幾何概論 I および同演習の講義メモ (7 月 14 日)

本日の講義の要点

1. 距離空間のコンパクト集合は点列コンパクトであること．
   (X, d) を距離空間とする．点列 $\{a_n\}$ について

   定義 p が $\{a_n\}$ の集積点であるとは次が成り立つことを言う．

   $$\forall r > 0;\ (\{n \mid d(a_n, p) < r\} \text{ は無限集合})$$

   集積点について次の命題を示した．

   命題 $\{a_n\}$ が p に収束する部分列を持つことと p が $\{a_n\}$ の集積点であることは同値である．

   証明 $\{a_n\}$ が p に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を持てば，$\forall r > 0$ について

   $$\exists K \in \mathbb{N};\ (k \geqq K \Longrightarrow d(a_{n_k}, p) < r)$$

   となるがこれは $\{n \mid d(a_n, p) < r\} \supset \{n_K, n_{K+1}, n_{K+2}, \ldots\}$ を意味する．右辺は無限集合なので p は $\{a_n\}$ の集積点である．

   逆に p が $\{a_n\}$ の集積点であるとし，$n_1 \in \{n \mid d(a_n, p) < 1\}$ をとる．以下帰納的に n_{k-1} が定まった時に

   $$n_k \in \{n \mid d(a_n, p) < 1/k\}, \qquad n_k > n_{k-1}$$

   と n_k をとる．無限集合なのでこのような n_k は必ず取ることができる．こうしてとった n_k について $\{a_{n_k}\}$ は $d(a_{n_k}, p) < 1/k$ なので p に収束する部分列である．

   集積点を使えば，K が点列コンパクトであるとは K の点列が K に集積点を持つといいなおすことができる．ゆえに点列コンパクトであることを示すには K に集積点が存在しないとして矛盾を導けばよい．

   $x \in K$ は集積点ではないので $r_x > 0$ を $\{n \mid d(a_n, x)\}$ が有限集合であるようにとれる．$\{B_{r_x}(x) \mid x \in K\}$ は K の開被覆なので，K がコンパクトであることから有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ を選んで

   $$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{r_{x_j}}(x_j)$$

   となるようにとれる．ところが右辺の要素となる a_n は有限集合の有限個の集まりなので有限個しかない．これは $\{a_n\}$ が K の点列であることに矛盾する．

2. 点列コンパクト距離空間は全有界であること．
   距離空間 X の部分集合 K が全有界とは $\forall r > 0$ について $x_1, x_2, \ldots, x_N \in K$ をとって $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_r(x_j)$ が成り立つようにできることを言う．ここでは，点列コンパクト集合が全有界であることを示す．

   証明 K が全有界でなかったとしよう．すなわち有限個の $B_r(x)$ で K を覆えないような $r > 0$ が存在したとする．$a_1 \in K$ をとり，以下帰納的に

   $$a_n = K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_r(a_j) \right)$$

   をとる．背理法の仮定により右辺の集合は空集合ではないので，すべての n について $a_n \in K$ を取ることができる．点列 $\{a_n\}$ は任意の m, n について $d(a_n, a_m) \geqq r$ となる．ゆえにその任意の部分列も同じ条件を満たすので収束しえない．ゆえに $\{a_n\}$ は収束する部分列を持たず K は点列コンパクトではない．

3. 距離空間の部分集合 K が全有界であれば，K は部分空間として可分である．

   証明 K を全有界なとし，自然数 n について K を有限個の半径 $1/n$ の球で覆う．その中心を $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,N_n}$ とおく．このとき

   $$A = \{x_{n,j_n} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leqq j_n \leqq N_n\} \subset K$$

   とおくと，これは有限集合の可算個の合併なので可算集合である．

   次に $K \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ としそこから $x \in K \setminus \overline{A}$ をとる．$r > 0$ を $B_r(x) \cap A = \emptyset$ となるようにとれる．$r > 1/n$ と自然数 n を選べば $K \subset \bigcup_j B_{1/n}(x_{n,j_n})$ より $x \in B_{1/n}(x_{n,k})$ を満たす k が存在する．$x_{n,k} \in A$ であり $x_{n,k} \in B_{1/n}(x) \subset B_r(x)$ なのでこれは $x \notin \overline{A}$ に矛盾する．

   K は部分空間として可算稠密集合を持つので可分である．また距離空間においては可分ならば第二可算公理を満たす（命題 3.28 6 月 16 日の講義メモ 4）．よって K は第二可算公理を満たす．

4. 位相空間が第二可算公理を満たせば，任意の開被覆に可算部分被覆が存在する．

   $\mathcal{B} = \{B_n, \mid n \in \mathbb{N}\}$ を K の可算開基とする．また K の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる．$x \in K$ について $x \in U_\lambda$ となる λ を一つ取り λ_x とおく．また $x \in B_n \subset U_{\lambda_x}$ となる n を一つ取り $n_x \in \mathbb{N}$ とおく．n_x と表せる自然数全体の集合を M とし，各 $n \in M$ について $n = n_x$ となる x を一つ取る．この x について $x \in B_n = B_{n_x} \subset U_{\lambda_x}$ となる λ_x を λ_n とおく．

   $$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{n_x} = \bigcup_{n \in M} B_n \subset \bigcup_{n \in M} U_{\lambda_n}$$

   となる．$\{U_{\lambda_n}, \mid n \in M\}$ は $\{U_\lambda\}$ の可算部分被覆である．

5. 点列コンパクト集合はコンパクトである．

   $\{U_\lambda\}$ を点列コンパクト集合 K の開被覆とし，その可算部分被覆 $\{U_{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ をとる．すべての自然数 n について $K \not\subset \bigcup_{m=1}^{n} U_{\lambda_m}$ が成り立つとする．$a_n \in K \setminus \bigcup_{m=1}^{n} U_{\lambda_m}$ をとる．K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を持つ．その極限を $p \in K$ とおく．

   $p \in K$ より $p \in U_{\lambda_m}$ となる m が存在する．一方，$\{a_n\}$ の取り方から $n > m$ について $a_n \notin U_{\lambda_m}$ である．U_{λ_m} は開集合なので $r > 0$ を $B_r(p) \subset U_{\lambda_m}$ となるようにとる．$n > m$ について $a_n \notin B_r(p)$ なので $d(a_n, p) \geqq r$ であり，$\{n \mid d(a_n, p) < r\}$ は m 以下の自然数のみからなるので有限集合である．p は集積点ではなく，p に収束する部分列が存在することに矛盾する．

   以上から $K \subset \bigcup_{m=1}^{n} U_{\lambda_m}$ となる n が存在する．すなわち有限部分被覆が取れたので K はコンパクトである．

今日の講義では距離空間においてコンパクト性と点列コンパクト性が同値であることを示した．証明は難しいので理解できなくても仕方がないが，基本的な事実なのでじっくり考えてみてほしい．来週は試験を行う．今日の講義で扱ったことは試験範囲に含めないので，前回までの内容をきちんと学習しておいてほしい．なお，試験問題には基本的な定義等は明記しておく．丸暗記をする必要はない．定義が何かをきちんと考えてくることは必要だ．数学の勉強は覚えることではないことに留意せよ．