崇城大学線形代数学 II 定期試験問題 (2016 年 2 月 3 日実施) と解答例

問 1　次の行列を基本変形により階段行列にせよ。（配点 20 点，平均 16.39 点）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -6 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 7 & 18 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

【解答例】

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -6 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 7 & 18 \\ 1 & 2 & 1 & -7 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問 2　連立一次方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}v &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}v &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}v &= b_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}v &= b_4 \end{cases}$ の係数と右辺の定数を並べた行列が、基本変形で次の階段行列になった時、解を求めよ。（配点 15 点，平均 12.91 点）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【解答例】(1) 連立方程式に戻したとき第 3 式が $0x+0y+0z+0v = 1$ になるが，これが成り立つような (x, y, z, v) の値の組は存在しない．ゆえに，解は存在しない．

(2) 連立方程式に戻せば

$$\begin{cases} x \qquad\qquad +3v &= -4 \\ \qquad y \qquad -2v &= -3 \\ \qquad\qquad z \ -4v &= 5 \\ \qquad\qquad\qquad 0 &= 0 \end{cases}$$

になる．$v = c$ とおけば，第 1 式より $x = -3c - 4$，第 2 式より $y = 2c - 3$，第 3 式より $z = 4c + 5$ を得る．第 4 式は常に成り立つのでこれで 4 つの式がすべて成立する．故に解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c-4 \\ 2c-3 \\ 4c+5 \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問 3　行列の基本変形により次の行列の逆行列を求めよ。　（配点 15 点，平均 12.61 点）

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

【解答例】逆行列の計算に基本変形を利用するには単位行列を並べて基本変形する．(1) は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 19 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，逆行列は $\begin{pmatrix} 7 & -25 & 4 \\ -5 & 19 & -3 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ である．(2) については

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，左半分は単位行列にならず，逆行列は存在しない．

【コメント】 (A, E) を基本変形して (E, B) なる階段行列になれば $A^{-1} = B$ である．それ以外の階段行列になれば A は正則ではなく逆行列は存在しない．(2) では階段行列になっていないが，次の掃き出しが第 4 列についてなので左半分が単位行列にならないことは分かっている．

問 4　-3 は行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値である．-3 に対する A の固有ベクトルを求めよ．

（配点 10 点，平均 7.43 点）

【解答例】-3 に対する固有ベクトルは $(A + 3E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の $\boldsymbol{0}$ でない解なので

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$2x + 2y + z = 0$ を解けば良い．$x = a,\ y = b$ とおけば $z = -2a - 2b$ なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - 2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

【コメント】 $(A + 3E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くのだから，基本変形された行列から連立方程式に戻すときは $2x + 2y + z = 0$ にしなくてはならない．$2x + 2y = 1$ とする答案があるが，これは間違いである．

問 5　次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，対角化可能ならば対角化せよ．（ヒント．-1 はこの行列の固有値である．）　（配点 40 点，平均 25.96 点）

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

【解答例】固有値を求めるには $|xE - A| = 0$ を解く．

$$\begin{vmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ -2 & x+1 & -2 \\ -6 & -3 & x-4 \end{vmatrix} = (x^2+2x+1)(x-4) + 6 - 36 + 6(x+1) - 6(x+1) - 6(x-4)$$
$$= x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = (x+1)(x^2-3x-10) = (x+1)(x+2)(x-5)$$

より固有値は $-1, -2, 5$ である．

固有ベクトルを求めるには $(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く．固有値 -1 については

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$3y - z = 0,\ x + z = 0$ を解けば良い．$y = c$ とおくと，$z = 3c,\ x = -3c$ となる．固有ベクトルは

$$c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

固有値 -2 については

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$x + (7/5)z = 0,\ y - (4/5)z = 0$ を得る．$z = 5c$ とおけば $x = -7c,\ y = 4c$ であり，固有ベクトルは

$$c\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

固有値 5 については

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -10 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$3y - z = 0,\ x = 0$ を解く．$y = c$ とおけば $z = 3c$ であり，固有ベクトルは

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である．対角化については固有ベクトルを並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$