

2012年8月8日

熊本大学オープンキャンパス 模擬授業

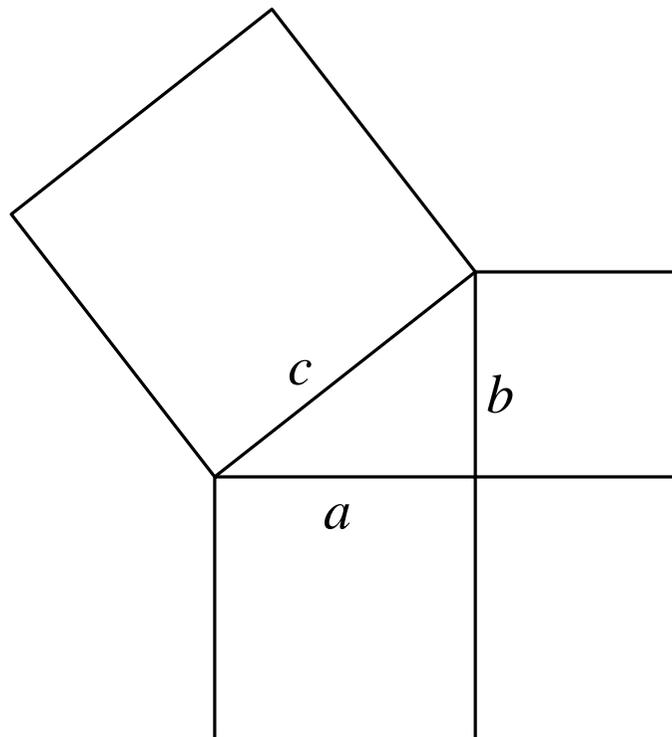
# 三平方の定理をめぐって

熊本大学理学部理学科

井上尚夫

三平方の定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$



プリンプトン文書 322 (B.C.1900～1600 頃)



この楔形文字による粘土板文書はノイゲバウアーによって解読され、数字を並べた表であることが分かった。この第2列と第3列の数字を並べてみると、

a	c
119	169
3367	4825
4601	6649
12709	18541
65	97
319	481
2291	3541
799	1249
481	769
4961	8161
2700	4500
1679	2929
161	289
1771	3229
56	106

- 
1.  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  はすべて整数である.
  2.  $b$  の素因数は, 2, 3, 5 のみである.
  3. 60 進法では  $\frac{c^2}{b^2}$  は有限小数になる.
  4. プリンプトン文書 322 の第一列は  $\frac{c^2}{b^2}$  の正確な値である.

さて, 配列の妙を見るために  $a, b, c$  の作る直角三角形の角度を求めてみよう.

a	b	c	角度
119	120	169	44.76
3367	3456	4825	44.25
4601	4800	6649	43.79
12709	13500	18541	43.27
65	72	97	42.08
319	360	481	41.54
2291	2700	3541	40.32
799	960	1249	39.77
481	600	769	38.72
4961	6480	8161	37.44
2700	3600	4500	36.87
1679	2400	2929	34.98
161	240	289	33.86
1771	2700	3229	33.26
56	90	106	31.89

この粘土板を書いた古代バビロニア人が理解していたこと

- 三平方の定理
- $a = (p^2 - q^2)$ ,  $b = 2pq$ ,  $c = (p^2 + q^2)$  が直角三角形の3辺になること
- 60進法による高度な計算能力

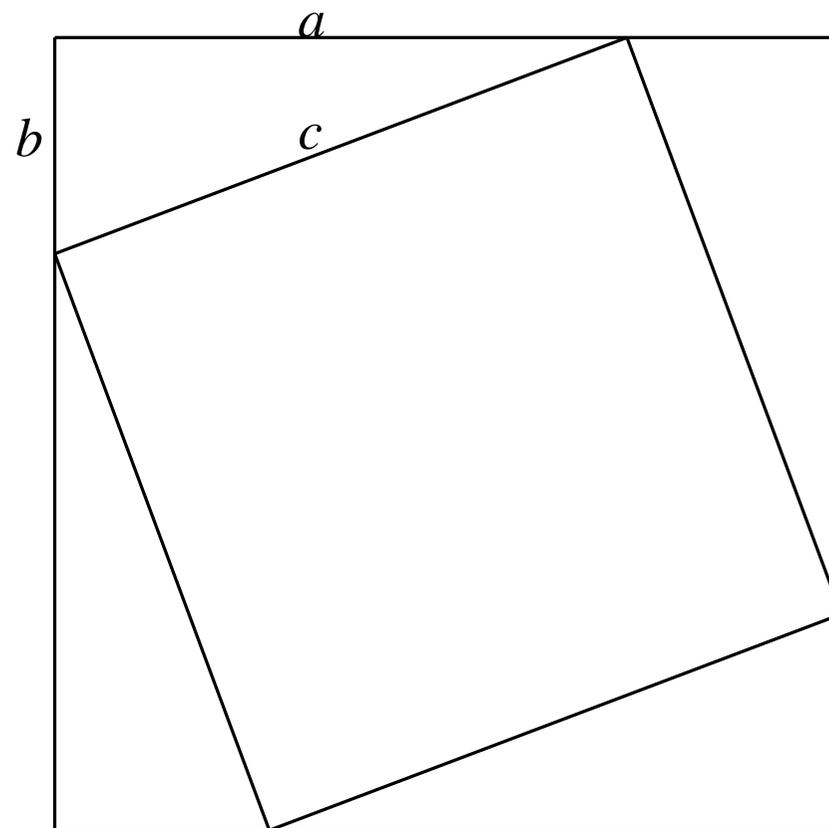
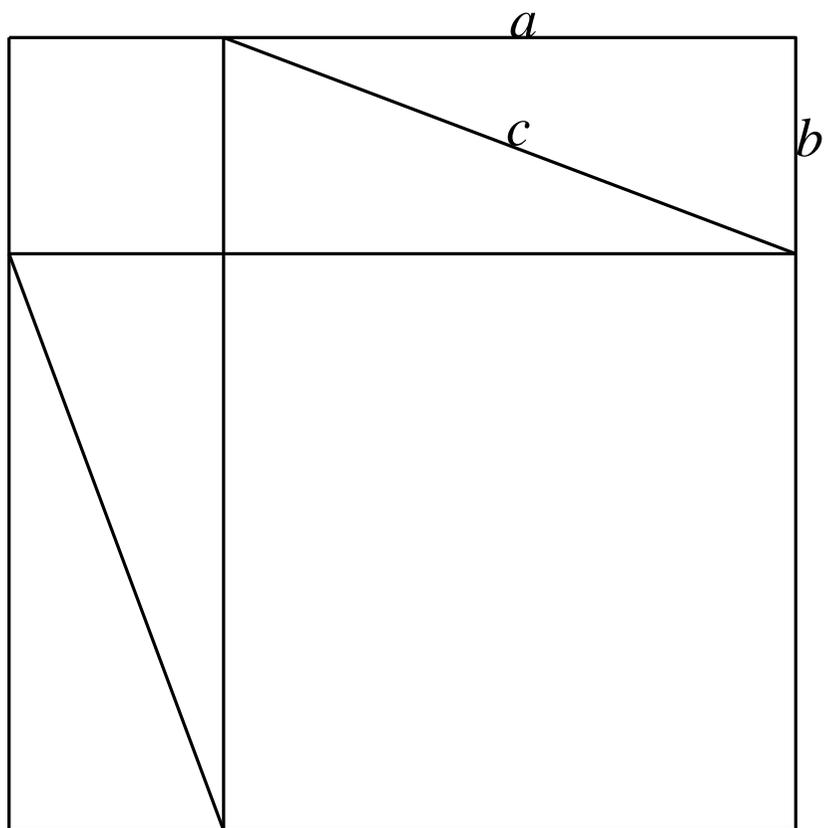
しかしこのバビロニア人に三平方の定理は何故成立するのかと聞いたらなんと答えるだろうか？

**答え方1** 事実だからとにかく信じなさい.

**答え方2** 成立する理由を論理的に説明する. **証明**

数学的事実に証明をつける習慣が最初に確認できるのは古代ギリシャ

古代ギリシャの証明（紀元前 6 世紀）



- 23 個の定義，14 個の公理から議論を始め，47 番目の定理として三平方の定理を，48 番目の定理として三平方の定理の逆を証明した．
- 当時の数学的知識を体系化した全 13 巻の書物であり，上の内容はこの第 1 巻
- ルネサンス以降，西欧では人類の理性の最大の成果とされていた．ニュートンは著書「プリンキピア」を原論の体裁にしたがって著述した．
- 19 世紀になってもイギリスの一部の学校では教科書として使われていた．
- 歴史上聖書の次に読まれた本と言われている．

ユークリッド原論に多くの人が感じた疑問

平行線の公理「一つの直線が二つの直線と交わる時、その一方の側にできる二つの角をあわせて2直角よりも小さくなれば、二つの直線はその側で交わる。」は万人が認める自明な事実とは思えない。何とか証明できないだろうか。

19世紀にロバチェフスキーとボヤイが解決する。

平行線の公理を否定して得られる幾何学（非ユークリッド幾何学）も完全に合理的な幾何学であり、矛盾は生じない。平行線の公理を他の公理から証明することはできない。

- ユークリッドによる幾何学の体系化
- 理論への疑問（平行線公理問題）
- ロバチェフスキーとボヤイによる解決
- 平行線の公理は図形の存在する空間が平坦だということを表している．三平方の定理は平坦な世界でないと成立しないので，平行線の公理が必要！例えば地球（球面）上で一辺が 10000km の直角二等辺三角形の斜辺の長さは？

- 幾何学に対する認識の大転換：「図形」から「図形の入っている空間」に関心が移る.
- 様々に曲がった空間の幾何学としてリーマン幾何学が成立する.
- 一般相対性理論（時空は物質によって様々に曲がっている）はリーマン幾何学によって記述される.



断片的な知識を体系化することにより新たな疑問が生まれる。その解決から新しい理論が誕生する。そしてそのような新しい理論が数学以外の学問に実際に応用される。このようにして数学は他の学問とも関連しながら日々発展を続けている。皆さんも大学で数学を学んでみませんか。