# 幾何学特論 III 講義ノート

## 1　微分可能多様体とベクトル束

### 1.1　多様体の定義とベクトル場

微分可能多様体[*1]の復習をかねて用語と記号をまとめておく．$M$ が $n$ 次元微分可能多様体であるとは局所的にユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相なハウスドルフ位相空間であり，局所座標系によって微分可能性が定義されるものである．微分可能関数全体の集合を $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ と表し，多様体 $M$ から多様体 $N$ への微分可能写像全体の集合を $C^\infty(M, N)$ と表す．

$p \in M$ において $T_pM$ とは 線形写像 $v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ であって

$$v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$$

を満たすもの全体の集合を言う．$T_pM$ の要素を $p$ における接ベクトルと呼ぶ．

**命題 1.1.** $p$ の近傍で $f(x) = g(x)$ であれば $v(f) = v(g)$ が成り立つ．

証明. $h \in C^\infty(M)$ を $h(p) = 1$ かつ $p$ の近傍の外側で恒等的に 0 になるようにとる．$h(f - g) = 0$ より $v(h(f - g)) = 0$ である．これより

$$v(h(f - g)) = v(h)(f - g)(p) + h(p)v(f - g) = v(f) - v(g) = 0$$

□

$p \in M$ の周りの座標近傍系 $(U, x^1, \dots, x^n)$ [*2]をとる．上の命題から $v \in T_pM$ は $v : C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ であり $v^j = v(x^j)$ とおけば

$$v(f) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$$

と表せる[*3]．$T_pM$ は $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p,\ 1 \leqq j \leqq n \right\}$ を基底とする $n$ 次元線形空間である．

$\phi : M \longrightarrow N$ に対して $\phi$ の微分を

$$(\phi_*)_p = d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}N, \qquad \Big((\phi_*)_p v\Big)(g) = v(g \circ \phi),\ \text{ただし}\ g \in C^\infty(N)$$

で定める．局所座標系のもとでは Jacobi 行列の定める線形写像に他ならない．

$M$ 上のベクトル場とは線形写像 $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ であって

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

を満たすものを言う． 定義から $X_p(f) = X(f)(p)$ は点 $p$ における接ベクトルである．ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と表す．$X \in \mathfrak{X}(M)$ は座標近傍 $U$ においては

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad X^j \in C^\infty(U)$$

と表せる．$\phi : M \longrightarrow N$ が微分同相写像のときは $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\phi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ となるので

$$\phi_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N), \qquad \phi_*(X)(g) = X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1},\ g \in C^\infty(N)$$

---

[*1] この講義で微分可能とは無限回微分可能 ($C^\infty$ 級) のことを意味する．
[*2] 座標系の添え字は右肩につけるのがリーマン幾何の習慣である．これによって計算の見通しが立てやすくなる．
[*3] このように多様体の概念は局所座標系を使わない形と，局所座標系による表示の両方を抑えておく必要がある．

なる線形写像が定義できる．微分同相写像でないときはこの写像は意味を持たない．

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について，$XY$ は 2 階偏微分作用素になるのでベクトル場にはならない．しかし，

$$(XY - YX)(fg) == (XY - YX)(f)g + f(XY - YX)(g)$$

なので，$XY - YX$ はベクトル場である．これを Lie ブラケットとよび $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$ と表す．

## 1.2 ベクトル空間とテンソル

有限次元ベクトル空間*4 $V$ と $W$ について，その基底を $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ とおく．ベクトル空間のテンソル積 $V \otimes W$ とは $\{e_i \otimes f_j\}$ たちを基底とする $rs$ 次元ベクトル空間*5である．$v \in V$ と $w \in W$ のテンソル積は

$$v \otimes w = \left(\sum_i v^i e_i\right) \otimes \left(\sum_i w^j f_j\right) = \sum_{i,j} v^i w^j e_i \otimes f_j$$

と基底の一次結合で表せる．

$V$ の双対空間を $V^*$ と表す．$\varphi \otimes v \in V^* \otimes V$ に対し $\varphi(v) \in \mathbb{R}$ を対応させることを縮約 (contraction) という．縮約は $V^* \otimes V$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である．$V \otimes V^*$ についても同様に定める．線形写像 $\varphi : W \longrightarrow V$ について $\varphi(f_j) = \sum_i a_{ij} e_i$ とおけば $\varphi$ は

$$\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes f_j^* \in V \otimes W^*$$

とテンソル空間の要素とみなせる．$\varphi(w)$ は $\varphi$ の第二成分と $w$ の縮約である．ここで $\{f_j^*\}$ は $\{f_j\}$ の双対基底である．

多重線形写像 $\varphi : W \times W \times \cdots \times W \longrightarrow V$ は $W \otimes W \otimes \cdots \otimes W$ から $V$ への線形写像となる．すなわち $V \otimes W^* \otimes W^* \otimes \cdots \otimes W^*$ の要素である．

$V$ の $r$ 個のテンソル積の要素 $\sum a_{j_1 j_2 \cdots j_p} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_r}$ について，係数が $\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ について対称なとき対称テンソル，交代なとき，すなわち順序が変わると $-1$ 倍されるとき交代テンソルと呼ぶ．交代テンソルについては

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r = \sum \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_r}$$

という記号が使われる．

**問題 1.** $n$ 次元ベクトル空間 $V$ について，その $r$ 次交代テンソルの全体は ${}_nC_r$ 次元の線形空間であることを示せ．特に $r > n$ の場合には 0 元のみしかないことを示せ．

以下の記号はよく使われる．

$$\otimes^r V, \qquad \wedge^r V, \qquad \wedge V = \oplus_{r=0}^n \wedge^r V$$

なお，最後の直和において $\wedge^0 V = \mathbb{R}$ とみなす．

## 1.3 ベクトル束

$M$ を $n$ 次元微分可能多様体，$E$ を $n + r$ 次元微分可能多様体とする．

**定義 1.2.** 全射微分可能写像 $\pi : E \longrightarrow M$ がベクトル束であるとは次が成り立つことを言う．

---

*4 この講義ではスカラーは実数のみを扱う．ゆえにこれは実線形空間のことである．

*5 これは厳密な定義ではないが，とりあえずこのように理解しておけば問題ない．また $V \otimes W$ と $W \otimes V$ は同型ではあるが別の線形空間である．

(1) $\forall p \in M$ について $\pi^{-1}(p) = E_p$ は $r$ 次元実線形空間の構造を持つ．この $E_p$ をファイバーとよぶ.

(2) $\forall p \in M$ について $p$ の開近傍 $U$ と微分同相写像 $\Phi : U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ で次を満たすものが取れる.

$$\pi \circ \Phi(x, \boldsymbol{u}) = x, \qquad \Phi_{|\{x\}\times\mathbb{R}^r} : \mathbb{R}^r \longrightarrow E_x \text{は線形写像}$$

$\boldsymbol{e}_i$ を第 $i$ 基本列ベクトルとし，$\Phi(x, \boldsymbol{e}_i) = e_i(x)$ とおけば

(1) $e_i : U \longrightarrow \pi^{-1}(U) \subset E$ は $C^\infty$ 級である.

(2) $\{e_1(x), e_2(x), \ldots, e_r(x)\}$ は $E_x$ の基底である.

が成り立つ．このようなものを局所枠（local frame field）と呼ぶ．逆に局所枠が与えられれば，ベクトル束の定義の (2) を満たす $\Phi$ が構成できる．ベクトル束の構造を定めるには，局所枠の作り方を定めてやれば良い.

微分可能写像 $s : M \longrightarrow E$ が $s(x) \in E_x$ を満たすとき，すなわち $\pi \circ s = I_M$(恒等写像) を満たすとき．$E$ の断面 (cross section) と呼ぶ．$E$ の断面全体の集合を $\Gamma(E)$ と表す．これは $C^\infty(M)$-加群の構造を持つ.

**例 1.** $TM = \cup_p T_pM$ はベクトル束である．これを接束 (tangent bundle) と呼ぶ．局所枠は局所座標系によって与えられる．同様に $T^*M = \cup_p T_p^*M$ を余接束 (cotangent bundle) と呼ぶ．ベクトル空間 $V$ について $M \times V$ もベクトル束である．これを自明束 (trivial bundle) と呼ぶ.

接束の $TM$ の断面はベクトル場に他ならず $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ である．また余接束 $T^*M$ の断面を 1 次微分形式と呼び $\Gamma(T^*M) = A^1(M)$ と表す．自明束の断面は $M$ から $V$ への滑らかな写像 $C^\infty(M, V)$ に他ならない.

**例 2.** $1 \leqq r \leqq n$ と $p \in M$ について，$\wedge^r(T_p^*M)$ をファイバーとするベクトル束を $\wedge^r M$ と表す．$\Gamma(\wedge^r M) = A^r(M)$ と表し，その要素を $r$ 次微分形式とよぶ.

$M$ 上の二つのベクトル束 $\pi_1 : E \longrightarrow M$ と $\pi_2 : F \longrightarrow M$ が与えられたとき，$E_p \otimes F_q$ をファイバーとするベクトル束 $\pi : E \otimes F \longrightarrow M$ が定義できる．$\Gamma(E \otimes F)$ の要素は局所的に

$$\sum a_{ij} e_i \otimes f_j$$

と表示できる.

**命題 1.3.** $\Gamma(F \otimes E^*)$ の要素は $\Gamma(E)$ から $\Gamma(F)$ への $C^\infty(M)$ 線形写像である．逆も成り立つ．特に $\Gamma(E^*)$ の要素は $\Gamma(E)$ から $C^\infty(M)$ への $C^\infty(M)$ 線形写像である.

証明. 線形写像 $\alpha : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ が $\alpha(fs) = f\alpha(s)$ を満たすとする．命題 1.1 と同じ議論で，$\alpha(s)$ 局所枠によって計算できる．$E$ の局所枠を $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$，$F$ の局所枠を $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ とすれば,

$$\alpha(s) = \alpha\left(\sum_j s^j e_j\right) = \sum s^j \alpha(e_j) = \sum s^j a_j^k f_k$$

なので,

$$\alpha = \sum a_j^k f_k \otimes (e_j)^* \in \Gamma(F \otimes E^*)$$

□

## 1.4 ベクトル束の接続

$D : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$,　$D(X, s) = D_X s$ がベクトル束 $\pi : E \longrightarrow M$ の接続であるとは

$$(1) D_{X_1+X_2} s = D_{X_1} s + D_{X_2} s, \qquad D_X(s_1 + s_2) = D_X s_1 + D_X s_2$$
$$(2) D_{fX} s = f D_X s, \qquad D_X(fs) = X(f)s + f D_X s$$

を満たすことを言う.

**命題 1.4.** $p \in M$ について，$D_X s(p)$ は $X(p)$ の値と $s(x)$ の $p$ のまわりでの振る舞いにしかよらない.

証明. 定義の (2) より，$X$ については $C^\infty(M)$ 線形なので命題 1.3 の証明と同じ議論で $X(p)$ の値にしかよらないことがわかる．また $s$ の関数倍については積の微分則が成り立つので命題 1.1 の証明と同じ議論で $s(x)$ の $p$ のまわりでの振る舞いにしかよらないことがわかる． □

座標近傍 $U$ を十分小さく取って局所座標系 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ と局所枠 $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ をとり

$$D_{\partial_j} e_a = \sum_b D^b_{ja} e_b, \qquad D^b_{ja} \in C^\infty(U)^{*6}$$

とおけば $X = \sum X^j \partial_j$ と $s = \sum s^a e_a$ について

$$D_X s = \sum_{jb} \left( X^j \partial_j s^b + \sum_a X^j s^a D^b_{ja} \right) e_b$$

と表せる． $D^b_{ja}$ を接続 $D$ の接続係数と呼ぶ.

ベクトル束 $\pi : E \longrightarrow M$ に接続 $D$ が与えられているとき，その双対ベクトル束 $\pi' : E^* \longrightarrow M$ にも次により接続 $D$ を定めることができる．$s \in \Gamma(E)$ と $\alpha \in \Gamma(E^*)$ について $\alpha(s) \in C^\infty(M)$ である．そこで $X \in \mathfrak{X}(M)$ について $D_X\alpha$ を

$$X(\alpha(s)) = (D_X\alpha)(s) + \alpha(D_X s) \in C^\infty(M)$$

によって定めれば良い.

同じように二つのベクトル束に接続が与えられたとき，そのテンソル積にも接続を定めることができる.

$$D_X(\alpha \otimes \beta) = (D_X\alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (D_X\beta)$$

基本はライプニッツの公式（積の微分法則）である.

**命題 1.5.** 上記で述べた $D : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E^*)$ および $D : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E \otimes F) \longrightarrow \Gamma(E \otimes F)$ が接続であることを示せ.

# 2　リーマン多様体

## 2.1　リーマン計量

多様体 $M$ について $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ が各点 $p$ における接空間 $T_pM$ の内積（正値対称二次形式）$g_p$ を定めるとき $g$ を $M$ 上のリーマン計量という．多様体とその上のリーマン計量の組 $(M, g)$ をリーマン多様体という．$g$ は局所座標系により

$$g = \sum g_{ij} dx^i\, dx^j, \quad g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$$

と表される.

**例 3.** $\mathbb{R}^n$ は標準内積 $g_0 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ によりリーマン多様体になる.

**例 4.** $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S$ に局所座標系 $(U, \{u, v\})$ を入れる．これにより $U$ 上の点の座標 $\boldsymbol{x}$ は $U$ 上の 2 変数関数 $\boldsymbol{x}(u, v)$ とみなせる．曲面のリーマン計量は $E = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u$, $F = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v$, $F = \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v$ とおいて

$$g = E du\, du + 2F du\, dv + G dv\, dv$$

となる．これは $ds^2$ とも表される.

*6 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ を簡単のため単に $\partial_j$ と表す.

$(N, h)$ をリーマン多様体とし，$\Phi : M \longrightarrow N$ を挿入，すなわち各点で $\Phi_{*p}$ が単射であるとする．

$$g_p(u, v) = h(\Phi_{*p}v, \Phi_{*p}v)$$

と定めれば $g$ は $M$ 上のリーマン計量になる．$g = \Phi^*h$ と表し，$\Phi$ による誘導計量 (induced metric) と呼ぶ．

**例 5.** $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とする．$(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ から包含写像 $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ により誘導されるリーマン計量 $i^*g_0$ を $S^n$ の標準計量と呼ぶ．

**定理 2.1.** パラコンパクト多様体上にはリーマン計量を定めることができる．

証明. $M$ の座標近傍による開被覆を作る．パラコンパクト性からその局所有限な細分を作る．

$$M = \cup_\lambda U_\lambda, \qquad (x^1_\lambda, x^2_\lambda, \ldots, x^n_\lambda)$$

$\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ を

- $0 \leqq \varphi_\lambda(x) \leqq 1$
- $\{x \in M \mid \varphi_\lambda(x) \neq 0\}$ の閉包[*7] $C_\lambda$ について $C_\lambda \subset U_\lambda$
- $\sum_\lambda \varphi_\lambda(x) \equiv 1$

が成り立つように取る[*8]．ここで開被覆の局所有限性から和は各点の近傍で有限和であり，収束性を考慮することなしに定義できる．さて，$U_\lambda$ 上のリーマン計量 $g_\lambda$ を局所座標によるユークリッド計量としてとり $g = \sum \varphi_\lambda g_\lambda$ と定めれば，正定値性が保証され $M$ のリーマン計量になる． □

二つのリーマン多様体の間の写像 $\Phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ について $g = \Phi^*h$ が成り立つとき $\Phi$ は挿入になる．これを等長挿入 (isometric immersion) と言う．さらに $\Phi$ が微分同相写像であるとき等長写像 (isometry) と呼ぶ．

リーマン多様体 $(M, g)$ 内の区分的に滑らかな曲線 $C : [a, b] \longrightarrow M$ に対して

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{dC}{dt}, \frac{dC}{dt}\right)}dt$$

を $C$ の長さという．$M$ の 2 点 $p, q$ に対して

$$d(p, q) = \inf \{L(C) \mid C \text{ は } p \text{ と } q \text{ を両端とする区分的 } C^\infty \text{ 級曲線}\}$$

と定める．

**問題 2.** $d$ は多様体 $M$ 上の距離になることを示せ．

## 2.2 リーマン接続

接束 $TM$ の接続 $\nabla$ がリーマン多様体 $(M, g)$ のリーマン接続であるとは

$$(1) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (2) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

が任意のベクトル場について成り立つことを言う．(1) は $\nabla_X g = 0$ と同値であり接続が計量を保存することを意味している．(2) の性質は torsion free と呼ばれる．

---

[*7] 一般にこの集合を関数の台 (support) とよぶ．

[*8] 1 の分割という．詳細は省略する．

さて (1)(2) の条件から次の等式を得る．

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\}$$

この右辺は接続によらないので，これから次の定理を得る．

**定理 2.2.** リーマン多様体 $(M, g)$ にはリーマン接続が唯一存在する．その接続係数は

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_h g^{kh}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right)$$

で与えられる．ここで $g^{kh}$ は 正値対称行列 $(g_{ij})$ の逆行列の成分を表す．$\Gamma^k_{ij}$ をクリストッフェルの記号と呼ぶ．

接続の性質から $v \in T_pM$ に対して $\nabla_v X \in T_pM$ が定まる．これを $X$ の $v$ による共変微分と呼ぶ．リーマン多様体の共変微分を直接計算することは大変である．ただし，ユークリッド空間およびその部分リーマン多様体のときは次の命題から簡単に計算できる．

**命題 2.3.** (1) $\mathbb{R}^m$ の通常の計量と直交座標系について $\Gamma^k_{ij} = 0$.
(2) $(M, g)$ を $\mathbb{R}^m$ の部分リーマン多様体とする．$v \in T_pM$ に対して $\nabla_v X$ は $\mathbb{R}^m$ での共変微分 $\overline{\nabla}_v X$ を $T_pM$ に直交射影したベクトルである．

滑らかな曲線 $C : [a, b] \longrightarrow M$ と $C$ に沿ったベクトル場 $X(t) \in T_{C(t)}M$ が与えられたとき $X(t)$ を $\dot{C}$ によって共変微分できる．これを $\dfrac{D}{dt}X$ と表すことにしよう．局所座標系においては

$$\frac{D}{dt}X = \sum\left(\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}X^jX^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

である．$\dfrac{D}{dt}X$ が常に 0 ベクトルであるとき，$X$ は $C$ に沿って平行であるという．平行ベクトル場は常微分方程式の解として与えられるので，任意の初期値に対して解を持つ．また $C$ に沿った平行移動も定義できる．

**問題 3.** リーマン接続による平行移動は内積を保存することを示せ．

## 2.3　測地線

$(M, g)$ をリーマン多様体，$p, q$ をその 2 点とする．区分的 $C^\infty$ 級曲線の集合

$$\mathfrak{C}_{pq} = \{C : [0,1] \longrightarrow M \mid C(0) = p,\ C(1) = q,\ C \text{ は区分的に滑らか}\}$$

上の 2 つの汎関数

$$E(C) = \int_0^1 g\left(\dot{C}, \dot{C}\right)dt, \quad L(C) = \int_0^1 \sqrt{g\left(\dot{C}, \dot{C}\right)}dt$$

について Cauchy-Schwarz の不等式を使えば次が得られる．

$$E(C) \geq L(C)^2, \quad \text{等号は } \|\dot{C}\| \text{ が一定のときに限り成立}$$

**命題 2.4.** (1) $\inf\{E(C) \mid C \in \mathfrak{C}_{pq}\} = d(p, q)^2$
(2) $C$ が $E(C)$ の最小値を実現することと，$C$ が $p, q$ を結ぶ最短線であってかつ速度ベクトルの大きさが一定であることは同値である．

$E(C)$ を曲線 $C$ のエネルギーという．この命題から最短線を求めるにはエネルギーを最小にする曲線を求めれば良いことがわかる．

$C \in \mathfrak{C}_{pq}$ について $\{C_s \in \mathfrak{C}_{pq} | -\epsilon < s < \epsilon\}$ が $C_0 = C$ でありかつ

$$\overline{C} : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \longrightarrow M, \quad \overline{C}(s,t) = C_s(t)$$

で定められる写像 $\overline{C}$ が $C^\infty$ 級であるとき $C$ の変分[*9]と呼ぶ．$C$ のあらゆる変分に対して $\left.\dfrac{d}{ds}E(C_s)\right|_{s=0} = 0$ となるとき $C$ を**測地線**という．最短線のパラメーターを等速度になるようにとれば測地線[*10]である．

**定理 2.5.** (1) $C : [a,b] \longrightarrow M$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\frac{D}{dt}\dot{C} = 0.$$

(2) 任意の接ベクトル $v \in T_pM$ に対して，$\dot{C}(0) = v$ となる測地線が定義区間の取り方を除いて一意に存在する．

(1) から測地線が局所座標系では二階常微分方程式の解曲線であることが分かる．常微分方程式の一般論から (2) が成り立つ．

**例 6.** $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | \|x\| = 1\}$ の測地線は大円 (2 次元部分空間と $S^m$ の共通部分) である．

球面の測地線は，長さ $\pi$ 以下なら最短線になる．一般に測地線は最短線ではないが測地線上の充分近い 2 点の間では最短線になる．

## 2.4 曲率

リーマン多様体 $(M, g)$ の三つのベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

と定める．接続の性質から $X$, $Y$, $Z$ の関数倍は外に出る．よって $R$ は (1, 3) 型テンソル場であり曲率テンソルと呼ばれる．

**定理 2.6.** (1) $R$ は $M$ の各点において多重線形写像

$$R : T_pM \otimes T_pM \otimes T_pM \longrightarrow T_pM$$

を定める．
(2) $R$ について次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} R(u,v)w &= -R(v,u)w \\ R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v &= 0 \\ g(R(u,v)w,t) &= -g(w, R(u,v)t) \\ g(R(u,v)w,t) &= g(R(w,t)u,v) \end{aligned}$$

**問題 4.** $R$ を局所座標系により

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_l R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

と表すとき，$R^l_{ijk}$ を $\Gamma^a_{bc}$ を用いて表せ．

曲率テンソルからリーマン多様体の曲率が次のように定義される．

---

[*9] 直感的には $\mathfrak{C}_{pq}$ において $C$ を通る $C^\infty$ 級曲線のことである．

[*10] ここでの議論は曲線を区間 $[0,1]$ 上で考えているが測地線は一般の区間で定義される．

**定義 2.7.** (1) $T_pM$ の 2 次元部分空間 $H$ に対して，次の $K(H)$ を**断面曲率**という．

$$K(H) = g(R(u,v)v,u), \quad u,v \in H,\ g(u,u) = g(v,v) = 1,\ g(u,v) = 0.$$

(2) $T_pM$ の正規直交基底を $\{e_1,\ e_2, \ldots,\ e_n\}$ とおくとき，

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{j=1}^{n} g(R(v,e_j)e_j,w)$$

を**リッチテンソル**という．これは対称テンソルである．

単位ベクトル $v$ に対して，次の $\mathrm{Ric}(v,v)$ を $v$ 方向の**リッチ曲率**という．

(3) $p \in M$ に対して，次の $S(p)$ を点 $p$ での**スカラー曲率**という．

$$S(p) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Ric}(e_j,e_j)$$

定義からリッチ曲率 $\mathrm{Ric}(v)$ は $v$ を含む $T_pM$ の 2 次元部分空間の断面曲率の平均（の $n-1$ 倍）である．スカラー曲率は $T_pM$ でのリッチ曲率の平均であり，$p$ でのすべての断面曲率の平均である．特に 2 次元リーマン多様体においては本質的にすべて同一であり，**ガウス曲率**と呼ばれる．

**問題 5.** $(-c,c)\times(0,a)$ 上のリーマン計量 $g = dx^2 + f^2(x)dy^2$ のガウス曲率を求めよ．ただし $f(x) > 0$ とする．

$\nabla R = 0$ が成り立つとき $(M,g)$ を**局所対称空間**という．リッチ曲率が一定なときすなわちリッチテンソルが計量テンソルの定数倍になるとき，$(M,g)$ を**アインシュタイン多様体**という．$n \geq 3$ の場合には，リッチテンソルが計量テンソルの関数倍になればアインシュタインになる．3 次元アインシュタイン多様体は定曲率空間になる．

# 3　曲率と位相

## 3.1　完備性，指数写像

リーマン多様体 $(M,g)$ を考える．$M$ 上の点 $p \in M$ と接ベクトル $v \in T_pM$ について $v$ を初期値とする測地線 $\gamma_v$ が $[0,1]$ を含む区間で定義されているとき

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1)$$

と定める．$\exp_p$ を点 $p$ における指数写像という．常微分方程式の解についての一般論と，$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$ から次が成り立つ．

**命題 3.1.** $T_pM$ の 0 の近傍 $U$ で，$\exp_p$ を $U$ に制限したとき微分同相写像になるものが存在する．

さらに次が成り立つ．

**定理 3.2** (Hopf-Rinow)**.** 連結リーマン多様体 $(M,g)$ について次は同値である．

(1) 距離空間として完備である．

(2) $\exp_p$ が $T_pM$ 上定義できるような点 $p \in M$ が存在する．

(3) $M$ の任意の点で $\exp_p$ は $T_pM$ 上定義できる．

## 3.2 指数写像の微分と Jacobi 場

$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ の $v \in T_pM$ における微分を考えたい．そのためには $v$ を通る $T_pM$ 内の曲線（直線）$\{v + sw \mid s \in \mathbb{R}\}$ の $\exp_p$ による像曲線の $s = 0$ における接ベクトルを求めればよい．そのため

$$C : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \longrightarrow M, \qquad C(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

を考える．

$$\exp_p(v) = q, \quad \gamma(t) = C(0, t), \quad Y(t) = C_* \frac{\partial}{\partial s}(0, t)$$

とおけば，$Y$ は $p$ と $q$ を結ぶ測地線 $\gamma$ に沿ったベクトル場である．これについて次の等式が成り立つ．

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} Y + R(Y, \dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

これは 2 階の常微分方程式であり，Jacobi の微分方程式という．またその解を測地線 $\gamma$ に沿った Jacobi ベクトル場という．上で定めた $Y$ は初期条件

$$Y(0) = 0,\ \nabla_{\dot\gamma} Y(0) = w$$

を満たすので，微分方程式を解けば解が求められる．指数写像の微分は次式で与えられる．

$$(\exp_p)_{*v}(w) = Y(1)$$

さて，指数写像 $\exp_p$ の微分が $v \in T_pM$ で退化しているとき，測地線 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ に沿った Jacobi ベクトル場で $p$ および $q = \exp_p(v)$ で消えるものがある．このとき，$p$ は $q$ と測地線 $\gamma$ に沿って共役であるという．$q$ を $p$ の共役点という．このとき $p$ は $q$ の共役点である．

**例 7.** $\mathbb{R}^3$ 内の半径 1 の球面において，$N = (0, 0, 1)$ と $S = (0, 0, -1)$ は共役である．

共役点と最短性について次が成り立つ．

**命題 3.3.** $\gamma(t),\ (0 \leqq t \leqq l)$ が $p$ から $q$ への最短測地線であれば，$p(t),\ 0 < t < l$ は $\gamma$ に沿って $p$ と共役ではない．

この逆が成り立たないことは次の命題から分る．

**命題 3.4.** 非正曲率多様体（断面曲率がすべて 0 または負のリーマン多様体）においては，共役点は存在しない．

証明には $Y(0) = 0,\ \nabla_{\dot\gamma} Y \neq 0$ を満たす Jacobi ベクトル場について $\|Y\|^2$ の 2 階微分が非負であることを示せばよい．

完備連結非正曲率多様体において，$T_pM$ は $\mathbb{R}^n$ と同相なので $\exp_p$ が被覆写像になる．

**定理 3.5** (Cartan-Hadamard)**.** 完備連結非正曲率リーマン多様体 $(M,\ g)$ について，$M$ の普遍被覆は $\mathbb{R}^m$ と微分同相である．特に，$M$ の 2 次元以上のホモトピー群はすべて 0 になる．

**問題 6.** ユークリッド空間内の半径 1 の球面 $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ において，北極 $(0, 0, 1)$ からみた測地写像を具体的に書き下せ．また北極からの共役点を決定せよ．

## 3.3 指数形式

$(M, g)$ を完備リーマン多様体とし，$pq$ をその 2 点とする．

$$\gamma : [0, l] \longrightarrow M,\ \gamma(0) = p, \gamma(l) = q$$

を 2 点を結ぶ長さ $l$ の測地線とし，$\gamma$ に沿った滑らかなベクトル場で，両端で 0 になるもの全体の集合を $\mathcal{V}$ とおく．

$$V \in \mathcal{V} \Longleftrightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)}M,\ V(0) = 0,\ V(l) = 0\ V \text{ は } C^\infty$$

$\mathcal{V}$ は線型空間であり，その上の二次形式を

$$I(V, W) = \int_0^l \left\langle \nabla_{\dot\gamma} V, \nabla_{\dot\gamma} W \right\rangle + \langle R(V, \dot\gamma)W, \dot\gamma\rangle\, dt$$

と定める．$I$ を指数形式と呼ぶ．

**命題 3.6.** 指数形式について次が成り立つ．
(1) $p$ と $q$ が $\gamma$ に沿って共役なことと，すべての $W \in \mathcal{V}$ について $I(V, W) = 0$ となる $V \in \mathcal{V}$, $V \neq 0$ が存在することは同値である．すなわち，共役であることと指数形式が退化することは同値である．
(2) $I(V, V) < 0$ となる $V \in \mathcal{V}$ が存在すれば，$\gamma$ は最短ではない．すなわち，最短ならば指数形式は半正定値である．

証明. (1) は Jacobi 場 $V$ が $I(V, W) = 0$ を満たすことをみればよい．(2) は

$$C(s, t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t), \quad \gamma_s(t) = C(s, t)$$

と定めて，$E(\gamma_s)$ の $s = 0$ における 2 回微分を計算すれば良い．*11 □

**問題 7.** 負曲率多様体（断面曲率がすべて負の多様体）では指数形式は正定値であることを示せ．また，指数形式が正定値ならその測地線は最短か．

指数形式の応用として Myers の定理を紹介する．

**定理 3.7 (Myers).** リーマン多様体 $(M, g)$ について

$$Ric \geq (n-1)H > 0$$

が成り立てば，長さ $\pi/\sqrt{H}$ を越える測地線は最短線ではない．特に，$M$ の任意の 2 点の距離は $\pi/\sqrt{H}$ より小さい．
さらに $M$ が完備連結であれば $M$ はコンパクトでありその基本群は有限群になる．

証明. $\gamma$ を長さ $l$ の測地線とし，$\{E_i\}$ を $\gamma$ に沿った平行な正規直交系とする．ただし $E_1 = \dot\gamma$ とおく．

$$W_i(t) = \sin(\pi t/l)E_i(t), \qquad 2 \leq i \leq n$$

とおけば,

$$\begin{aligned} I(W_i, W_i) &= -\int_0^l \left\langle W_i, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} W_i + R(W_i, \dot\gamma)\dot\gamma \right\rangle dt \\ &= \int_0^l (\sin \pi t/l)^2 (\pi^2/l^2 - \langle R(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma, E_i\rangle) dt \end{aligned}$$

であるから,

$$\sum_{i=2}^n I(W_i, W_i) = \int_0^l (\sin \pi t/l)^2 ((n-1)\pi^2/l^2 - Ric(\dot\gamma, \dot\gamma)) dt$$

となる．ここで，$l > \pi/\sqrt{H}$ とすれば，右辺は負になるので，少なくとも一つの $W_i$ について $I(W_i, W_i)$ は負になる．ゆえに，$\gamma$ は最短にならない．

*11 指数形式はエネルギー汎関数に関するヘッセ形式として理解できる．

$M$ が完備連結であれば，$T_pM$ の半径 $\pi/\sqrt{H}$ の閉球体 $D = \{v \in T_pM \mid \|v\| \leq \pi/\sqrt{H}\}$ について $\exp_p(D) = M$ である．$D$ はコンパクトなので $M$ もコンパクトである．さらに $M$ の普遍被覆もコンパクトになることから基本群は有限群である． □

**問題 8.** Myers の定理はリッチ曲率がある正数より大きいという条件が必要である．単に正曲率というだけでは多様体はコンパクトになるとは限らないからだ．このことを，$\mathbb{R}^3$ 内の凸曲面のガウス曲率が正であることを示すことにより説明せよ．

# 4　部分リーマン多様体

## 4.1　第 2 基本形式

$(N, h)$ をリーマン多様体とする．その部分多様体 $M$ に $g = i^*h$ なるリーマン計量を入れたとき $(M, g)$ を $(N, h)$ の部分リーマン多様体とよぶ．$x \in M \subset N$ について $T_xM$ は $T_xN$ の部分空間でありそのリーマン計量に関する直交補空間を $V_x$ とおく．$V = \cup_{x \in M} V_x$ は $M$ 上のベクトル束である．

直交直和分解 $T_xN = T_xM \oplus V_x$ に関し第 1 成分への射影を

$$\pi_x : T_xN \longrightarrow T_xM$$

で表す．$M, N$ のリーマン接続をそれぞれ $\nabla$, $\overline{\nabla}$ と表すとき，

**命題 4.1.** $v \in T_xM$ と $X \in \mathfrak{X}(M)$ について $\nabla_v X = \pi_x\left(\overline{\nabla}_v X\right)$ が成り立つ．

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について，$S(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ とおくと，$f \in C^\infty(M)$ について

$$S(X, fY) = \overline{\nabla}_X(fY) - \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y - X(f)Y - f\nabla_X Y = fS(X, Y)$$

が成り立つので，$S$ はベクトル束 $V$ に値をとるテンソルになる．また

$$S(X, Y) - S(Y, X) = [X, Y] - [X, Y] = 0$$

より対称テンソルである．これを部分多様体 $M$ の第 2 基本形式と呼ぶ．またそのリーマン計量 $g$ に関するトレースを平均曲率ベクトルと呼ぶ．