確率・統計（井上担当）定期試験問題と解答例

テキスト持ち込み可の試験だが，事前の勉強は不可欠である．各問題に関連する事項がテキストのどこに書いてあるのか，試験中にテキストをはじめから読み返すのではできるはずがない．何人か，付箋を付けていた人がいるが賢いやり方と感じた．

100 点満点で最高点は 90 点，最低点は 0 点，平均点は 33.63 点だった．20 点以上の者を合格とした．

問 1 白玉が 7 個と赤玉が 3 個入った袋がある．この袋から玉を 1 個ずつ 3 回取り出す時，1 回だけ赤玉である確率を求めよ．ただし確率は復元抽出の場合と非復元抽出の場合それぞれについて求めよ．（10 点）

【解答例】 復元抽出の場合は，赤玉を取り出す確率は 3/10 なので

$$ {}_3C_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000} $$

非復元抽出の場合は，赤玉が 1 回目に出る確率は $\frac{3}{10}\frac{7}{9}\frac{6}{8}$，2 回目に出る確率は $\frac{7}{10}\frac{3}{9}\frac{6}{8}$，3 回目に出る確率は $\frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{3}{8}$ である．これらはすべて等しいので

$$ \frac{7\cdot 6\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{21}{40} $$

【コメント】

- 何回目に赤玉が出るかで ${}_3C_1 = 3$ 通りの場合がある．これを忘れている人が多い．

問 2 次の 10 個のデータの平均と分散を求めよ．（10 点）

78.3　72.5　84.2　73.9　68.5　77.3　69.1　75.4　80.3　76.8

【解答例】 データの総和は 756.3 なので平均は 75.63 である．よって各データと平均との差は

$$ 2.67 \quad -3.13 \quad 8.57 \quad -1.73 \quad -7.13 \quad 1.67 \quad -6.53 \quad -0.23 \quad 4.67 \quad 1.17 $$

この 2 乗の総和は 212.861 なので分散は 21.2861 である．

問 3 あるクラスで数学と物理の試験を行ったところ，数学の平均点は 60 点，物理の平均点は 50 点だった．さらに数学の得点の 2 乗の平均，物理の得点の 2 乗の平均，数学と物理の得点の積の平均を求めたところ，それぞれ 4041，2669，3182 だった．数学，物理の得点の分散，二つの得点の共分散，相関係数を求めよ．（10 点）

【解答例】 数学の得点を x，物理の得点を y とすれば，与えられたデータは

$$ \bar{x} = 60, \quad \bar{y} = 50, \quad \overline{x^2} = 4041, \quad \overline{y^2} = 2669, \quad \overline{xy} = 3182 $$

である．ゆえに数学の分散は $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = 441 = 21^2$，物理の分散は $\overline{y^2} - \bar{y}^2 = 169 = 13^2$ である．共分散と相関係数は

$$ \text{共分散} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = 182, \qquad \text{相関係数} = \frac{182}{21\cdot 13} = \frac{2}{3} $$

【コメント】

- 平均しか与えられていないので p.36 と p. 46 の式を利用する．
- 分散を求めよとあるのに標準偏差（分散の平方根）を答えている人が目につく．

問 4 (1) 1 つのさいころを 12 回投げて 3 以上の目の出た回数を X とする．$P(X = k)$ を組合せの記号を使った式で表せ．
(2) $P(X \leqq 2)$ を求めよ．ただし $3^{12} = 531441$ である．（15 点）

【解答例】 (1)3 以上の目の出る確率は 2/3 なので X は二項分布 $B(12, 2/3)$ に従う．よって

$$P(X = k) = {}_{12}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{12-k} = \frac{{}_{12}\mathrm{C}_k 2^k}{3^{12}}$$

(2) $P(X \leqq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ なので (1) の結果から

$$P(X \leqq 2) = \frac{{}_{12}\mathrm{C}_0 + {}_{12}\mathrm{C}_1 2 + {}_{12}\mathrm{C}_2 4}{3^{12}} = \frac{1 + 24 + 264}{531441} \fallingdotseq 0.000544$$

【コメント】

- 二項分布の問題．3 以上の目は 4 通りなのでそれが出る確率は 2/3 だ．
- $P(X = 0)$ を落とさないこと．

問 5 A さんは 1000 文字タイプを打つたびに平均 2 回のタイプミスを犯す．A さんが 5000 文字タイプを打つとき，ミスが 4 回以内である確率を求めよ．ただしミスの回数はポアソン分布に従うとしてよい．また $e^{-10} \fallingdotseq 0.0000454$ としてよい．（10 点）

【解答例】 5000 文字打つときは平均 10 回のタイプミスをするので，ポアソン分布は $P_o(10)$ である．ゆえに k 回ミスする確率は $e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ なので 4 回以下の確率は

$$e^{-10}\left(1 + \frac{10}{1} + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \frac{10000}{24}\right) \fallingdotseq \frac{24 + 240 + 1200 + 4000 + 10000}{24} 0.0000454 \fallingdotseq 0.029$$

【コメント】

- 1000 文字で平均 2 回ミスするのだから，5000 文字では平均 10 回ミスをする．だからポアソン分布 $P_o(10)$ を考える．$P_o(2)$ ではない．

問 6 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0,\ \text{または}\ 2 \leqq x\ \text{のとき}) \\ x & (0 \leqq x \leqq 1\ \text{のとき}) \\ 2 - x & (1 \leqq x \leqq 2\ \text{のとき}) \end{cases}$$

であるとき，X の期待値と分散を求めよ．（10 点）

【解答例】 期待値は

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1$$

分散は

$$
\begin{aligned}
V[X] = E[(X-1)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-1)^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-1)^2 x dx + \int_1^2 (x-1)^2(2-x)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 4 + \frac{32}{3} - 10 + 4 + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

【コメント】

- 確率密度関数が $[0,1]$ と $[1,2]$ で異なる関数で定められているので，積分も分けて計算しなくてはならない．
- 平均が 1 なので $(x-1)^2 f(x)$ を積分する．$x^2 f(x)$ ではない．

問 7 確率変数 X は正規分布 $N(3,2^2)$ に従うとする．このとき
(1) 正規分布表を用いて確率 $P(2 \leqq X \leqq 3)$ を求めよ．
(2) $P(3-a \leqq X \leqq 3+a) \fallingdotseq 0.9$ となるような a の値を求めよ．（15 点）

【解答例】 (1) $Z = \dfrac{X-3}{2}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．$2 \leqq X \leqq 3$ のとき，$-0.5 \leqq Z \leqq 1$ なので

$$
\begin{aligned}
P(2 \leqq X \leqq 3) &= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0) = \Phi(0) - \Phi(-0.5) = \Phi(0) - 1 + \Phi(0.5) = \Phi(0.5) - 0.5 \\
&\fallingdotseq 0.6915 - 0.5 = 0.1915
\end{aligned}
$$

(2) $P(3-a \leqq X \leqq 3+a) = P(-a/2 \leqq Z \leqq a/2)$ である．

$$
P(-a/2 \leqq Z \leqq a/2) = \Phi(a/2) - \Phi(-a/2) = 2\Phi(a/2) - 1 = 0.9
$$

とすれば $\Phi(a/2) = 0.95$ なので正規分布表から $a/2 \fallingdotseq 1.65$ を得る．よって $a = 3.3$ である．
【コメント】

- 標準化（p．72）せずに $\Phi(3) - \Phi(2)$ を求めている人が目につく．

問 8 ある正規母集団から大きさ 30 の無作為標本を採って，平均と不偏分散を求めたところ平均は 54.2 不偏分散は 83.5 だった．母平均と母分散の 95% 信頼区間を求めよ．（20 点）

【解答例】 信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ なので $\alpha = 0.05$ として，区間推定を行う．母平均については，巻末の t 分布表から $t_{29}(0.025) = 2.045$ なので

$$
2.045\sqrt{\frac{83.5}{30}} = 2.045 \times 1.668 \fallingdotseq 3.412
$$

となり

$$
54.2 - 3.412 \leqq \mu \leqq 54.2 + 3.412, \qquad 50.8 \leqq \mu \leqq 57.6
$$

母分散については巻末の χ^2 分布表をから $\chi^2_{29}(0.025) = 45.722, \chi^2_{29}(0.975) = 16.047$ なので

$$
\frac{29 \times 83.5}{45.722} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{29 \times 83.5}{16.047}, \quad 53.0 \leqq \sigma^2 \leqq 150.9
$$

【コメント】

- 母平均の検定において t 分布表ではなく，テキスト p.97 の 1.96 を使った答案がある．これは母分散が既知の場合の議論であって，この問題には使えない．p.99 の母分散が未知の場合の区間推定を参考にすること．