「幾何概論 I」第 2 回試験（7 月 21 日実施）解答例とコメント

問 1 のみ 15 点，他はすべて 10 点の 85 点満点で採点した．最高点は 85 点，最低点は 5 点，平均点は 39.62 点だった．印象としてよく理解できている人と全く理解できていない人の差が広がっていると感じた．日頃の学習の質の差が現れたのではないか．良くわからないことは分かるまで考えるようにしてほしい．分からないから覚えておこうというのは数学の学習ではない．

第 1 回と第 2 回の両方とも受験した学生は 45 人，2 回とも合格の学生は 23 人，第 1 回のみ合格の学生が 6 人，第 2 回のみ合格の学生が 5 人，2 回とも不合格の学生が 11 人だった．2 回とも不合格の 11 人は残念ながら再試験の対象にしない．厳しいように感じるかもしれないが，2 回の試験の合計点が 160 点を超えた人も 2 人いる．違いは理解力というより，数学的なものの考え方になじんできた結果だと思う．なじむためにはそれなりの学習量が必要だ．正面から数学に向き合う時間を大切にしてほしい．

問 1 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ を示せ．また $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ が成り立たない例をあげよ．

【解答例】 $A \cap B \subset A$ より $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ である．同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ なので $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ である．逆向きの包含関係を示すために $x \in A^\circ \cap B^\circ$ をとる．$x \in A^\circ$ より $x \in U \subset A$ を満たす開集合 U が存在する．同様に $x \in B^\circ$ より $x \in V \subset B$ を満たす開集合 V が存在する．$x \in U \cap V \subset A \cap B$ であり $U \cap V$ は開集合なので $x \in (A \cap B)^\circ$ である．よって $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ であり $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ が成り立つ．

$\mathbb{R}$ において $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ とすれば $A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2)$，である．また $A \cup B = [0,2]$ なので $(A \cup B)^\circ = (0,2)$ である．

【コメント】

- $x \in A \cap B$ について，$x \in U \cap V \subset A \cap B$ ととるのは間違いだ．直積位相の扱いに惑わされているのではないか．
- 用語の意味を誤解した答案はだいぶ少なくなってきた．それなりに理解は進んでいるのかもしれない．
- 後半の反例については，反例になることの説明がないといけない．結果のみの場合は若干減点した．なお，$A = (0,1)$, $B = (1,2)$ としたら反例にならない．$A \cup B$ に 1 が属していない．反例にするには A の右端か B の左端の少なくとも一方は集合に含めておかなければならない．

問 2 位相空間 X とその部分位相空間 Y について $i : Y \longrightarrow X$ を包含写像とする．$f : Z \longrightarrow Y$ が連続であることと $i \circ f : Z \longrightarrow X$ が連続であることとは同値であることを示せ．

【解答例】 $U \in \mathcal{O}(X)$ について $i^{-1} = U \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ なので i は連続である．ゆえに f が連続であれば $i \circ f$ も連続である．

逆に $i \circ f$ が連続とする．$V \in \mathcal{O}(Y)$ について $V = U \cap Y$ となる $U \in \mathcal{O}(X)$ をとる．$i \circ f$ は連続なので $(i \circ f)(U) \in \mathcal{O}(Z)$ だが $(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = f^{-1}(U \cap Y) = f^{-1}(V)$ なので $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(Z)$ である．ゆえに f は連続である．

【コメント】

- 講義では X の開集合は U で，Y の開集合は V で記述している．もちろんこれは単に分かりやすくするための工夫なのでやらなかったといって減点の対象になるわけではない．ただ $V \in \mathcal{O}(X)$ について $i^{-1}(V) = V$ としたら論理的な誤りだ．V は X の部分集合であって Y の部分集合になるとは限らない．

- 前半は単に連続写像の合成が連続ということだ．ただし i の連続性については記述した答案と記述していない答案がある．また記述したが間違ったという答案もある．採点では i の連続性の証明も対象に含めた．この証明は不要と思って記述しなかった人もいるだろうが，我慢してほしい．
- $i \circ f$ の連続性から f の連続性を示すには $V \in \mathcal{O}(Y)$ をとって $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(Z)$ を示さなくてはならない．$U \in \mathcal{O}(X)$ をとって $f^{-1}(i^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(Z)$ を示しても $V = i^{-1}(U)$ の場合に示したことにしかならない．もちろん $V \in \mathcal{O}(Y)$ が必ず $i^{-1}(U)$ と表せることに言及していればいいのだがそれには $i^{-1}(U) = U \cap Y$ と相対位相の定義を使わなくてはならない．
- i の連続性についても，後半の証明でも $i^{-1}(U) = U \cap Y$ と相対位相の定義がポイントだ．この事実にまったく気付いていない人も多く，すっきりした議論の展開が不可能になった．
- 連続性の定義が分からない人がいるが，勉強を全くしていないのではないか．

問 3 位相空間 X, Y が第二可算公理を満たす時，その直積位相空間も第二可算公理を満たすことを示せ．

【解答例】 $\mathcal{B}_X = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_Y = \{C_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ をそれぞれ $\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y)$ の可算開基とする．

$$\mathcal{B} = \{B_n \times C_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

が直積位相 $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基であることを示せば $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合なので，可算開基になることが分かる．よって $X \times Y$ も第二可算公理を満たす．

$\mathcal{B}$ が開基であることを示すために $(x, y) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとる．直積位相の定義から $(x, y) \in U \times V \subset W$ を満たす $U \in \mathcal{O}(X)$, $V \in \mathcal{O}(Y)$ が存在する．$x \in U \in \mathcal{O}(X)$ より $x \in B_{n_0} \subset U$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ をとる．同様に $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$ より $y \in C_{m_0} \subset V$ となる $m_0 \in \mathbb{N}$ をとる．

$$(x, y) \in B_{n_0} \times C_{m_0} \subset U \times V \subset W, \qquad B_{n_0} \times C_{m_0} \in \mathcal{B}$$

より $\mathcal{B}$ は直積位相 $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基である．

【コメント】

- まず X, Y の開基を記号を使って記述しなくてはならない．このとき $\mathcal{B}_X = \{U \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$ としたら $\mathcal{B}_X = \mathcal{O}(X)$ になってしまう．また，$\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ を同じ添え字で記述してはいけない．気をつけること．
- 第二可算公理を満たすということは可算個の開集合からなる開基が存在するということだ．開基をとったらそれが可算個の開集合からなっているという意味ではない．$\{U \times V \mid U \in \mathcal{O}(X),\ V \in \mathcal{O}(Y)\}$ は $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基だが，これが可算個の開集合からなるというわけではない．
- $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基であることを示すには，$W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとり，それが開基に属する開集合の合併になっていること，あるいは開基であることの必要十分条件を満たすことを示す．$U \times V$ のみについて考えている人がいるが解答として不十分である．
- 開基であることの証明は，問題用紙に記述した必要分条件を使うと楽である．本来の定義で示すには $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ が $U \times V$ の合併として表せること，さらに $U \times V$ が $B_n \times C_m$ の合併で表せることを示す必要がある．分かってくれば難しいことではないのだが．

問 4 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとき，X が可分ならば Y も可分であることを示せ．

【解答例】$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を X の可算稠密集合とする．$f(A) = \{f(a_n)\}$ なので $f(A)$ も可算集合である．よって

$f(A)$ が Y の稠密集合であることを示せばよい．

$y \in Y$ をとり $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる．f は全射なので $f(x) = y$ となる x をとる．$x \in f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ より $x \in \overline{A} = X$ なので $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である．ゆえに

$$f(A \cap f^{-1}(V)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(V)) = f(A) \cap (V \cap f(X)) = f(A) \cap V$$

であるが空集合でない集合の像は空集合にはならないので $f(A) \cap V \neq \emptyset$ を得る．$y \in \overline{f(A)}$ であり $Y = \overline{f(A)}$ を得る．よって $f(A)$ は稠密である．

【コメント】

- 可分の定義をきちんと理解していない答案が多い．これでは答えられるはずがない．
- $f(A)$ が Y の可算稠密集合であることを示せばよいということはすぐ気付くはずだ．これは $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ を使えばすぐ示せるが，この問題ではこの部分も含めて証明してほしい．

問 5 位相空間 X がハウスドルフ空間であることと対角線集合 $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ が閉集合であることとは同値であることを示せ．

【解答例】 X がハウスドルフ空間であると仮定し D の補集合が開集合であることを示す． $(x, y) \in D^c$ とは $x \neq y$ に他ならない．X はハウスドルフなので $x \in U \in \mathcal{O}(X)$, $y \in V \in \mathcal{O}(X)$, $U \cap V = \emptyset$ を満たす U, V がとれる．$(x', y') \in U \times V$ について $x' \in U$, $y' \in V$ と $U \cap V = \emptyset$ より $(x', y') \in D^c$ である．よって $(x, y) \in U \times V \subset D^c$ より D^c は開集合である．

逆に D が閉集合，すなわち D^c が開集合だとする．$x \neq y$ について $(x, y) \notin D$ より開集合 U, V を $(x, y) \in U \times V \subset D^c$ ととれる．ここで $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば共通部分の要素 x について $(x, x) \in U \times V$ となる．これは $U \times V \subset D^c$ に矛盾するので $U \cap V = \emptyset$ である．よって X はハウスドルフ空間である．

【コメント】

- $U \cap V = \emptyset$ と $U \times V \subset D^c$ の同値性を示すのがポイントだ．これを証明せずに使ってはいけない．
- 直積位相において W が開集合であることを $(p, q) \in U \times V \subset W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ と記述したので，答案でも W を使う人が目につく．しかしこの問題では D^c が開集合であるという主張なので W を使う必要はない．
- X の部分集合と $X \times X$ の部分集合の見分けがつかない答案がある．用語の意味はきちんと意識する習慣をつけるように．

問 6 位相空間 X が連結であることと，X の開集合かつ閉集合になる集合が X と $\emptyset$ に限ることとは同値であることを示せ．

【解答例】 X が連結であるとし，U を X の開集合かつ閉集合であるとする．閉集合なので U^c も開集合であり $X = U \cup U^c$ および $U \cap U^c = \emptyset$ より連結性から $U = X$ または $U = \emptyset$ となる．

逆に開集合かつ閉集合である集合が X と $\emptyset$ に限るとし $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \in \mathcal{O}(X)$ とする．$V = U^c$ なので U は開集合かつ閉集合である．よって $U = X$ または $U = \emptyset$ なので X は連結である．

【コメント】

- $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ は $V = U^c$ と同値である．このことに気付かないと証明は難しい．

- X が連結であると仮定して，連結の定義を書く人が多い．しかしその表示と離れて U を開集合かつ閉集合として取らないといけない．

問 7 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ について X のコンパクト集合 K の像はコンパクトであることを示せ．

【解答例】 $f(K)$ の開被覆 $\{V_\lambda\}$ をとる．$f(K) \subset \bigcup_\lambda V_\lambda$ である．

$$x \in K \Longrightarrow f(x) \in \bigcup_\lambda V_\lambda \Longleftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_\lambda V_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

より $K \subset \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$ であり $\{f^{-1}(V_\lambda)\}$ は K の開被覆になる．K はコンパクトなので有限個の添え字 $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ を選んで

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(V_{\lambda_j})$$

とできる．

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(V_{\lambda_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{N} f\left(f^{-1}(V_{\lambda_j})\right) \subset \bigcup_{j=1}^{N} V_{\lambda_j}$$

となるので $f(K)$ はコンパクトである．

【コメント】

- $f(K)$ がコンパクトであることを言いたいのだからまず $f(K)$ の開被覆をとらなくてはならない．K の開被覆をとって議論を始めると失敗する．こういう感覚は早く身につけるように．
- 開被覆とは開集合の族である．だから有限とか可算だとかが意味を持つ．$\bigcup_\lambda V_\lambda$ は開被覆といわれると気持ち悪い．減点しなかったが注意してほしい．ただ $f^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda)$ が K の開被覆という言い方は減点した．

問 8 ハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 K は閉集合であることを示せ．

【解答例】 $x \in K^c$ をとる．$y \in K$ について $x \neq y$ よりハウスドルフであることを使って $U_y,\ V_y \in \mathcal{O}(X)$ を

$$x \in U_y,\ y \in V_y,\ U_y \cap V_y = \emptyset$$

となるようにとる．$y \in V_y \in \mathcal{O}(X)$ より $\{V_y, y \in K\}$ は K の開被覆になるので有限個の点 $y_1, y_2, \ldots, y_N$ を選んで

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} V_{y_j} = V \in \mathcal{O}(X)$$

となるようにとれる．この有限個の点を使って

$$U = \bigcap_{j=1}^{N} U_{y_j}$$

とおけば，有限個の開集合の共通部分なので開集合になる．また $x \in U_y$ なので $x \in U$ である．さらに

$$U \cap V = \bigcup_{j=1}^{N} U \cap V_{y_j} \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{y_j} \cap V_{y_j} = \emptyset$$

なので $x \in U \subset V^c \subset K^c$ より K^c は開集合になる．よって K は閉集合である．
【コメント】

- コンパクト性の議論で何回か使った議論だ．じっくり考えて理解していればそう難しくはない．なお，解答例で添え字を y にしているのは x は固定して考えていること，ハウスドルフの定義の U, V は y によって変わることを踏まえている．添え字の付け方を間違えるとうまく証明できない．