「幾何概論 I」第 1 回試験（6 月 2 日実施）解答例とコメント

各問に 10 点の 80 点満点で採点した．最高は 80 点，最低は 0 点 (3 人)，平均は 39.66 点だった．30 点未満の 17 人を不合格とする．不合格者が 2 回目の試験に合格できなかった場合は再試験の対象にならない．意識して後半の学習を進めてほしい．

問 1 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と Y の部分集合の族 $\{V_\lambda \subset Y \mid \lambda \in \Lambda\}$ について $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ が成り立つことを示せ．

【解答例】$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right)$ をとる．逆像の定義から $f(x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ である．合併の定義から $f(x) \in V_\lambda$ となる λ が存在するのでそのようなものを一つ取り λ_0 とおく．$f(x) \in V_{\lambda_0}$ であり $x \in f^{-1}(V_{\lambda_0})$ を得る．よって $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ となるので $\subset$ が成り立つ．

逆については $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ をとる．合併の定義から $x \in f^{-1}(V_{\lambda_0})$ となる $\lambda_0 \in \Lambda$ がとれる．逆像の定義から $f(x) \in V_{\lambda_0}$ であり，$f(x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ をえる．ゆえに $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right)$ であり $\supset$ も成立する．

【コメント】

- 合併の定義をきちんと理解しておくこと．合併とはどれかの集合に入っている要素の集まりなので $\exists\lambda \in \Lambda;\ x \in V_\lambda$ とすればよい．
- V_λ と書いているのに V_1 などと自然数を添え字に書き直す人がいるが，添え字は自然数とは限らないので注意せよ．

問 2 集合 X 上の実数値有界関数全体の集合 $B(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists K; |f(x)| \leqq K\}$ において $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\,|x \in X\}$ は $B(X)$ 上の距離を定めることを示せ．

【解答例】 絶対値は 0 以上なので $d(f,g) \geqq 0$ である．また $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ より $d(f,g) = d(g,f)$ も成り立つ．さて，$d(f,g) = 0$ とする．

$$0 \leqq |f(x) - g(x)| \leqq \sup|f(x) - g(x)| = d(f,g) = 0$$

より，任意の $x \in X$ について $|f(x) - g(x)| = 0$ である．ゆえに $f(x) = g(x)$ であり $f = g$ を得る．最後に三角不等式を示す．$x \in X$ について

$$|f(x) - h(x)| \leqq |f(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leqq \sup\{|f(x) - g(x)|\} + \sup\{|g(x) - h(x)|\} = d(f,g) + d(g,h)$$

が成り立つがこれは $d(f,g) + d(g,h)$ が $\{|f(x) - h(x)|\}$ の上界であることを意味している．ゆえに $d(f,h) \leqq d(f,g) + d(g,h)$ が成り立つ．

【コメント】

- 上限を使った等式（不等式）の処理を気楽にやる人が多いが感心しない．正しい処理なので間違いにはしていないが，少なくとも成り立つ理由をすぐに答えられなくてはいけない．例えば $\sup(f(x) + g(x)) \leqq \sup f(x) + \sup g(x)$ は成り立つが $=$ にはならない．解答例はそのような曖昧な処理は一切行っていない．味わってみよ．

問 3 距離空間 (X, d) の部分集合 $A \subset X$ について $p \in X$ が A の触点であるとは，任意の $r > 0$ について $A \cap B_r(p) \neq \emptyset$ が成り立つことを言う．p が A の触点であることと A の点列 $\{a_n\}$ で p に収束するものが存在することとは同値であることを示せ．

【解答例】 p が A の触点であるとする．自然数 n について $A \cap B_{1/n}(p) \neq \emptyset$ なので， $a_n \in A \cap B_{1/n}(p)$ をとる．$a_n \in A$ と $d(a_n, p) \leqq 1/n$ より $\{a_n\}$ は p に収束する A の点列である．

逆に p に収束する A の点列 $\{a_n\}$ が存在したとする．任意の $r > 0$ について n を十分大きく取れば $d(a_n, p) < r$ となる．$a_n \in A \cap B_r(p)$ であり $A \cap B_r(p) \neq \emptyset$ を得る．よって p は A の触点である．

【コメント】

- p に収束する点列の存在を示すには，それを具体的にどう作るのかがポイントになる．解答例の構成の仕方は集積点に収束する点列を作る際に使った議論であり，よく使われる議論なのできちんと考えておくこと．
- 逆を背理法で示そうとする人が多いが解答例のように素直な証明のほうが分かりやすいと思う．論理は仮定から順に展開していくのが基本だということを忘れないでほしい．

問 4 集合 A の内点全体の集合を内部と呼び A° と表す．$(A^\circ)^\circ = A^\circ$ を示せ．

【解答例】 内点の定義から A° の内点は A° の点なので $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$ が成り立つ．ゆえにこの等式を示すには $\supset$ が成り立つことを示せばよい．そこで $x \in A^\circ$ をとる．

$r > 0$ を $B_r(x) \subset A$ が成り立つようにとる．また $y \in B_r(x)$ をとる．$s = r - d(x, y) > 0$ とおき $z \in B_s(y)$ をとれば

$$d(z, x) \leqq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r$$

となるので $z \in B_r(x)$ である．よって $B_s(y) \subset B_r(x) \subset A$ であり $y \in B_r(x)$ は A の内点である．よって $B_r(x) \subset A^\circ$ であり x は A° の内点である．すなわち $x \in (A^\circ)^\circ$ が成り立つ．

【コメント】

- 三角不等式を利用して証明した．距離空間では基本的な考え方だ．
- $A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$ を使うと証明は簡単になる．$B_r(x) \subset A$ から $B_r(x)^\circ \subset A^\circ$ が得られること，$B_r(x)$ は開集合なので $B_r(x)^\circ = B_r(x)$ であることを組み合わせれば $B_r(x) \subset A^\circ$ を得る．なお，$B_r(x)$ が開集合であることの証明に解答例のような三角不等式を利用した議論を使う．

問 5 収束する点列は Cauchy 列であることを示せ．

【解答例】 収束する点列を $\{a_n\}$ とおきその極限を p とおく．$\forall \varepsilon > 0$ について

$$n \geqq N \Longrightarrow d(a_n, p) < \varepsilon/2$$

となるように自然数 N をとる．$n, m \geqq N$ について

$$d(a_n, a_m) \leqq d(a_n, p) + d(p, a_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つので $\{a_n\}$ は Cauchy 列である．

【コメント】

- $n \geqq N_1 \Longrightarrow d(a_n, p) < \varepsilon$，$m \geqq N_2 \Longrightarrow d(a_m, p) < \varepsilon$ と N_1, N_2 をとった答案が目立ったが，N は点列に対して定めるもので，添え字を n, m のどの文字を使うかで変わるものではない．間違いとは言えないが理解不足を露呈した解答といえる．点列が異なるときは分けて定める必要がある．
- $d(a_n, p) < \varepsilon$ で $p = a_m$ とおくという答案も多かった．p は点列の極限であり a_m とおけるはずがない．全く無意味な解答である．
- Cauchy 列なので $|a_n - a_m|$ というような差の絶対値として表す答案もあったが，距離空間を扱っているので間違いである．減点した．
- 解答例では極限の定義式を補正して $< \varepsilon/2$ とし，最後が $< \varepsilon$ となるようにした．このような補正をせずに $d(a_n, a_m) < 2\varepsilon$ という不等式になっても何の問題もない．右辺がいくらでも小さくなれることが重要だ．

問 6 2 つの完備距離空間の直積空間は完備であることを示せ．

【解答例】 $X \times Y$ の Cauchy 列 $\{a_n, b_n\}$ をとる．直積距離の定義から

$$d_X(a_n, a_m) \leqq \sqrt{(d_X(a_n, a_m))^2 + (d_Y(b_n, b_m))^2} = d_{X \times Y}((a_n, b_n), (a_m, b_m))$$

であり $\{a_n\}$ は X の Cauchy 列である．同様に $\{b_n\}$ は Y の Cauchy 列である．

X, Y の完備性により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束するのでその極限を p, q とする．

$$0 \leqq d_{X \times Y}((a_n, b_n), (p.q)) \leqq d_X(a_n, p) + d_Y(b_n, q)$$

より右辺は 0 に収束するので左辺も 0 に収束する．よって $\{(a_n, b_n)\}$ は (p, q) に収束するので $X \times Y$ も完備である．

【コメント】

- 完備であるとは Cauchy 列が収束することを言う．この問題は $X \times Y$ が完備であることを示すのだから，まず $X \times Y$ の Cauchy 列をとらなくてはならない．X, Y の Cauchy 列から始めても証明はできない．点列すらとっていない答案は完備性を知らないということだ．
- 距離の不等式はこの証明で本質的だ．これを書かずに $\{(a_n, b_n)\}$ が $X \times Y$ の Cauchy 列だから $\{a_n\}$ は X の Cauchy 列と主張しても正解にはならない．証明を事細かに記述する必要はないが，肝心な部分は落としてはならない．
- 収束することを示す際に $\varepsilon\delta$ 論法ではなく，極限で考えても構わない．解答例の最後の部分を参考にすること．

問 7 $f : X \longrightarrow Y$ を距離空間の間の連続写像とする．K を X の点列コンパクト集合とするとき，$f(K)$ は Y の点列コンパクト集合になることを示せ．

【解答例】 $f(K)$ の点列 $\{b_n\}$ をとる．$b_n \in f(K)$ なので $a_n \in K$ を $f(a_n) = b_n$ となるようにとる．K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ は K の点に収束する部分列を持つ．それを $\{a_{n_k}\}$，その極限を $p \in K$ とおく．f の p での連続性から $\{f(a_{n_k})\} = \{b_{n_k}\}$ は $f(p) \in f(K)$ に収束する．よって $f(K)$ は点列コンパクトである．

【コメント】

- 点列コンパクトの定義をきちんと理解していない人が多い．K が点列コンパクトとは K の任意の点列が収束する部分列を持つことだ．「点列は収束する部分列である」「任意の点に収束する点列が存在する」など似て非なる理解をしている人が少なくない．
- 点列コンパクトを理解できている人でも K の点列からとってしまって失敗する人がいる．$f(K)$ が点列コンパクトであることを示すのだからまず $f(K)$ の点列をとり，それから収束する部分列をどう作るか述べなくてはならない．

問 8 $f : X \longrightarrow Y$ は一様連続であるとする．$\{x_n\}$ を X の Cauchy 列とするとき $\{f(x_n)\}$ は Y の Cauchy 列になることを示せ．

【解答例】 $\varepsilon > 0$ をとる．f の一様連続性から $\delta > 0$ を

$$d_X(x, x') \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

が成り立つようにとる．この $\delta > 0$ について，$\{x_n\}$ が Cauchy 列であることから，自然数 N を

$$n, m \geqq N \Longrightarrow d_X(x_n, x_m) < \delta$$

が成り立つようにとる．$\delta > 0$ の取り方から $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ となるので $\{f(x_n)\}$ は Y の Cauchy 列である．

【コメント】

- Cauchy 列と収束する点列は同じ概念ではない．Cauchy 列をとったとき極限をとってはいけない．なお，収束する点列を収束する点列に移すのは f が連続であればよい．
- 一様連続を $d_X(x, a) \Longrightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ と記述する人を見かけるが，間違いとは言わないが好ましくはない．a が固定されていて x だけの条件に見えるからだ．記号の使い分けはきちんと意識したほうが良い．