幾何概論 I のレポート課題 (7 月 7 日) の解答例とコメント

課題 1 ハウスドルフ空間において，2 つのコンパクト集合の共通部分はコンパクトになることを示せ．

【解答例】 K, H をハウスドルフ空間 X のコンパクト集合とする．$K \cap H$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる．H はハウスドルフ空間のコンパクト集合なので閉集合である．ゆえに $K^c \in \mathcal{O}(X)$ である．

$$K \subset K \cup H^c = (K \cap H) \cup H^c \subset \left(\bigcup_{\lambda} U_\lambda \right) \cup H^c$$

より $\{U_\lambda\} \cup \{H^c\}$ は K の開被覆になる．よって K がコンパクトであることから有限個の λ を選んで

$$K \subset \left(\bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} \right) \cup H^c$$

とできる．ゆえに

$$K \cap H \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j}$$

であり $K \cap H$ はコンパクトである．

【コメント】

- 証明において H は閉集合であることしか使われていない．ハウスドルフ空間においてはコンパクト集合と閉集合の共通部分はコンパクトである．
- $K \cap H$ のコンパクト性を示すのだからまず $K \cap H$ の開被覆をとること．問題はこの開被覆が K, H の開被覆になっていないことだ．解答例では H^c を付け加えることによって K の開被覆を作っている．自然な発想だと思うのだが如何だろうか．

課題 2 コンパクトハウスドルフ空間は分離公理 T_4 を満たすことを示せ．

【解答例】 X をコンパクトハウスドルフ空間とし，X の空でない閉集合 F, G を $F \cap G = \emptyset$ となるようにとる．X はハウスドルフなので F, G は閉集合である．またコンパクトハウスドルフなので分離公理 T_3 を満たす．そこで，$x \in F$ について

$$x \in U_x,\ G \subset V_x,\ U_x \cap V_x = \emptyset,\ U_x \in \mathcal{O}(X),\ V_v \in \mathcal{O}(X)$$

となる U_x, V_x をとる．$\{U_x \mid x \in F\}$ は F の開被覆なので F のコンパクト性から $x_1, x_2, \ldots, x_N$ を

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}$$

が成り立つようにとる．そして

$$U = \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}, \qquad V = \bigcap_{j=1}^{N} V_{x_j}$$

とおく．これは開集合であり $F \subset U,\ G \subset V$ を満たす．また

$$U \cap V = \bigcup_{j=1}^{N} \left(U_{x_j} \cap V \right) \subset \bigcup_{j=1}^{N} (U_{x_j} \cap V_{x_j}) = \emptyset$$

であり T_4 が成り立つことが分かる．

【コメント】

- 添え字に λ を使っている場合は添え字は単なる記号であって意味はない．しかし，この証明においては添え字は $x \in F$ にしている．意味を与えるときはそれを明示しなくては議論にならない．
- 仮定はハウスドルフだが，T_3 が成り立つことまでは講義で示したので，T_3 を使って記述する．$x \in F,\ y \in G$ ととってハウスドルフ性を使うと $x \in U_x,\ y \in V_y$ とは書けない．x, y を分離する開集合は x, y の両方によって決まるからだ．