k} \right) = \bigcup_{k=1}^{N} (U \cap V_{x_k}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \cap V_{x_k} = \bigcup_{k=1}^{N} \emptyset = \emptyset$$
   より $U \subset K^c$ である．よって p は K^c の内点であり，K^c は開集合である．ゆえに K は閉集合である．
3. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトであること（命題 3.42）
   閉集合とコンパクト集合の関係を整理しておこう．
   証明　X をコンパクト空間とし，A をその閉集合とする．$\{U_\lambda\}$ を A の開被覆とすれば $\bigcup U_\lambda \supset A$ なので $\{U_\lambda\} \cup A^c$ は X の開被覆になる．よって有限部分被覆 $\{U_{\lambda_j}\} \cup A^c$ が存在する．
   $$A = A \cap X = A \cap \left(A^c \cap \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \right) = (A \cap A^c) \cup \left(A \cap \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \right) = A \cap \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j}$$
   より $A \subset \bigcup_j U_{\lambda_j}$ なので A の有限部分被覆が取れる．ゆえに A はコンパクトである．

   .
4. 距離空間のコンパクト集合は有界閉集合であること
   証明 K を距離空間 X のコンパクト集合とする．$a \in X$ を一つ取れば
   $$K \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$$
   なので $\{B_n(a),\ n \in \mathbb{N}\}$ は K の開被覆になる．ゆえに K は有限個の $B_n(a)$ で覆えるが，有限個の n の最大を N とすれば $K \subset B_N(a)$ を得る．よって K は有界である．
   $a \in K^c$ をとる．$U_n = \{x \mid d(x,a) > 1/n\}$ とおけば $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \{a\} \supset K$ である．K はコンパクトなので有限個の U_n で K を覆うことができる．その有限個の n の最大を N とすれば $K \subset U_N$ である．よって $B_{1/N}(a) \subset K^c$ であり a は K^c の内点になる．任意の点が内点になるので K^c は開集合であり，K は閉集合となる．

この命題から点列コンパクトとコンパクトはよく似た概念であることが分かる．このことについては次回扱う．

5. コンパクト集合の連続写像による像がコンパクトになること (定理 3.41)

   証明 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ とコンパクト集合 $K \subset X$ をとる．$\{V_\lambda\}$ を $f(K)$ の開被覆とする．

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_\lambda V_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

   なので $f^{-1}(V_\lambda) \in \mathcal{O}(X)$ より $\{f^{-1}(V_\lambda)\}$ は K の開被覆になる．よって K のコンパクト性から

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(V_{\lambda_j})$$

   となるように $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ がとれる．

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(V_{\lambda_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{N} f(f^{-1}(V_{\lambda_j})) \subset \bigcup_{j=1}^{N} V_{\lambda_j}$$

   となり有限部分被覆が取れたので $f(K)$ はコンパクトである．

   この命題からコンパクト空間から作られる等化空間はコンパクトである．

6. コンパクト集合上の連続関数が最大値および最小値を持つこと

   証明連続関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ と X のコンパクト集合 K について $f(K)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．これは有界なので上限，下限を持ち，閉集合なので上限下限は最大最小である．よって f は最大値および最小値を持つ．

7. コンパクト集合の直積がコンパクトになること (命題 3.40)

   この命題の証明は難しい．証明の細部ではなく，証明の基本的な考え方を読み取るようにしてほしい．有限個のものを有限個集めてもやはり有限個だということだ．

   証明 $A \times B$ の開被覆 $\{W_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ をとる．各 $(x, y) \in A \times B$ について $(x, y) \in W_\lambda$ となる W_λ を 1 つ取り，直積位相の定義から

$$(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subset W_\lambda, \qquad U_{x,y} \in \mathcal{O}(X),\ V_{x,y} \in \mathcal{O}(Y)$$

   をとる．各 x について $\{V_{x,y}, y \in B\}$ は B の開被覆なので B のコンパクト性から有限個の y_{xj} をとって $B \subset \bigcup_j V_{x,y_{xj}}$ とできる．ここで $U_x = \bigcap_j U_{x,y_{xj}}$ とおけば，これは x を含む X の開集合である．ゆえに $\{U_x,\ x \in A\}$ は A の開被覆であり，A のコンパクト性から有限個の x_i をとって $A \subset \bigcup_i U_{x_i}$ とできる．

$$A \times B \subset \left(\bigcup_i U_{x_i}\right) \times B = \bigcup_i (U_{x_i} \times B) \subset \bigcup_i U_{x_i} \times \left(\bigcup_j V_{x_i, y_{x_i j}}\right) = \bigcup_{ij} U_{x_i} \times V_{x_i, y_{x_i j}} \subset \bigcup_{ij} U_{x_i . y_{x_i j}} \times V_{x_i, y_{x_i j}}$$

   となり，$A \times B$ は有限個の $U_{x,y} \times V_{x,y}$ で覆うことができる．これらの集合についてそれを含む W_λ を一つ取れば，$A \times B$ を有限個の W_λ で多くことができる．よって $A \times B$ はコンパクトである．

8. コンパクト集合の合併がコンパクトになること（演習）

   証明 K, H を X のコンパクト集合とし，$\{U_\lambda\}$ を $K \cup H$ の開被覆とする．$\{U_\lambda\}$ は K の開被覆でもあるので，K を有限個の U_λ で覆うことができる．同様に H も有限個の U_λ で覆うことができる．二組の有限個の U_λ を寄せ集めれば $K \cup H$ の有限部分被覆が得られる．

9. コンパクトハウスドルフ空間は分離公理 T_3 を満たすこと（演習）

証明 K を X の閉集合とし，$p \notin K$ を一つ取る．X はコンパクトなので K はコンパクト集合である．$x \in K$ についてハウスドルフ性より $U_x, V_x \in \mathcal{O}(X)$ を $x \in U_x$, $p \in V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$ となるようにとる．$\{U_x,\ x \in K\}$ は K の開被覆なので，コンパクトであることから有限個の $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ をとって $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} = U \in \mathcal{O}(X)$ とできる．このとき $p \in \bigcap_{j=1}^N V_{x_j} = V \in \mathcal{O}(x)$ であり

$$U \cap V = \left(\bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \right) \cap V = \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \cap V \subset \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \cap V_{x_j} = \emptyset$$

が成り立つので p と K が開集合で分離できた．

同様な議論を繰り返せば T_4 も示せる．これについてはレポート課題にする．

10. コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な全単射について，逆写像が連続になること．（演習）

証明 全単射連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ について X はコンパクト，Y はハウスドルフとする．逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ の連続性を示すために X の閉集合 F をとる．X はコンパクトなので F は X のコンパクト集合である．F の f^{-1} による逆像は f による像に他ならないが f の連続性から $f(F)$ は Y のコンパクト集合になる．Y はハウスドルフなので $f(F)$ は閉集合である．結局，閉集合 F の f^{-1} による逆像は閉集合になるので f^{-1} は連続である．

このように連続な全単射で逆も連続な時，同相写像という．なお，連続な全単射だが逆は連続にならない例として

$$f : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \qquad f(t) = e^{it}$$

をあげておく．逆写像は $1 \in S^1$ で連続ではない．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 ハウスドルフ空間において，2 つのコンパクト集合の共通部分はコンパクトになることを示せ．
課題 2 コンパクトハウスドルフ空間は分離公理 T_4 を満たすことを示せ．

【ヒント】 課題 1 はコンパクト集合が閉集合，したがってその補集合は開集合になることを利用する．課題 2 は講義メモの 2 と 9 で行った議論を使う．