

2013年12月14日

宮崎北高校・熊本北高校・第二高校 SSH

球面上の幾何学

井上尚夫（熊本大学自然科学研究科）

1 カヴァリエリの原理と立体の体積

カヴァリエリの原理

2つの平面図形 A , B が平行な 2 直線に挟まれているとする。この 2 直線に平行な任意の直線に対し、 A との交わりの長さ l_A と B との交わりの長さ l_B が等しいならば、 A と B の面積は等しい。

2つの立体 A , B が平行な 2 平面に挟まれているとする。この 2 平面に平行な任意の平面に対し、 A との交わりの部分の面積 S_A と B との交わりの部分の面積 S_B が等しいならば、 A と B の体積は等しい。

平面図形を幅の狭い帯を重ねたものとみなす。仮定から同じ高さにある部分の帯の長さが等しいので帯の面積も等しくなる。立体については、薄い板を重ねたものとみなす。同じ高さの板の面積が等しいので体積も等しくなる。このような考え方は区分求積法と呼ばれ積分の考えにつながる。

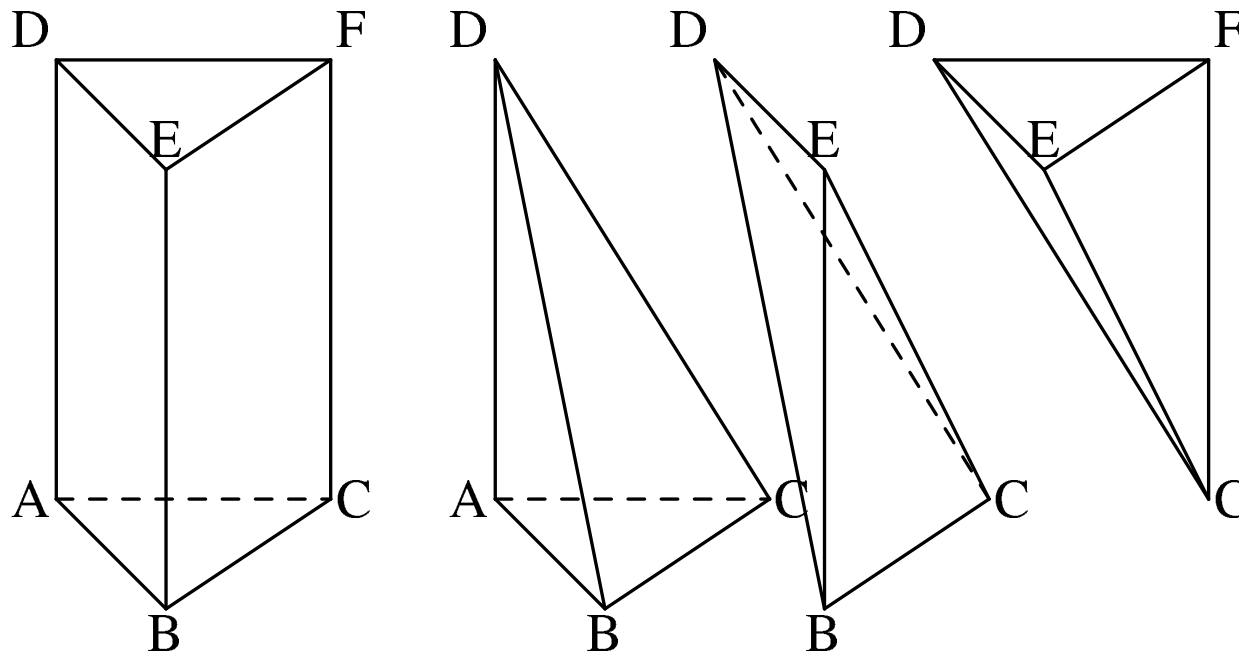
応用 1 錐体の体積 = 底面積 × 高さ ÷ 3

底面積と高さの等しい二つの錐体の体積は等しい。

錐体を底面と平行な面で切ると切り口は底面と相似であり，相似比は頂点からの距離の比と一致する。

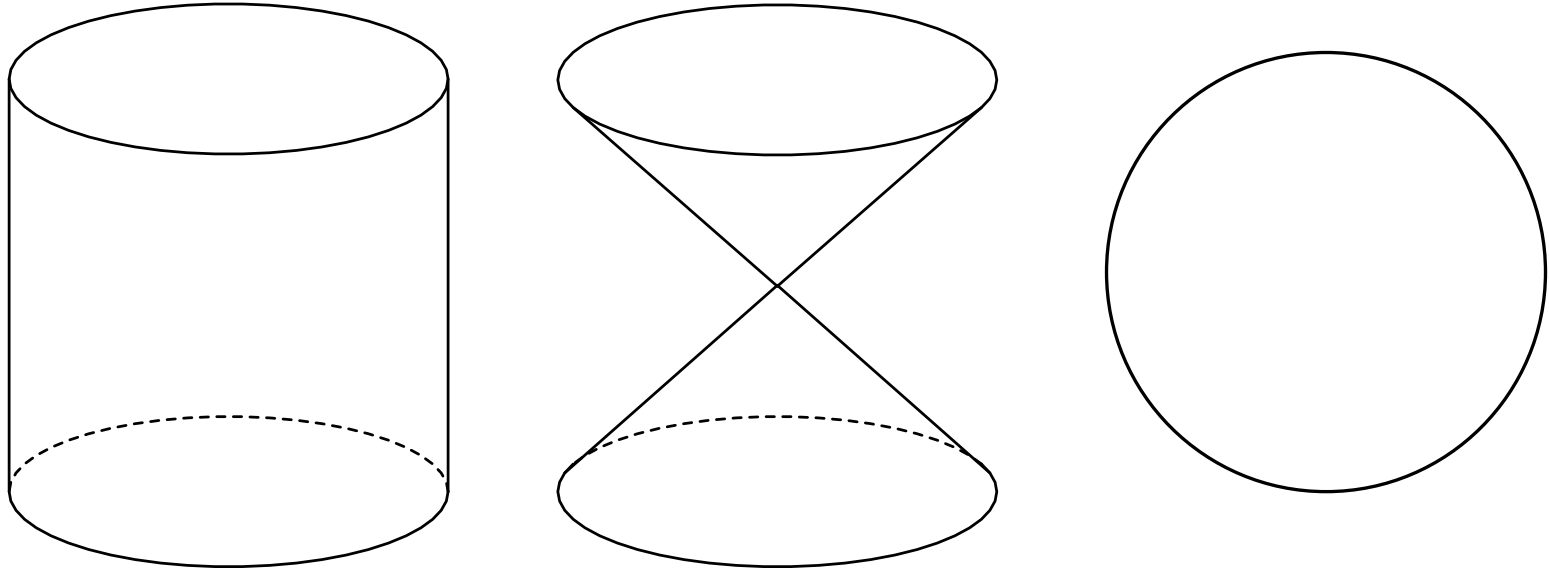
相似な二つの平面図形の面積比は相似比の 2 乗である。

直三角錐の体積が三角柱の体積の **3 分の 1** である。



応用 2 球の体積 = $4\pi R^3/3$

球と円柱と円錐にカヴァリエリの原理を適用する.



円柱の体積は球の体積と二つの円錐の体積の和に等しいので

$$\text{球の体積} = \text{円柱の体積} - \text{二つの円錐の体積} = 2\pi R^3 - 2\frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

応用 3 球の表面積 = $4\pi R^2$

球面を数多くの領域に分割すれば一つ一つの領域は平面の図形とみなしてよい。それを底面とし球の中心を頂点とする錐体を考えるとその集まりが球体になる。各錐体の高さは球の半径とみなしてよいので、一つの錐体の体積は球面の領域に球の半径をかけて $1/3$ をかければよい。それらをすべて足し合わせれば

$$\text{球の体積} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\text{球の表面積} \times \text{球の半径} = \frac{R}{3}\text{球の表面積}$$

が導かれる。よって球の表面積は $4\pi R^2$ である。

2 球面上での直線とは？

直線を特徴付ける性質

- まっすぐな線→まっすぐとは何だろう？
- 2点を結ぶ最短線 飛行機のコース（大圏航路）
- 慣性の法則（動いている物体は力を加えられない限り等速直線運動をする）
弾道ミサイルのコース（射出した後は推進力だけで基本的に進路の変更はしない）

球面上の直線は大円（中心をとる平面との切り口）

経線（子午線）は直線である。緯線が直線になるのは赤道に限る。赤道高速道路を走る車はまっすぐ進んでいると感じられるはずだ。

3 球面多角形の面積

以下，球の半径を R と表す．角度についてはラジアンを用いる．

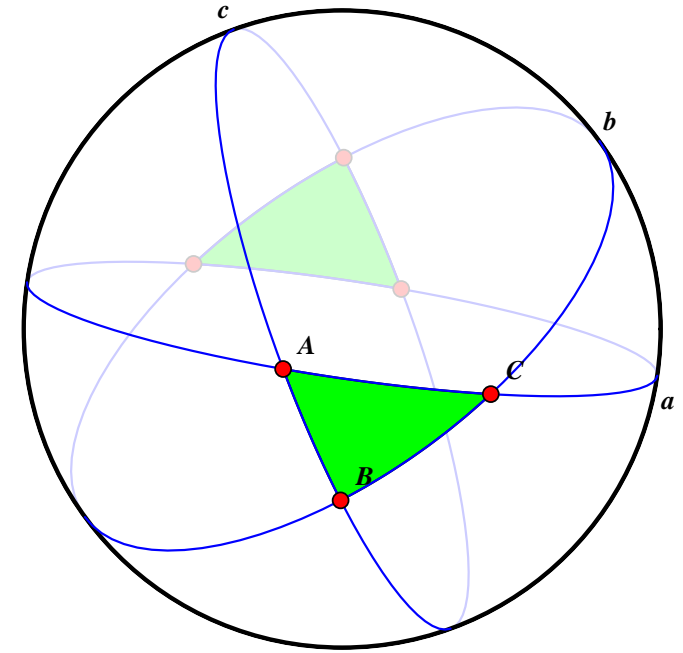
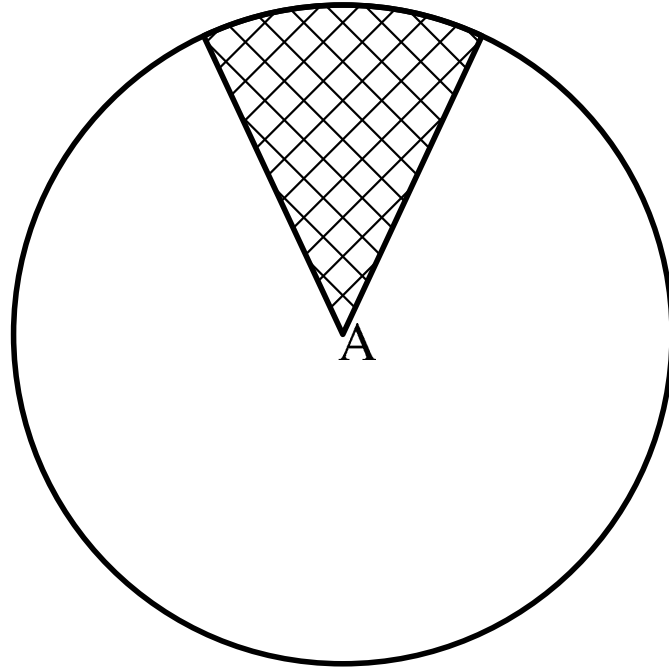
二角形的面積 角 α の二角形的面積は

$$4\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha R^2$$

三角形的面積 三角形の ABC の内角を α, β, γ とするとき，その面積は

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

証明は次ページの図に基づいて行う．



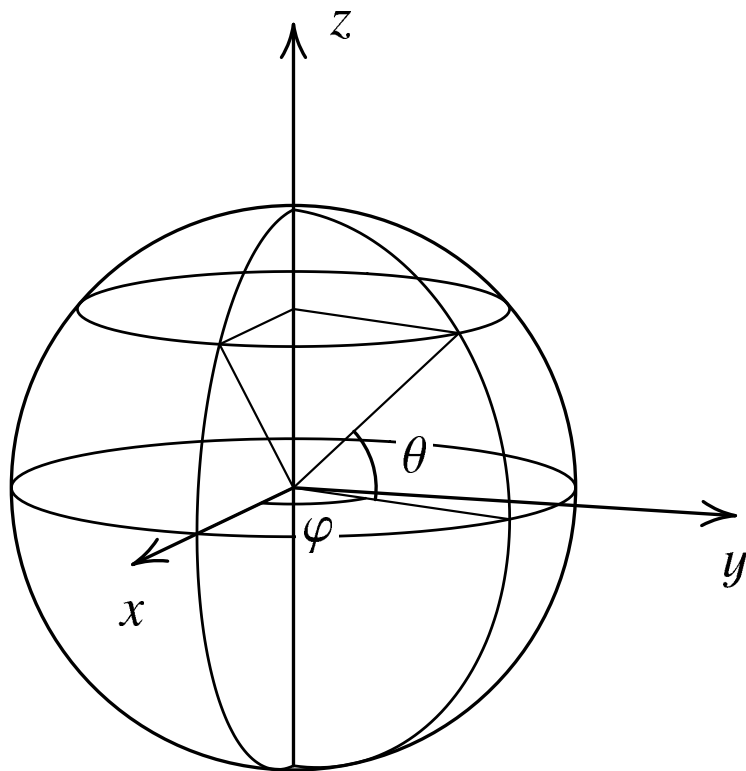
凸 n 角形の面積 一つの頂点から $n - 3$ 個の向かい合う頂点に対角線をひくことにより $n - 2$ 個の三角形に分割する.

$$(\text{内角の総和} - (n - 2)\pi)R^2$$

この証明は n 角形の内角の和を求める考え方と同じである.

4 緯度・経度と空間座標

北極を $(0, 0, R)$ 本初子午線を球面と xz 平面の切り口とすると, 緯度 θ 経度 φ の点の座標は



緯度 θ の緯線は半径 $R \cos \theta$ の円周である.

$$(R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$$

5 球面上の 2 点の距離と内積

- 球の中心を O とし, 球面上に 2 点 A, B をとる.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 \cos \angle AOB$$

- A と B の距離 AB は $R\angle AOB$ で表される.
- A と B の緯度・経度をそれぞれ $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)$ とおく.

$$\begin{aligned} R^2 \cos \frac{AB}{R} \\ = R^2 (\cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 + \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

この式から三角関数の加法定理を使って

$$\cos \frac{AB}{R} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

6 球面上の余弦定理と方角

余弦定理とは地点 O を基準として二つの地点 A , B までの距離と見込む角（の余弦）から A と B の距離を求める定理である。

O から A までの距離を a , B までの距離を b , 角 AOB を α とする。ここで球面上の緯度経度を O が北極に, A が本初子午線上に, B が東半球に来るようにとる。このとき A と B の緯度を θ_1, θ_2 とすれば

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{R} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}$$

となる。右辺はラジアンによる。経度については A では 0 , B では α である。ゆえに A と B の距離 c は

$$\cos \frac{c}{R} = \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \alpha + \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}$$

これが半径 R の球面上での余弦定理である。

余弦定理を利用して方角を求める。そのために地球上の2点 A, B について北極 N とあわせて球面三角形 NAB を考える。A を頂点として余弦定理を利用する。

$$\cos \frac{NB}{R} = \sin \frac{NA}{R} \sin \frac{AB}{R} \cos \angle NAB + \cos \frac{NA}{R} \cos \frac{AB}{R}$$

北極との距離は緯度から決まるので A の緯度を θ_1 B の緯度を θ_2 とすれば

$$\sin \theta_2 = \cos \theta_1 \sin \frac{AB}{R} \cos \angle NAB + \sin \theta_1 \cos \frac{AB}{R}$$

ここで $\cos \frac{AB}{R} = d$ とおく。角 NAB は

$$\angle NAB = \text{ACOS} \left(\frac{\sin \theta_2 - d \sin \theta_1}{\cos \theta_1 \sqrt{1 - d^2}} \right)$$

でありこれは A から見た B の方角が真北から何度ずれているかを表している。また西か東かは $\sin(\text{B の経度} - \text{A の経度})$ が正か負かで判定できる。

7 表計算ソフト (Excel, Calc) による計算

1. 地球の半径は，赤道半径 6378.137km，極半径 6356.752km である．ここでは地球を半径 $20000/\pi = 6366.198\text{km}$ の球面として扱う．
2. 地図帳，Google Earth などでも 2 点 (A,B) の緯度と経度を調べる．この際，緯度経度は度分秒で表されることが多いので $1\text{度} = 60\text{分}$ ， $1\text{分} = 60\text{秒}$ により度に変換する必要がある．
3. Excel に組み込まれた三角関数 COS と SIN は変数をラジアンでとるので，関数 RADIANS を利用して緯度経度をラジアンに変換する．これを (θ_1, φ_1) ， (θ_2, φ_2) とおく．
4. COS と SIN を利用して $\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2$ を計算する．この値を d とする．

5. \cos の値に対してそれに対応する角度を与える関数として Excel には ACOS が組み込まれている. $\text{ACOS}(d)$ は $\cos \theta = d$ になるような角度 θ をラジアンで与えるので, $\frac{20000}{\pi} \text{ACOS}(d)$ が距離になる.
6. 方角は $\angle \text{NAB} = \text{ACOS} \left(\frac{\sin \theta_2 - d \sin \theta_1}{\cos \theta_1 \sqrt{1 - d^2}} \right)$ であるが, これはラジアンなので関数 DEGREES を利用して度に戻す.
7. 西か東かは経度の差で判断できる. $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ が正であれば東, 負であれば西である. これは Excel の関数 IF を使って記述できる.

以上をエクセルファイル `distance.xls` で具体化している. 任意の 2 地点について, 距離と方角が自動的に計算できる.

8 具体例 第二高校とエッフェル塔の距離と方角

まず第二高校とエッフェル塔の緯度・経度を調べよう。(Google Earth)

地点	緯度（北緯）	経度（東経）
(A) 第二高校	32 度 46 分 53.95 秒	130 度 46 分 0.77 秒
(B) エッフェル塔	48 度 51 分 29.80 秒	2 度 17 分 39.31 秒

このデータを distance.xls の所定のセルに入力すればあとの計算は自動的に行われる。ら第二高校とエッフェル塔の距離は約 9595km, 方角は真北から 31.1063 度西である。

B 地点をいろいろ選び, 平面上に適当な縮尺で角度と距離によって点を書いていけば第二高校を中心とする方位板が作れる。

9 Excel, Calc で利用した関数

関数	演算内容	備考
+ - * /	+ - × ÷	
A^2	A の 2 乗	4^2=16
SQRT(A)	A の平方根	SQRT(2)=1.41421356
COS(A)	A の値 (ラジアン) に対する cos の値	COS(π)=-1
SIN(A)	A の値 (ラジアン) に対する sin の値	SIN($\pi/2$)=1
RADIANS(A)	A の値 (度) をラジアンに変換	RADIANS(30)= $\pi/6$
DEGREES(A)	A の値 (ラジアン) を度に変換	DEGREES($\pi/6$)=30
ACOS(A)	cos の値が A になる角度 (ラジアン)	ACOS(0.5)= $\pi/3$
IF(条件 P,A,B)	条件 P が真のとき A, 偽のとき B	