微分積分学 I（井上担当）定期試験問題と解答例

受験者は 22 人だったが最高点は 100 点，最低点は 0 点と大きく差がついた．平均点は 50.13 点であり，70 点以上が 9 人いる一方で，20 点未満も 6 人いる．決して難しい問題ではないのに全く勉強していないと思える答案が少なくなかった．合格点は昨年度と同様に 40 点にする．再試験の該当者はこの解答例を参考にきちんと勉強し直しておくこと．

問 1 問 1 以下の問いに答えよ。（12 点）

(1) 2 次の 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための条件を a, b, c, d についての式で表せ．また正則な場合の逆行列を与えよ．

(2) 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ と 3 次行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ の意味の違いを説明せよ。

【解答例】 (1) 正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ である．またその時の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

(2) 3 次正方行列とは 9 つの数を 3×3 のマス目に沿って並べた配列のことである．3 次行列式とはその配列から以下の式で定まる値である．

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

問 2 次の行列 A と次のいずれかの行列 B について以下の問いに答えよ。（20 点）

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \ 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 4)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad 5)\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A と B の三つの演算、$A + B$, AB, BA について、1) から 5) までのそれぞれの場合に定義できるか否かを答えよ。なお、解答は右の表の中に、定義できないものについては×印を、定義できるものについては得られる行列の型を記入せよ。（表省略）

(2) 特に積 BA が定義できるものについて、 BA の (1,2) 成分を求めるための計算式と結果を述べよ。（解答はそれぞれの場合について、B の番号、計算式、結果の順に記せ）

(3) A の転置行列 ${}^t\!A$ を記せ．

【解答例】 (1)$A + B$ は 2) のみ定義されその結果は 4×3 型である．AB は 1)3)4) の場合に定義され，得られる

行列の型はそれぞれ 4×3, 4×2, 4×4 である．BA は 4)5) の場合に定義され，得られる行列の型はそれぞれ 3×3, 3×2 である．

(2) 4) の場合は

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2+2+15+6 = 25$$

5) の場合は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -4+3-15+6 = -10$$

(3) 行と列を入れ替えればよいので

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

問 3 n 次正方行列 A, B について次の式を展開せよ．ただし E は単位行列である．(8 点)

(1)$(A+B)(A^2-AB+B^2)$　　(2)$(A+E)(A^2-A+E)$

【解答例】 (1)

$$(A+B)(A^2-AB+B^2) = A^3 - A^2B + AB^2 + BA^2 - BAB + B^3$$

(2)

$$(A+E)(A^2-A+E) = A^3 - A^2 + AE + A^2 - A + E = A^3 + E$$

【コメント】

- (1) では $AB = BA$ とは言えないので展開して現れる 6 つの項をまとめることはできない．そのまま答えればよい．(2) は (1) の式で B を単位行列 E に置き直したものだが $AE = EA = A$ なのでまとめることができる．

問 4　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。(40 点)

(1) A の行列式の値を求めよ。

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を行列式を用いて解け。ただし求めるのは未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 4 成分 x_4 のみでよい。

(3) A の $(2,3)$ 余因子 $\tilde{a}_{23}$ を求めよ。

(4) (3) の結果から分かる逆行列 A^{-1} の成分は何か。その成分の A^{-1} での位置と値を求めよ。

【解答例】 (1) $(4,2)$ 成分を軸に掃き出しと次数下げを行ってみる．もちろん他の成分を軸としても良い．

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 2 & 7 \\ -13 & 0 & 5 & -11 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+2} 1 \begin{vmatrix} 11 & 2 & 7 \\ -13 & 5 & -11 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 275 - 182 - 132 + 242 + 130 - 210 = 123$$

(2) x_4 を求めるので第 4 列を右辺の定数 $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列式を計算する．今度は $(2,1)$ 成分を軸に計算してみよう．

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 10 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 13 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} 7 & 10 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \\ 13 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 441 + 175 + 910 - 343 - 450 - 455 = 278$$

よって $x_4 = \dfrac{278}{123}$ である．
(3) $(2,3)$ 余因子とは第 2 行と第 3 列を除いた行列式に $(-1)^{2+3} = -1$ をかければよいので

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-9 + 2 - 16 + 4 + 12 - 6) = 13$$

(4) 逆転公式 (定理 2.12) から A^{-1} の $(3,2)$ 成分は $\dfrac{13}{123}$ である．

問 5　座標空間の原点を $\mathrm{O}(0,0,0)$ とし、3 点 $\mathrm{A}(2,-1,1)$, $\mathrm{B}(1,-1,3)$, $\mathrm{C}(2,3,-1)$ をとる。以下の問いに答えよ。（20 点）

(1)　線分 OA，OB の長さを求めよ。
(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と外積ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。
(3)　$\cos \angle \mathrm{AOB}$ の値を求めよ。
(4)　$\triangle \mathrm{AOB}$ の面積を求めよ。
(5)　四面体 OABC の体積を求めよ。
(6)　B から線分 OA におろした垂線の足（垂線と直線 OA の交点）を求めよ。
(7)　C から平面 OAB におろした垂線の足（垂線と平面 OAB の交点）を求めよ。

【解答例】 (1) 原点との距離だから成分の 2 乗の和の平方根を取ればよい．

$$\mathrm{OA} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \quad \mathrm{OB} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

(2) 内積と外積の定義より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2 + 1 + 3 = 6, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) 内積の長さと角度による表示から $6 = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \sqrt{6}\sqrt{11} \cos \angle \mathrm{AOB}$ となるので

$$\cos \angle \mathrm{AOB} = \frac{6}{\sqrt{66}} = \frac{\sqrt{66}}{11}$$

(4) 三角形の面積は外積ベクトルの大きさの 1/2 なので

$$\frac{1}{2}\sqrt{4+25+1} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

(5) 4 面体の体積は行列式の値（負の場合は符号を変える）の 6 分の 1 なので

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2-6+3-18-1+2 = -18$$

より 6 である．
(6) 垂線の足の位置ベクトルを $k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおけば $(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - k\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ より $6 - k6 = 0$ を得る．$k = 1$ なので垂線の足は A と一致し，$(2, -1, 1)$ である．
(7) C から平面 OAB に下ろした垂線ベクトルを $k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおけば $\overrightarrow{\mathrm{OC}} - k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平面 OAB に含まれるので $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と直交する．

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2k \\ 3+5k \\ -1+k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -18-30k = 0$$

より $k = -3/5$ であり，垂線の足の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -8/5 \end{pmatrix}$$