幾何概論 I テキスト (2015 年度 井上尚夫)

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は和，積など代数的な構造，距離に基づく幾何学的構造，大小関係という順序に関する構造を持つ．代数概論 I 等がこの代数的な構造の抽象化・一般化を行うのに対し幾何概論 I では幾何学的な構造の抽象化・一般化を行う．解析などでも様々な収束の概念が利用されるがその基本にはこの講義で扱う幾何学的構造が応用される．単に幾何の導入科目としてではなく数学全般の導入科目として学習してほしい．

なお，本学の自然科学研究科数学専攻（基礎数理コース）の入試では，専門基礎科目（必修問題）として線形代数，微分積分，集合と位相があげられている．幾何概論 I の講義内容はこの集合と位相の内容を含む．大学院進学を考える者はその点も踏まえて受講してほしい．

1 準備

この章では，講義に入る準備として数学を扱う上での基本事項をまとめておく．多くは実数と論理で学習した事項である．

1.1 集合と写像

1.1.1 集合

集合を厳密に定義することは非常に難しい．例えばすべての集合からなる集合というようなものを考えると必然的に矛盾が生じてしまう（ラッセルの逆理）．そこでこの講義では集合を何かの条件を満たすものの集まりとすると同時に，集合の集まりは必要に応じて集合族という言い方をする．

集合 X は $\{x \mid x$ についての条件 $\}$ というように，要素を表現する文字と集合に属するための（必要十分）条件という形で記述される．これは $x \in X \Longleftrightarrow x$ の条件 という形で書いてもよい．論理の上では後者の形のほうが分かりやすい場合も多い．例えば，2 つの集合 X, Y についてその和集合（合併），共通部分，差集合は次のように定義される．

$$\begin{aligned} x \in X \cap Y &\Longleftrightarrow x \in X \quad \text{かつ} \quad x \in Y \\ x \in X \cup Y &\Longleftrightarrow x \in X \quad \text{または} \quad x \in Y \\ x \in X \setminus Y &\Longleftrightarrow x \in X \quad \text{かつ} \quad x \notin Y \end{aligned}$$

集合 X の部分集合 A について，補集合 A^c は

$$x \in A^c \Longleftrightarrow x \notin A$$

で定義される．ここで $x \in X$ は大前提なので $A^c = X \setminus A$ である．要素が何もない集合を空集合と呼び $\emptyset$ で表す．

2 つの集合 X, Y についてその要素の対の全体を直積集合と呼ぶ．

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \quad (x, y) \in X \times Y \Longleftrightarrow x \in X,\ y \in Y$$

1.1.2 写像

2 つの集合 X, Y について X の各要素に対して Y の要素が 1 つずつ定まるときその対応を写像と呼び $f : X \longrightarrow Y$ と表す．$A \subset X$ について A の像 $f(A)$，$B \subset Y$ について B の逆像 $f^{-1}(B)$ が定義できる．

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Longleftrightarrow y = f(x) \text{ となる } A \text{ の要素 } x \text{ が存在する} \\ x \in f^{-1}(B) &\Longleftrightarrow f(x) \in B \end{aligned}$$

逆像の定義のほうが格段に単純なことに気づいてほしい．逆写像による像というようなイメージで逆像を捉えると理解できない．逆像は逆写像が存在しない場合でも定義できる．

例 1.1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 0$（0 に値をとる定数関数）について $f^{-1}([a, b])$ は

$$f^{-1}([a,b]) = \begin{cases} \mathbb{R} & a \leqq 0 \leqq b \\ \emptyset & a > 0 \text{ または } b < 0 \end{cases}$$

$f(X) = Y$ のとき，f を全射という．また $f(x_1) = f(x_2)$ が $x_1 = x_2$ の場合にのみ成り立つとき f を単射という．全射かつ単射であるとき全単射という．

命題 1.2. 要素が 1 個の Y の部分集合 $\{y\}$ [*1]について次が成り立つ．

$$\begin{aligned} f \text{ が全射} &\iff \text{すべての } y \in Y \text{ について } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ f \text{ が単射} &\iff \text{すべての } y \in Y \text{ について } f^{-1}(\{y\}) \text{ の要素は高々 1 個} \\ f \text{ が全単射} &\iff \text{すべての } y \in Y \text{ について } f^{-1}(\{y\}) \text{ の要素はちょうど 1 個} \end{aligned}$$

特に f が逆写像を持つことと f が全単射であることは同値である．

命題 1.3. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) \subset A$ が成り立つ．また $B \subset Y$ について $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ が成り立つ．

例 1.4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ について $f^{-1}(f([0,1])) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$ である．

1.2 命題

数学の意味で真偽の決まる文章を命題という．命題は文章なので主部と述部を持つ．例えば $1 + 2 = 5$ は命題である．$1 + 2$（1 に 2 を加えたもの）が主部であり，$= 5$（5 に等しい）は述部である．$=$ が動詞であることに注意せよ．もちろんこの命題は偽である．命題という用語は「(若干価値の低い) 定理」という意味で使われることも多い．なお集合 A について $x \in A$ は命題[*2]である．

$=$ 以外に動詞的役割を果たす数学記号に $\in \subset < \equiv$ などがある．これに対して $\cap \cup + \times \oplus$ などの演算記号は何かの操作を行った結果を表すのであってそれだけでは述部にはなりえない．$A \cap B$ は 2 つの集合 A と B の共通部分である．これが命題でないことは「$A \cap B$ が真か偽か」という問いかけが無意味であることからも分かるだろう．

2 つの命題 P, Q から $P \wedge Q$（P かつ Q），$P \vee Q$（P または Q），$P \Longrightarrow Q$ などの命題が作られる．なお P が偽の時，$P \Longrightarrow Q$ は Q の真偽にかかわらず真とみなされる．例えば「$1 = 2$ ならば $\sqrt{3}$ は整数である」という命題は真である．

命題 P に対して $\neg P$（P の否定）も命題である．$P \wedge (\neg P)$ は常に偽であり，$P \vee (\neg P)$ は常に真である．

1.3 全称記号 ∀ と存在記号 ∃

x をパラメーターとする命題の集まり $P(x)$ を考えよう．$P(x)$ の真偽は x ごとに変わってくる．例えば $x^2 \leqq 4$ という命題は $-2 \leqq x \leqq 2$ のとき真であり，それ以外の時は偽である．これについて全称記号と存在記号を使って

$$\forall x\,;P(x), \qquad \exists x\,;P(x)$$

[*1] 要素 y と要素 1 個の部分集合 $\{y\}$ は明確に区別すること．$f^{-1}(y)$ と書くと逆写像の存在を仮定したことになる．

[*2] これが命題になることが集合の要件である．

という 2 つの命題が作られる．これらはパラメーターを持たない命題である．x は命題の記述に使われるだけであり x を他の文字に変えても意味は変わらない．

全称記号，存在記号を含む命題の否定は

$$\neg(\forall x\,;P(x)) \Longleftrightarrow \exists x\,;\neg P(x) \qquad \neg(\exists x\,;P(x)) \Longleftrightarrow \forall x\,;\neg P(x)$$

となる．これらは覚えるのではなく当たり前のこととして感じられるようにならないといけない．

2 つ以上のパラメーターによって記述される命題では，全称記号と存在記号を使ってより複雑な命題を作れる．

$$\forall x\,;(\forall y\,;P(x,y)), \qquad \forall x\,;(\exists y\,;P(x,y)), \qquad \exists x\,;(\forall y\,;P(x,y)), \qquad \exists x\,;(\exists y\,;P(x,y))$$

これらはすべて内容の違う命題である．

例 1.5. $P(x,y)$ が以下の命題の時，上の 4 つの命題の真偽を調べると次のようになる．

$$(1)\ x^2+y^2 \geqq 0 \quad (2)\ x^2-y^2 \leqq 1 \quad (3)\ x^2-y^2 \geqq -1 \quad (4) x^2+y^2 \leqq 1$$

	$\forall x\,;(\forall y\,;P(x,y))$	$\forall x\,;(\exists y\,;P(x,y))$	$\exists x\,;(\forall y\,;P(x,y))$	$\exists x\,;(\exists y\,;P(x,y))$
(1)	真	真	真	真
(2)	偽	真	真	真
(3)	偽	真	偽	真
(4)	偽	偽	偽	真

特に重要なのは $\forall x\,;(\exists y\,;P(x,y))$ と $\exists y\,;(\forall x\,;P(x,y))$ の意味の違いである．どちらも日本語に訳すと「すべての x に対して $P(x,y)$ が真であるような y が存在する」となってしまう．違いは「○○のような」の「○○」が文章のどの範囲かである．前者は「$P(x,y)$ が真であるような」であり，後者では「すべての x について $P(x,y)$ が真であるような」だ．この混乱を避けるために数学では前者を「すべての x に対してある y が存在して $P(x,y)$ が成り立つ」と読み，後者を「ある y が存在して，すべての x に対して $P(x,y)$ が成り立つ」と読むことが多い．これは日本語としては違和感を持つが，数学方言として積極的に使ってほしい．

以上述べた記号を使うと次のような命題が構成できる．

$$\forall \varepsilon > 0\,;(\exists \delta > 0\,;(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon))$$

これを日本語に翻訳すれば,「どんな正数 ε に対してもある $\delta > 0$ が存在して，命題「$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$」を成り立つ.」となる．

ならばを使った命題「$P(x) \Longrightarrow Q(x)$」は $P(x)$ が真となるすべての x について $Q(x)$ が成り立つという意味だ．これは $\forall$ を使って $(\forall x, P(x)); Q(x)$ と記述できる．この否定は $(\exists x, P(x)) : \neg Q(x)$ だ．$P(x)$ は考える対象の x を限定するものなので $\neg P(x)$ にはならない．

問題 1.6. 次の命題を日本語に翻訳せよ．また否定命題を作れ．

(1) 関数 $f(x)$ についての命題 $\forall x > 0; (f(x) > 0)$
(2) 関数 $f(x)$ と a についての命題 $\exists \delta > 0; (|x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > 0)$
(3) 実数の集合 A についての命題 $\forall x \in A; (\exists r > 0); (|y-x| < r \Longrightarrow y \in A)$

1.4 同値関係と商集合

集合 X と $D \subset X \times X$ について $(x,y) \in D$ を $x \sim y$ と表す．$\sim$ について次が成り立つとき同値関係という．

$$\text{(I)}\ x \sim x, \qquad \text{(II)}\ x \sim y \Longrightarrow y \sim x, \qquad \text{(III)}\ x \sim y,\ y \sim z \Longrightarrow x \sim z$$

この三つの性質を順に反射律，対称律，推移律という．

同値関係について $[a] = \{x \mid x \sim a\}$ を a の属する同値類と呼ぶ．反射律から $a \in [a]$ であり $[a]$ は X の空でない部分集合である．2 つの同値類について $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ のとき，$[a] = [b]$ となる．すなわち異なる同値類は共通部分を持たない．そこで X を同値類の互いに交わらない和集合（直和，disjoint union）として分割できる．この同値類を一つの要素として作られる集合を商集合と呼び $X/\sim$ と表す．これについては線形数学のテキストを参照してほしい．

1.5　集合の濃度

要素有限個の集合 X に対して $\#X$ をその要素の個数と定める．この $\#X$ を次のような形で無限集合に拡張し，集合の濃度と呼ぶ．

定義 1.1.

$$\#X \leq \#Y \Longleftrightarrow \exists f : X \longrightarrow Y; f \text{ は単射}$$
$$\#X = \#Y \Longleftrightarrow \exists f : X \longrightarrow Y; f \text{ は全単射}$$
$$\#X < \#Y \Longleftrightarrow \#X \leq \#Y \quad \text{かつ} \quad \#X \neq \#Y$$

この定義により以下の事実が成り立つ．

命題 1.7. (1) X が有限集合ならば $\#X < \#\mathbb{N}$
(2) X が無限集合ならば $\#\mathbb{N} \leq \#X$

ゆえに $\mathbb{N}$ の濃度は無限集合の濃度として最小である．この濃度を可算無限と呼び $\aleph_0$（アレフ 0）で表す．有理数全体の集合は可算無限である．

命題 1.8. X, Y が可算無限集合の時，$X \times Y$ も可算無限集合になる．特に有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算無限集合である．

しかし実数全体の集合は可算無限ではない．

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}$$

これは Cantor の対角線論法によって証明される．$\aleph_0$ より大きな濃度の無限集合を非可算無限集合という．実数全体の集合の濃度を $\aleph$ と表す．$\aleph_0$ と $\aleph$ の間に中間の濃度が存在するかは素朴に疑問に感じることだが，これは正しいとしても間違っているとしても矛盾が生じないことが Cohen によって 1960 年代に証明された．[*3]

命題 1.9. 集合 X の部分集合たちの集合を X のべき集合と呼び $\mathcal{P}(X)$ と表すことにする．$\#X < \#\mathcal{P}(X)$ である．特に無限集合の濃度には無限の種類がある．

1.6　集合演算の基本

さて，無限にも多様なものがあるので無限個のものを $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ のように自然数で添え字を付けるわけにはいかない．そこで添え字集合 Λ を考え $\{a_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ のように表す．添え字集合にはたいした意味はないのだが，自然数とすると可算無限の場合を扱ってしまうことになる．

[*3] 命題は真偽の決まる文章と述べたが，このことは命題であることと矛盾しない．真とした場合の集合論と偽とした場合の集合論がどちらも矛盾なく記述できるという意味だ．

定義 1.2. 添え字集合 Λ によって無限個の集合の属 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を考える．これらの和集合および共通部分は

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff \forall\lambda \in \Lambda \quad ; x \in A_\lambda$$
$$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff \exists\lambda \in \Lambda \quad ; x \in A_\lambda$$

で定義される．

無限個の集合の直積集合も定義できるが，選択公理を本質的に使わないといけない．この講義では扱わないことにする．集合演算の基本をまとめておく．非可算無限個の和集合や共通部分も扱うのでもはやベン図を書いて理解するわけにはいかない．

命題 1.10 (ド・モルガンの法則)**.**

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^c \qquad \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^c$$

命題 1.11.

$$B \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B \cup A_\lambda), \quad B \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B \cap A_\lambda)$$

命題 1.12. $f : X \longrightarrow Y$ と $A_\lambda \subset X,\ \lambda \in \Lambda$ および $B_\mu \subset Y,\ \sigma \in \Sigma$ について

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \qquad f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\sigma\in\Sigma} B_\sigma\right) = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} f^{-1}(B_\sigma) \qquad f^{-1}\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} B_\sigma\right) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} f^{-1}(B_\sigma)$$

例 1.13. $A \cap B = \emptyset$ なら $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ である．しかし，$f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ となることはあり得る．この場合 $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ である．具体的には $f(x) = x^2,\ A = [1, 2],\ B = [-2, -1]$ とでもすればよい．

2　距離空間

距離空間とは距離の定義された集合である．具体例としてはユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ をイメージすればよい．しかし，距離空間には $\mathbb{R}^2$ とは似ても似つかない例がたくさんある．この講義では $\mathbb{R}^n$ と 2 年次の線形数学で紹介したような連続関数の集合の例を基本的な対象として考察する．

2.1　距離

2.1.1　距離の公理

定義 2.1. 空でない集合 X について関数 $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ が X 上の**距離**であるとは以下の条件を満たすことを言う．これを距離の公理と呼ぶ．

(I) $d(x, y) = d(y, x)$
(II) $d(x, y) \geqq 0$
(III) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
(IV) $d(x, y) + d(y, z) \geqq d(x, z)$（三角不等式）

集合 X とその距離の組 (X, d) を距離空間という．

距離空間の最も基本的な例は $\mathbb{R}$ に距離を $d(x,y)=|x-y|$ で定めたものである．これについては 2 年次の実数と論理の講義で詳しく学習した．それ以外の例を見ていこう．

2.1.2　距離空間の例

次はつまらない例だが，どんな集合にも距離を定めることができることを述べている．

例 2.1. 集合 X について $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$d(x,x)=0, \quad x\neq y \text{ のとき } d(x,y)=1$$

で定めれば d は X 上の距離である．

$\mathbb{R}^n$ にも標準内積から距離が定まるがそれのみと言うわけではない．基本的なものとして 3 通り紹介しておこう．

例 2.2. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において次は距離である．

$$\begin{aligned} d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_j)^2} \\ d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \\ d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \max\Big\{|x_i-y_i|,\ 1\leqq i\leqq n\Big\} \end{aligned}$$

命題 2.3. 例 2.2 の 3 つの距離について次の不等式が成り立つ．

$$d_\infty \leqq d_2 \leqq \sqrt{n}d_1 \leqq n\sqrt{n}d_\infty$$

2.1.3　連続関数の集合上の距離

解析学では関数の集合に距離を定めることがしばしば行われる．この講義では次を基本的な例として扱う．

例 2.4. $[0,1]$ 区間上の実数値連続関数全体の集合 V において次は距離である[*4]．

$$\begin{aligned} d_2(f,g) &= \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2dx} \\ d_1(f,g) &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \\ d_\infty(f,g) &= \max\Big\{|f(x)-g(x)|,\ 0\leqq x\leqq 1\Big\} \end{aligned}$$

この例で区間を一般の閉区間に変えても問題はない．ただし，開区間や有界でない区間にしてしまうと積分ができなかったり最大値が存在しなかったりするのでこのままではうまく定義できない．

命題 2.5. 例 2.4 の d_1, d_2, d_∞ は距離の公理を満たす．またこれらの距離について次が成り立つ．

$$d_1 \leqq d_2 \leqq d_\infty$$

[*4] 線形空間にノルムを定めたものをノルム空間という．これらはノルムによる距離であり距離としては扱いやすいものである．この講義ではノルムの一般論は扱わないが，関心のある人は調べてみると良い．

2.1.4 部分（距離）空間，直積（距離）空間

定義 2.2. 距離空間 (X, d_X) と $A \subset X$ について距離関数 d_X を $A \times A$ に制限したものは A の距離になる．これを d_A と表す時 (A, d_A) を X の部分（距離）空間という．

2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) について，$X \times Y$ 上の距離を

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$$

で定めることができる．$X \times Y$ にこの距離を定めたものを直積 (距離) 空間という．

なお，これらの用語について距離は省略されることが多い．距離空間を考えているときに部分空間といえば部分距離空間のことだし，線形空間を考えているときに部分空間といえば部分線形空間のことだ．

例 2.6. ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ の部分空間 $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ において，北極と南極の距離は 2 である．一方球面上の距離を 2 点を通る大円弧の長さとすると

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \cos^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

となるが，この距離についての北極と南極の距離は π である．

2.2 極限と連続

2.2.1 点列と極限（数列の極限）

定義 2.3. 距離空間 (X, d) についてその点列[*5] $\{a_n\}$ が b に収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$$

が成り立つことを言い，$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ と表す．これと数列の極限の定義を組み合わせれば

$$\forall\varepsilon > 0; (\exists N; (n \geqq N \Longrightarrow d(a_n, b) < \varepsilon)) \tag{1}$$

命題 2.7. 点列が収束すればその極限は一意である．

定義 2.4. 集合 X 上の 2 つの距離 d_1, d_2 が同値であるとは

$$Kd_1 \leqq d_2 \leqq Hd_2$$

を満たす正数 K, H が存在することをいう．

命題 2.8. 距離の同値は同値関係である．

点列が収束するかしないかは距離の取り方によって変わってくる．距離 d による収束であることを強調する場合には単に収束といわず d 収束ということにする．

定理 2.9. 同値な距離は同じ収束概念を定める．すなわち集合 X の 2 つの同値な距離 d_1, d_2 について，点列 $\{a_n\}$ が d_1 収束することと d_2 収束することは同値である．

例 2.10. 例 2.2 の 3 つの距離，d_1, d_2, d_∞ は互いに同値である．

[*5] 距離は幾何的な構造なので X の要素は点と呼ぶことが多い．この点列という言葉もその呼び方を踏襲している．ただし，具体例ではそれにふさわしい呼び方をする．$\mathbb{R}$ の点列は数列と呼ぶし，例 2.4 の点列は関数列という．

例 2.4 の 3 つの距離はどの 2 つも同値でないことは次のような具体例からも分かる．

例 2.11. V および d_1, d_2, d_∞ を例 2.4 と同じにとる．$0 < c < 1/2$ と $a > 0$ に対して $f_{c,a} \in V$ 次のようにとる．

$$f_{c,a}(x) = \begin{cases} (a/c)x & 0 \leqq x \leqq c \\ 2a - (a/c)x & c \leqq x \leqq 2c \\ 0 & 2c \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

$f_{c,a}$ は $x = c$ で最大値 a をとる連続関数である．

この関数と $0 \in V$ との距離は

$$d_1(f_{c,a}, 0) = ca, \quad d_2(f_{c,a}, 0) = \sqrt{2c/3}a, \quad d_\infty(f_{c,a}, 0) = a$$

である．ゆえに関数列 $\{f_{1/n,1}\}$ は 0 に d_1 と d_2 に関しては収束するが d_∞ に関しては収束しない．$\{f_{1/n,\sqrt{n}}\}$ は d_1 に関して 0 に収束するが，d_2, d_∞ に関しては収束しない．このように収束の概念は距離によって変わってくる．

なお，この 2 つの関数列はいずれも 0 に各点収束している．

命題 2.12. X の 2 つの距離 d_1, d_2 について $Kd_1 \leqq d_2$ を満たす正数 K が存在するとする．このとき d_2-収束する点列は同じ極限に d_1-収束する．

この命題から例 2.4 について

$$d_\infty\text{収束} \Longrightarrow d_2\text{収束} \Longrightarrow d_1\text{収束}$$

という関係がある．逆は成り立たない．なお d_∞ 収束は一様収束に他ならない．

命題 2.13. 例 2.4 において，関数列 $\{f_n\}$ が $g \in V$ に $[0, 1]$ 上一様収束することと d_∞ 収束することは同値である．

例 2.14. $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(x) = x^n\}$ は d_1 と d_2 に関し 0 に収束するが d_∞ については収束しない．また $\{g_n(x) = \sqrt{n}x^n\}$ は d_1 に関し 0 に収束するが，d_2, d_∞ については収束しない．

2.2.2　写像の極限（関数の極限）

2 つの距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) について写像 $f : X \longrightarrow Y$ を考える．

定義 2.5. x を a に近づけるとき $f(x)$ が b に収束するとは次が成り立つことを言う．

$$\forall\varepsilon > 0; (\exists\delta > 0; (0 < d_X(x, a) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), b) < \varepsilon)) \tag{2}$$

これは実数と論理で学習した関数の極限の定義を距離を使って書き直しただけである．このことを

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表す．記号は高校で使ったものと同じだが，x, a は距離空間 (X, d_X) の点，$f(x), b$ は距離空間 (Y, d_Y) の点である．

なお，$0 < d_X(x, a) < \delta$ を満たす x が存在しない場合は，x を a に近づけることができないので極限は考えない．極限を考えるためには任意の $\delta > 0$ について $0 < d_X(x, a) < \delta$ を満たす $x \in X$ が存在しなくてはならない．このような点を集積点というが詳しくは 2.3 節で扱う．

2.2.3　連続写像

定義 2.6. 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) と X の部分集合 A から Y への写像 $f : A \longrightarrow Y$ が $a \in A$ で連続であるとは

$$\forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (d_X(x, a) < \delta,\ x \in A \Longrightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)) \tag{3}$$

が成り立つことを言う．また A のすべての点で連続な時，$f(x)$ は A 上連続であるという．

極限の定義と似ているが微妙な違いがある．

- 極限の定義では a と異なる点から a に近づけていくが，連続の定義では $d_X(x, a) < \delta$ としかしていないので $x = a$ でも構わない．特にある δ について $d_X(x, a) < \delta$ となる A の点が a のみになってしまう場合（孤立点という），極限は考えられないが連続の定義は満たしている．
- $a \in A$ は連続性を考える際の前提である．よく $f(x) = 1/x$ は $x = 0$ で不連続という言い方をするが，$f(0)$ が定義されていないのでこの言い方は不適切だ．極限を考える場合は $f(a)$ が定義されていなくても良い．a のまわりに A の点が無数にあればよい（集積点という）．

連続写像について次が成り立つ．

定理 2.15. $f : X \longrightarrow Y$ が $x = a$ で連続で，$g : Y \longrightarrow Z$ が $y = b = f(a)$ で連続であれば，合成写像 $g \circ f$ は $x = a$ で連続である．

命題 2.16. $f : X \longrightarrow Y$ が $x = a$ で連続であることと，a に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ について，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

が成り立つこととは同値である．

例 2.17. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ であっても $f(a) = b$ であるとは限らない．この場合 a に収束する点列 $\{x_n\}$ で $x_n = a$ となる n が無限に多くあれば

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

は成り立たない．

定義 2.7. 距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が X 上一様連続であるとは

$$\forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon))$$

が成り立つことを言う．

命題 2.18. X 上一様連続なら X 上連続である．

定義 2.8. 距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が，ある正数 L について

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqq L d_X(x_1, x_2)$$

を満たす時リプシッツ連続であるという．

命題 2.19. リプシッツ連続な写像は X 上一様連続である．

例 2.20. V を $[0, 1]$ 区間上連続な実数値関数全体の集合とし，距離を例 2.4 の d_1 にとる．$f \in V$ に対しその $[0, 1]$ 区間上での定積分を対応させる写像はリプシッツ連続である．特に $\{f_n\}$ が f に d_1 収束すれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つ．この事実は極限と積分の交換とよばれ通常一様収束（d_∞ 収束）の仮定で定式化されるが実はそれより弱い d_1 収束で成り立っている．

命題 2.21. 距離空間 (X, d) とその部分距離空間 A について，包含写像 $i : A \longrightarrow X$ はリプシッツ連続である．

命題 2.22. 直積距離空間 $X \times Y$ において，X への射影 $p_X : X \times Y \longrightarrow X$, $p_X(x, y) = x$ はリプシッツ連続である．

例 2.23. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ は $[-1, 1]$ 上一様連続（閉区間上連続な関数は一様連続）だがリプシッツ連続ではない．

例 2.24. 距離空間 (X, d) と $a \in X$ について $d(a, x)$ を x の関数としてリプシッツ連続である．さらに $A \subset X$ について

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

と定めるときこれもリプシッツ連続である．

2.3 距離空間の位相

2.3.1 内点，外点，境界点，集積点，孤立点

距離空間 (X, d) において $B_r(a) = \{x, \mid d(x, a) < r\}$ を a の r 近傍と呼ぶ．以下の概念については定義と合わせて平面の集合で直観的に理解しておくことが必要である．

定義 2.9. 距離空間 (X, d) の部分集合 A と $p \in X$ について

- p が A の内点であるとは「$\exists r > 0; (B_r(p) \subset A)$」 が成り立つことを言う．
- p が A の外点であるとは「 $\exists r > 0; (B_r(p) \cap A = \emptyset)$」 が成り立つことを言う．
- p が A の境界点であるとは「$\forall r > 0; (B_r(p) \cap A \neq \emptyset,\ B_r(p) \cap A^c \neq \emptyset)$」 が成り立つことを言う．
- p が A の集積点であるとは 「$\forall r > 0; ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset)$」が成り立つことを言う．
- p が A の孤立点であるとは「$\exists r > 0; (B_r(p) \cap A = \{p\})$」が成り立つことを言う．

命題 2.25. p が A の集積点であることと，A の点列 $\{x_n\}$ で $x_n \neq p$ を満たしかつ p に収束するものが存在することとは同値である．

命題 2.26. X の点は A の内点，外点，境界点のいずれか一つの条件を満たす．A の補集合 A^c の内点は A の外点であり，A^c の外点は A の内点である．

命題 2.27. A の境界点 p が $p \notin A$ のとき，p は A の集積点である．また A の点が集積点でなければ孤立点である．

2.3.2 内部，閉包，開集合，閉集合

定義 2.10. A の内点全体の集合を A の内部と呼び A° で表す．A の境界点全体の集合を A の境界と呼び ∂A と表す．$A \cup \partial A$ を A の閉包と呼び $\overline{A}$ と表す．

$A = A^\circ$ が成り立つとき A を開集合という．$A = \overline{A}$ が成り立つとき A を閉集合という．

例 2.28. $\mathbb{R}$ に通常の距離を入れた距離空間において開区間は開集合である．また閉区間は閉集合である．

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の内部は空集合であり，Q の閉包は $\mathbb{R}$ である．特に $\partial Q = \mathbb{R}$ である．

例 2.29. $B_r(a)$ は開集合である．

例 2.30. 例 1 の距離空間においては，任意の集合は開集合である．

命題 2.31. A の境界と A の補集合の境界は一致する．すなわち $\partial A = \partial(A^c)$ が成り立つ．

命題 2.32. A° は開集合で $A^\circ \subset A$ を満たす．B が開集合で $B \subset A$ を満たせば，$B \subset A^\circ$ が成り立つ．すなわち A° は A に含まれる最大の開集合である．
$\overline{A}$ は閉集合で $A \subset \overline{A}$ を満たす．C が閉集合で $A \subset C$ を満たせば，$\overline{A} \subset C$ が成り立つ．すなわち $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である．

命題 2.33. A が開集合であることは次が成り立つことと同値である．

$$\forall a \in A; (\exists r > 0; (B_r(a) \subset A)$$

命題 2.34. 開集合の補集合は閉集合である．閉集合の補集合は開集合である．

距離空間 (X, d) について，その開集合全体のなす集合族を $\mathcal{O}_d(X)$ と表す．開集合族 $\mathcal{O}_d(X)$ は以下の条件を満たす．

定理 2.35. 距離空間 (X, d) において次が成り立つ．

- $\emptyset \in \mathcal{O}_d(X)$， $X \in \mathcal{O}_d(X)$．
- 集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ において
$$\forall \lambda,\ A_\lambda \in \mathcal{O}_d(X) \Longrightarrow \bigcup_\lambda A_\lambda \in \mathcal{O}_d(X)$$
- 有限個の集合族 $\{A_k \mid 1 \leqq k \leqq n\}$ において
$$\forall k,\ A_k \in \mathcal{O}_d(X) \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k(X) \in \mathcal{O}_d(X)$$

定理 2.36. X の 2 つの距離 d_1， d_2 について $Kd_1 < d_2$ を満たす正数 $K > 0$ が存在すれば $\mathcal{O}_{d_1}(X) \supset \mathcal{O}_{d_2}(X)$ が成り立つ．特に 2 つの距離が同値であれば，$\mathcal{O}_{d_1}(X) = \mathcal{O}_{d_2}(X)$ が成り立つ．

例 2.37. 無限個の開集合の共通部分は開集合になるとは限らない．例えば

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{k}\right) = (0, 1]$$

2.3.3　連続写像の開集合による特徴づけ

定理 2.38. 距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が X 上連続であることと次が成り立つことは同値である．

$$V \in \mathcal{O}_{d_Y}(Y) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{d_X}(X)$$

命題 2.39. 連続写像の合成写像は連続である．

例 2.40. 開集合の像は開集合になるとは限らない．例えば $f(x) = x^2$ について $f((-1, 1)) = [0, 1)$ である．

命題 2.41. 距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ について，f が連続であることと Y の閉集合の逆像が常に X の閉集合になることとは同値である．

例 2.42. 距離空間 X 上の連続関数 $f(x)$ について $\{x \mid f(x) < a\}$ は $f^{-1}((-\infty, a))$ に他ならないので開集合である．いくつかの連続関数による不等式（等号を含まない）で定義される領域は開集合である．

2.3.4　距離から定まる連続関数

命題 2.43. A が閉集合の時，$d(x,A)=0$ と $x \in A$ は同値である．

命題 2.44. A, B が閉集合で $A \cap B = \emptyset$ であるとき

$$g(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

は X 上の連続関数であり，次を満たす．

$$0 \leqq g(x) \leqq 1, \quad g(x)=0 \Longleftrightarrow x \in A, \quad g(x)=1 \Longleftrightarrow x \in B$$

2.4　完備性，点列コンパクト性

2.4.1　Cauchy 列と完備性

定義 2.11. 距離空間 (X,d) の点列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であるとは次が成り立つことを言う．

$$\forall \varepsilon > 0\,;(\exists N \in \mathbb{N}\,;(n,m \geqq N \Longrightarrow d(a_n,a_m) < \varepsilon))$$

命題 2.45. 収束する点列は Cauchy 列である．

定義 2.12. 距離空間 (X,d) の Cauchy 列が必ず（X の点に）収束するとき，(X,d) を完備という．

実数の連続性公理により Cauchy 列は収束する．すなわち $\mathbb{R}$ は通常の距離に関し完備である．

定理 2.46. (X,d_X), (Y,d_Y) がともに完備であるとき，直積距離空間 $X \times Y$ は完備である．

系 2.47. $\mathbb{R}^n$ は通常の距離に関し完備である．

例 2.48. $[0,1]$ 区間上の連続関数全体の集合 V に d_∞ による距離を入れた時，この距離空間は完備である．

命題 2.49. 完備距離空間の部分集合が部分距離空間として完備であることと閉集合であることは同値である．

命題 2.50. X, Y を距離空間とし Y は完備であるとする．$A \subset X$ と写像 $f : A \longrightarrow Y$ について f が A 上一様連続であれば f は 閉包 $\overline{A}$ 上の連続写像として一意に拡張できる．

2.4.2　点列コンパクト

定義 2.13. 距離空間 (X,d) の任意の点列が（X の点に）収束する部分列を持つとき，(X,d) は点列コンパクトであるという．X の部分集合 K が部分距離空間として点列コンパクトな時，点列コンパクト集合とよぶ．

命題 2.51. X の部分集合 K が有界であるとは，$K \subset B_r(a)$ となる $r>0$, $a \in X$ が存在することを言う．点列コンパクト集合は有界閉集合である．

$\mathbb{R}^n$ においてはこの主張の逆が成立する．

定理 2.52 (Bolzano-Weierstrass)**.** $\mathbb{R}$ において有界な数列は収束する部分列を持つ．$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は点列コンパクトである．

命題 2.53. 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ について $K \subset X$ が点列コンパクトならば $f(K) \subset Y$ も点列コンパクトである．

系 2.54. $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合で定義された連続関数は最大値および最小値を持つ．

3　位相空間

前節の最後で見たように f が X 上連続であることは，開集合族や閉集合族を使って定義しなおすことができる．そこで距離ではなく開集合から出発して議論を展開しよう．

3.1　位相

3.1.1　位相の定義

定義 3.1. 集合 X において，その部分集合の属 $\mathcal{O}(X)$ が開集合の公理を満たすとは次が成り立つことを言う．

- $\emptyset \in \mathcal{O}(X), \quad X \in \mathcal{O}(X)$
- $U_\lambda \in \mathcal{O}(X),\ \lambda \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$
- $U_k \in \mathcal{O}(X),\ 1 \leqq k \leqq n \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{O}(X)$

集合 X に対して，開集合の公理を満たす部分集合の族 $\mathcal{O}(X)$ を定めることを X に位相を定めるという．位相を定めたとき X を位相空間と呼び $\mathcal{O}(X)$ を X の開集合族とあるいは単に位相という．また $\mathcal{O}(X)$ の要素を X の開集合と呼ぶ．

位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ と $x \in X$ について， $U \subset X$ が x の近傍であるとは $x \in V \subset U$ を満たす開集合 V が存在することを言う． x の近傍全体の集合を $\mathcal{N}_x$ と表し，x の近傍系と呼ぶ．近傍の定義から x を含む開集合は x の近傍である．これを開近傍と呼ぶ．

定理 3.1. 近傍系は次の性質を満たす．これを近傍系の公理と呼ぶ．

- $U \in \mathcal{N}_x$ ならば $x \in U$
- $U \in \mathcal{N}_x$ かつ $U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{N}_x$
- $V, W \in \mathcal{N}_x$ ならば $V \cap W \in \mathcal{N}_x$
- $U \in \mathcal{N}_x$ について，次の性質を満たす $W \in \mathcal{N}_x$ が存在する．

$$(1) W \subset U \qquad (2) y \in W \Longrightarrow U \in \mathcal{N}_y$$

近傍系の公理を満たす集合族 $\{\mathcal{N}_x \mid x \in X\}$ が与えられたとき，$\mathcal{O}_n(X)$

$$U \in \mathcal{O}_n(X) \Longleftrightarrow \forall x \in U; (\exists V \in \mathcal{N}_x; (V \subset U))$$

と定める．

定理 3.2. この $\mathcal{O}_n(X)$ は開集合の公理を満たす．近傍系が $\mathcal{O}(X)$ から定義されたものであるとき，この $\mathcal{O}_n(X)$ は $\mathcal{O}(X)$ と一致する．

一般に位相は開集合族によって定義することが多いが，近傍系によっても定義できる．他に位相の定め方には閉集合族によって定義するものもあるがここでは扱わない．

3.1.2　位相区間の例

例 3.3. 距離空間 (X, d) について $\mathcal{O}_d(X)$ は開集合の公理を満たす．同値な距離は同じ位相を定める．

例 3.4. X のすべての部分集合の族 $\mathcal{O}(X) = \{U \mid U \subset X\}$ は開集合の公理を満たす．この位相を離散位相と呼ぶ．例 1 の距離による位相は離散位相である．

例 3.5. $\mathcal{O}(X) = \{\emptyset, X\}$ は開集合の公理を満たす．この位相を密着位相と呼ぶ．

例 3.6. $\mathcal{O}_l(\mathbb{R}) = \{\emptyset,\ \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ は開集合の公理を満たす．

3.1.3 連続写像

定義 3.2. 2 つの位相空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるとは次が成り立つことを言う．

$$V \in \mathcal{O}(Y) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$$

命題 3.7. 連続写像の合成は連続である．

3.1.4 位相の強弱

定義 3.3. X の 2 つの位相 $\mathcal{O}_1(X)$, $\mathcal{O}_2(X)$ について $\mathcal{O}_1(X) \subset \mathcal{O}_2(X)$ のとき $\mathcal{O}_2(X)$ を $\mathcal{O}_1(X)$ より強い位相，反対に $\mathcal{O}_1(X)$ を $\mathcal{O}_2(X)$ より弱い位相と呼ぶ．

密着位相はすべての位相の中で最弱の位相である．また離散位相はすべての位相の中で最強の位相である．

命題 3.8. $f : X \longrightarrow Y$ が連続な時，X の位相を強いものに取り換えても，また Y の位相を弱いものに取り換えても連続である．

命題 3.9. Y の位相が密着位相の時 $f : X \longrightarrow Y$ は連続である．また X の位相が離散位相の時 $f : X \longrightarrow Y$ は連続である．

命題 3.10. X の 2 つの位相 $\mathcal{O}_1(X)$ と $\mathcal{O}_2(X)$ について，恒等写像 $i : (X, \mathcal{O}_1(X)) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_2(X))$ が連続であることと，$\mathcal{O}_2(X)$ が $\mathcal{O}_1(X)$ より弱い位相であることは同値である．

定義 3.4. 例 3.6 での位相 $\mathcal{O}_l(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の通常の位相より弱い位相である．位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ 上の実数値関数 f が $f : (X, \mathcal{O}(X)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}_l(\mathbb{R}))$ の写像として連続な時上半連続という．

命題 3.11. 距離空間 (X, d) 上の関数が上半連続であることは，X の各点 a で次が成り立つことと同値である．

$$\forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (d(x,a) < \delta \Longrightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon))$$

例 3.12. ガウスの記号で定義される関数 $f(x) = [x] =$「x を超えない最大の整数」は上半連続である．

3.1.5 位相の基（開基）

定義 3.5. $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(X)$ が $\mathcal{O}(X)$ の基（開基）であるとは $U \in \mathcal{O}(X)$, $U \neq \emptyset$ が $\mathcal{B}$ の要素の（非可算無限個の）和集合として表されることを言う．

命題 3.13. $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(X)$ が $\mathcal{O}(X)$ の開基であることと次が成り立つことは，全ての空でない開集合 U について

$$\forall x \in U; (\exists V \in \mathcal{B}; (x \in V \subset U))$$

が成り立つことと同値である．

命題 3.14. 距離による位相空間 $(X, \mathcal{O}_d(X))$ と X で稠密な集合 A について $\mathcal{B} = \{B_{1/n}(a) \mid n \in \mathbb{N},\ a \in A\}$ は $\mathcal{O}_d(X)$ の基である．

命題 3.15. X の部分集合の族 $\mathcal{B}$ が

(1) 任意の $x \in X$ について $x \in V$ となる $V \in \mathcal{B}$ が存在する．
(2) $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ と $x \in V_1 \cap V_2$ について $x \in V \subset V_1 \cap V_2$, $V \in \mathcal{B}$ を満たす V が存在する．

という 2 つの条件を満たすとき，$\mathcal{B}$ の和集合（無限個でも良い）たちと空集合を合わせた集合の族は X の位相を定める．これを $\mathcal{O}(X)$ とおくとき，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(X)$ の開基になる．

例 3.16. X の部分集合の族 $\mathcal{B}_0$ について

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_0\text{の有限個の共通部分全体のなす集合の族}\} \cup \{X\}$$

は前の命題の条件を満たす．$\mathcal{B}$ を開基とする位相は $\mathcal{B}_0$ のすべての集合を開集合とする最弱の位相である．

3.2　相対位相，直積位相，等化位相

3.2.1　相対位相

定義 3.6. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ とその部分集合 $Y \subset X$ について

$$\mathcal{O}(Y) = \{V \subset Y \mid \exists U \in \mathcal{O}(X); V = U \cap Y\}$$

は Y の位相を定める．この位相を X の位相による相対位相と呼ぶ．また $(Y, \mathcal{O}(Y))$ を部分 (位相) 空間と呼ぶ．

命題 3.17. $\mathcal{O}(Y)$ は Y の位相である．

命題 3.18. 相対位相は包含写像 $i : Y \longrightarrow X$ が連続になるような最弱の位相である．

命題 3.19. 位相空間 $(Z, \mathcal{O}(Z))$ について，$g : Z \longrightarrow Y$ が連続であることと $i \circ g : Z \longrightarrow X$ が連続であることとは同値である．

3.2.2　直積位相

定義 3.7. 2 つの位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$, $(Y, \mathcal{O}(Y))$ について，$\mathcal{B} = \{U \times V \subset X \times Y \mid U \in \mathcal{O}(X), V \in \mathcal{O}(Y)\}$ を開基とする $X \times Y$ の位相を直積位相と呼ぶ．この $X \times Y$ を直積（位相）空間と呼ぶ．

命題 3.20. 直積位相に関して $W \subset X \times Y$ が開集合であることと次が成り立つことは同値である．

$$\forall (a, b) \in W;\ \exists U \in \mathcal{O}(X),\ V \in \mathcal{O}(Y);\ (a, b) \in U \times V \subset W$$

命題 3.21. (1) 直積位相に関して，射影 $p_X : X \times Y \longrightarrow X,\ p_X(x, y) = x$ は連続である．また $p_Y(x, y) = y$ も連続である．直積位相は $p_X,\ p_Y$ をともに連続にするような最弱の位相である．
(2) 位相空間 Z について $f : Z \longrightarrow X \times Y$ が連続であることと $p_X \circ f : Z \longrightarrow X$ と $p_Y \circ f : Z \longrightarrow Y$ がともに連続であることとは同値である．

例 3.22. $\mathbb{R}^n$ の通常の距離に関する位相は，$\mathbb{R}$ の n 個の直積としての直積位相と同じである．特に $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であることと n 個の成分関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ がすべて連続であることとは同値である．

3.2.3　等化位相

定義 3.8. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ からの全射 $f : X \longrightarrow Y$ について

$$\mathcal{O}(Y) = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)\}$$

は Y の位相を定める．これを等化位相と呼ぶ．

命題 3.23. (1) 等化位相は $f : X \longrightarrow Y$ が連続になるような Y の最強の位相である．
(2) 等化位相について $g : Y \longrightarrow Z$ が連続であることと，$g \circ f : X \longrightarrow Z$ が連続であることとは同値である．

位相空間 X に同値関係を定めた時，その商集合には射影 $p : X \longrightarrow X/\sim$ による等化位相が入る．これを商空間と呼ぶ．距離空間の商集合に自然な距離を定めることはできない．それに対して位相空間としてなら自然な位相が入る．これが距離空間よりも位相空間のほうが扱いやすい大きな理由である．

3.3 位相空間で考える基本的な性質

3.3.1 可算公理

定義 3.9. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が第二可算公理を満たすとは，可算個の開集合からなる開基を持つことを言う．

命題 3.24. (1)$(X, \mathcal{O}(X))$ が第二可算公理を満たす時，その部分空間も第二可算公理を満たす．
(2)$(X_1, \mathcal{O}(X_1))$, $(X_2, \mathcal{O}(X))$ がともに第二可算公理を満たすときその直積空間も第二可算公理を満たす．

第二可算公理を満たす位相空間から作られる等化空間の位相は第二可算公理を満たすとは限らない．

定義 3.10. 位相空間 $(X\mathcal{O}(X))$ について $A \subset X$ が稠密であるとは，任意の空でない開集合 $U \in \mathcal{O}(X)$ について $U \cap A \neq \emptyset$ が成り立つことを言う．位相空間が可分であるとは，稠密な可算集合を持つことをいう．

例 3.25. $\mathbb{R}^n$ は可分である．

命題 3.26. A が稠密であることと，$\overline{A} = X$ が成り立つことは同値である．

命題 3.27. (1) 可分な位相空間の直積空間は可分である．
(2) 可分な位相空間から作られる等化空間は可分である．

命題 3.28. 距離空間が位相空間として可分であれば，第二可算公理を満たす．

3.3.2 分離公理

定義 3.11. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ がハウスドルフ空間（あるいはハウスドルフの分離公理を満たす）であるとは各 $p, q \in X,\ p \neq q$ について $U,\ V \in \mathcal{O}(X)$ で $p \in U,\ q \in V,\ U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在することを言う．

この条件をより弱くしたりより強くしたりで様々な分離公理が存在するがまずはこの分離公理をきちんと扱えるようになってほしい．

例 3.29. 距離空間は位相空間としてハウスドルフ分離公理を満たす．2 点以上を含む密着位相を持つ位相空間はハウスドルフではない．すなわち距離空間としては得られない位相空間が存在する．

命題 3.30. ハウスドルフ位相空間においては一点のみからなる集合は閉集合である．1 点の補集合は開集合である．

定理 3.31. $(X, \mathcal{O}(X))$ がハウスドルフであることと，直積空間 $X \times X$ の中で対角線集合 $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ が閉集合であることは同値である．

定理 3.32. ハウスドルフ位相空間の部分空間はハウスドルフである．2 つのハウスドルフ空間の直積空間はハウスドルフである．

例 3.33. ハウスドルフ空間からの全射によって得られる等化空間はハウスドルフとは限らない．例えば $X = \mathbb{R}$ としその同値関係を

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in (-1, 1)$$

と定める．この同値関係による商集合に等化位相をいれたものを Y とする．Y は $X = \mathbb{R}$ において $(-1, 1)$ を一

点につぶした空間である．このとき $[0] \in Y$ と $[1] \in Y$ は開集合で分離できない．

3.3.3　連結

定義 3.12. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が連結であるとは，X を互いに交わらない 2 つの空でない開集合に分けられないことを言う．

$$X = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ U, V \in \mathcal{O}(X) \Longrightarrow U = X \text{ または } V = X$$

X の部分集合 A が連結であるとは，相対位相に関して連結なことを言う．

$$A \subset U \cup V,\ U \cap V \cap A = \emptyset,\ U, V \in \mathcal{O}(X) \Longrightarrow A \subset U \text{ または } A \subset V$$

定理 3.34. 連結集合の連続写像による像は連結である．

系 3.35 (中間値の定理)**.** 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ で定義された実数値連続関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ と，X の連結集合 A を考える．$a, b \in A$ とするとき f は A において $f(a)$ と $f(b)$ の間のあらゆる値をとる．

定義 3.13. 位相空間 X の任意の 2 点 x, y について連続写像 $C : [0, 1] \longrightarrow X$ で $C(0) = x,\ C(1) = y$ を満たすものが存在するとき X は弧状連結であるという．

命題 3.36. X が弧状連結なら連結である．

例 3.37. $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $X = \{(0, y) \mid y > 0\} \cup \{(x, 0) \mid x > 0\} \cup \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{(1/k, y) \mid y > 0\}\right\}$ は連結だが弧状連結ではない．

3.3.4　コンパクト

定義 3.14. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ とその部分集合 A について $\{U_\lambda\ \lambda \in \Lambda\}$ が A の開被覆であるとは $U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ かつ $A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が成り立つことを言う．

$K \subset X$ がコンパクト集合であるとは，K の任意の開被覆についてその有限個で K が覆えることを言う．X がコンパクト集合の時，X をコンパクト位相空間という．

例 3.38. 離散空間において，コンパクト集合は有限集合に限る．密着空間においてはどんな集合もコンパクトである．

命題 3.39. ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合である．

命題 3.40. 2 つの位相空間 $X,\ Y$ とそれぞれのコンパクト集合 $A,\ B$ について $A \times B$ は直積空間 $X \times Y$ のコンパクト集合である．

定理 3.41. 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ について X のコンパクト集合 A の像 $f(A)$ は Y のコンパクト集合である．

命題 3.42. コンパクト空間の閉集合はコンパクトである．

命題 3.43. コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な全単射は同相写像である．

3.3.5　局所コンパクト空間

定義 3.15. 位相空間 X の各点がコンパクトな近傍を持つとき X を局所コンパクト空間という．

3.4　コンパクト性と点列コンパクト性

距離空間は位相空間としてハウスドルフ空間であることはすでに述べた．ここでは位相空間のコンパクト性と距離空間の点列コンパクト性の関連を述べる．

定義 3.16. 距離空間 (X, d) が全有界であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ について X が有限個の ε 近傍で覆われることを言う．

命題 3.44. 点列コンパクト空間は全有界である．

命題 3.45. 全有界な距離空間は可算稠密集合を持つ（可分である）．

定理 3.46. 距離空間が点列コンパクトであることと，位相空間としてコンパクトであることとは同値である．

命題 3.47. 距離空間の部分集合がコンパクト集合ならば有界閉集合である．

命題 3.48. $\mathbb{R}^n$ の部分集合について，コンパクトであることと有界閉集合であることとは同値である．