Kumamoto J. Math.
Vol. 7, 1~25 March (1994)

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE SIEGEL

H. CHARRIÈRE

(Received June 1, 1993)

§0. Préface

Cet article généralise le théorème d'existence et d'unicité d'une solution pour l'équation

$$((\sigma - \alpha)_0 P)(y) = A(x)y + B(x)$$

où A,B sont des fonctions analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$, $A(0) = 0$, σ étant un champ de vecteurs vérifiant une condition de petits dénominateurs et P un "bon" opérateur linéaire inversible (par exemple un produit de champs de vecteurs vérifiant une condition de Poincaré (voir([1]et[2])).

On résoud ici une équation plus générale de la forme

$$\sigma_0 P(y) = F(x, y), \tag{1}$$

où F est une fonction holomorphe en x et y au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ à valeurs dans $\mathbb{C}^q$. On écrira l'équation (1) sous la forme

$$\sigma(z) = F(x, P^{-1}(z)) \tag{2}$$

ce qui conduit à introduire un second membre un peu plus général que $F(x, y)$, σ pouvant être également plus général qu'un champ de vecteurs et vérifiant toujours une condition de petits dénominateurs (condition d'intégration par parties (voir[2])).

§1. Notations.

Pour tout $s \in \mathbb{N}^p$, on notera $|s| = s_1 + \cdots + s_p$.

(N$_1$) Pour $\varrho \in \mathbb{R}^+$ et $\varrho' \in \mathbb{R}^+$ on note:

– $\mathcal{B}^q_\varrho = \{a = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{C}^q \quad \text{tel que } \|a\|_\varrho = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} \|a_n\| \varrho^{|n|} < \infty\}$

où $\|a_n\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant q} |a^i_n|$ pour $a_n = (a^i_n)_{1\leqslant i\leqslant q}$ dans $\mathbb{C}^q$,

– $\mathcal{B}^q_{\varrho,\varrho'} = \{a = \sum_{m\in\mathbb{N}^p, n\in\mathbb{N}^q} a_{m,n} x^m y^n$, $a_{m,n} \in \mathbb{C}^q$ tel que

$$\|a\|_{\varrho,\varrho'} = \sum_{m,n} \|a_{m,n}\| \varrho^{|m|} \varrho'^{|n|} < \infty\}.$$

Les espaces $\mathcal{B}^q_\varrho$ et $\mathcal{B}^q_{\varrho,\varrho'}$ sont des espaces de Banach.

- $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{B}^q_\varrho) = \{f \in \mathcal{B}^q_\varrho$ tel que $\|f\|_\varrho \leqslant \varrho'\}$, $\mathcal{M}^q_\varrho = \{f \in \mathcal{B}^q_\varrho$ tel que $f(0) = 0\}$,
- $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}^q_\varrho) = \mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{B}^q_\varrho) \cap \mathcal{M}^q_\varrho$.

(N_2) On définit l'application $e^q_r : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^{\delta(r,q)}$ où $\delta(r,q) = (q+r-1)!/(q-1)!.r!$

par:

$$e^q_r \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^r & \\ y_2^r & \\ y_1^{r-1}y_2 & \\ \cdots\cdots & \\ y_1^{r_1}y_2^{r_2}\cdots y_j^{r_j} & r_1+\cdots+r_j = r \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \end{pmatrix}$$

c'est à dire que $e^q_r(y)$ est le vecteur colonne de $\mathbb{C}^{\delta(r,q)}$ formé de toutes les expressions, ordonnées de façon convenable, qui sont, par rapport au composantes de y des monômes unitaires de degré r; on convient que $e^q_0(y) = 1$ pour tout $y \in \mathbb{C}^q$.

Si $f \in \mathcal{B}^q_\varrho$ on définit l'élément $e^q_r(f)$ de $\mathcal{B}^{\delta(r,q)}_\varrho$ par

$$[e^q_r(f)](x) = e^q_r(f(x)) \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}^p \text{ tel que } |x_i| \leqslant \varrho \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

et l'élément $[e^q_r(f)]_k$ de $\mathbb{C}^{\delta(r,q)}$ par

$$[e^q_r(f)](x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} [e^q_r(f)]_k x^k.$$

Remarque 1.1. En général $[e^q_r(f)]_k \neq e^q_r(f_k)$.

Remarque 1.2. On a $\|e^q_r(y)\| \leqslant \|y\|^r$ pour tout $y \in \mathbb{C}^q$ et $\|e^q_r(f)\|_\varrho \leqslant (\|f\|_\varrho)^r$ pour tout $f \in \mathcal{B}^q_\varrho$.

§2. Les bons opérateurs non linéaires

Tout élément $a(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^q} a_{m,n}x^m y^n$ de $\mathcal{B}^q_{\varrho,\varrho'}$ peut s'écrire $a(x,y) = \sum_{r\in\mathbb{N}} a_r(x)e^q_r(y)$ où $a_r(x)$ est une matrice à q lignes et $\delta(r,q)$ colonnes de fonctions éléments de $\mathcal{B}_\varrho$. On peut donc écrire $a_r(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} A_{r,k}x^k$, où $A_{r,k}$ est une matrice à q lignes et $\delta(r,q)$ colonnes d'éléments de $\mathbb{C}$.

Si f est un élément de $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$ on a

$$\begin{aligned} a(x, f(x)) &= \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} a_r(x) e_r^q(f(x)) \\ &= \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^p} \left(\sum\nolimits_{0\leqslant j\leqslant k, j\in\mathbb{N}^p} A_{r,k-j}[e_r^q(f)]_j\right) x^k. \end{aligned}$$

Définition 2.1. *Un bon opérateur non linéaire Q est la donnée d'une famille de matrices à q lignes et $\delta(r,q)$ colonnes d'éléments de $\mathbb{C}$, $(Q_{r,k,j})$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^p$, $j \in \mathbb{N}^p$ et $j \leqslant k$, définissant une application*

$$Q : \mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q) \longrightarrow \mathcal{M}_\varrho^q$$

par

$$Q(f) = \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} Q_r(f) \quad \text{où} \quad Q_r(f) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^p} \sum\nolimits_{j\in\mathbb{N}^p, j\leqslant k} Q_{r,k,j}[e_r^q(f)]_j x^k$$

et telle qu'il existe

$$a(x,y) = \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} a_r(x) y^r, \quad \text{où} \quad a_r(x) = \sum\nolimits_{j\in\mathbb{N}^p} a_{r,j} x^j,\ a_{r,j} \in \mathbb{R}^+,$$

vérifiant:

1) $\sum_{r\in\mathbb{N}} \|a_r\|_\varrho (\varrho')^r < \infty$,

2) *pour tout* r, k, j, $\|Q_{r,k,j}\| < a_{r,k-j}$.

Montrons que l'on a bien défini un élément $Q(f)$ de $\mathcal{M}_\varrho^q$ pour f dans $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$. La série qui définit $Q(f)$ est majorée pour $\|x\| \leqslant \varrho$, par:

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^p} \sum\nolimits_{j\leqslant k, j\in\mathbb{N}^p} \delta(r,q) \|Q_{r,k,j}\| \, \|[e_r^q(f)]_j\| \varrho^{|k|} \\ &\leqslant \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^p} \sum\nolimits_{j\leqslant k, j\in\mathbb{N}^p} \delta(r,q) a_{r,k-j} \|[e_r^q(f)]_j\| \varrho^{|k-j|} \varrho^{|j|} \\ &\leqslant \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \delta(r,q) \|a_r\|_\varrho \|[e_r^q(f)]\|_\varrho \\ &\leqslant \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \delta(r,q) \|a_r\|_\varrho [\|f\|_\varrho]^r \\ &\leqslant \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \delta(r,q) \|a_r\|_\varrho \varrho'^r. \end{aligned}$$

C'est la majoration obtenue en prenant pour norme des matrices $Q_{r,k,j}$ le plus grand module de ses coefficients.

Remarque 2.2. Si on prend pour norme d'une matrice $q \times \delta(r,q)$ $(q_{i,j})$ la norme $\|q_{i,j}\| = \sum_{1\leqslant j\leqslant \delta(r,q)} \sup_{1\leqslant i\leqslant q} |q_{i,j}|$ on fait disparaitre le terme $\delta(r,q)$ dans la majoration et on obtient la formule $\|Q(f)\|_\varrho \leqslant a(\varrho, \|f\|_\varrho)$.

Exemple 2.3. On donne ici un exemple de bon opérateur.
Soit $F(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ où $x=(x_1,\dots,x_p)$, $y=(y_1,\dots,y_q)$ et soit $\tau=\sum_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i x_i\partial/\partial x_i$ un champ de vecteurs vérifiant une condition de Poincaré:

$$\left|\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i n_i\right|\geqslant c\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant p} n_i.$$

L'application de $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$ dans $\mathcal{M}_\varrho^q$ définie par

$$f(x)\longrightarrow F(x,\tau^{-1}(f(x))$$

est un bon opérateur non linéaire.
Nous allons maintenant montrer qu'un bon opérateur non linéaire possède, en tout point f_0 de $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$, un bon opérateur linéaire tangent.

Remarque 2.4. Cette propriété permet l'utilisation de la méthode de Newton.

Soit ${\varrho'}_0$ un nombre réel positif tel que $\varrho'/2\leqslant {\varrho'}_0<\varrho'$.

Proposition 2.5. *Si Q est un bon opérateur non linéaire, il existe, en tout point f_0 de $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$ un bon opérateur linéaire, noté $(\partial Q/\partial f)(f_0)$, vérifiant:*

$$||Q(f)-Q(f_0)-(\partial Q/\partial f)(f_0)(f-f_0)||_\varrho\leqslant C(||f-f_0||_\varrho)^2$$

pour tout $f\in\mathcal{V}_{{\varrho'}_0}(\mathcal{M}_\varrho^q)$. La constante C dépend de $Q, \varrho, {\varrho'}_0$, mais pas de f_0.

L'inégalité est encore valable si on remplace ϱ par tout nombre réel positif inférieur à ϱ.

Démonstration.
Désignons par D_r l'application de $\mathbb{C}^q$ dans l'ensemble $\mathcal{M}_{\delta(r,q)\times q}(\mathbb{C})$ des matrices à $\delta(r,q)$ lignes et q colonnes d'éléments de $\mathbb{C}$, qui, à un vecteur $(y_1,\dots,y_q)\in\mathbb{C}^q$ associe la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(\partial/\partial y_1)(e_r^q(y)),\dots,(\partial/\partial y_q)(e_r^q(y))$.
Si f est dans $\mathcal{B}_\varrho^q$, on définit l'élément $D_r(f)$ de $\mathcal{M}_{\delta(r,q)\times q}(\mathcal{B}_\varrho)$ par

$$[D_r(f)](x)=D_r(f(x))\quad\text{pour tout}\quad x\in\mathbb{C}^p\quad\text{tel que}\quad |x_i|\leqslant\varrho\quad(1\leqslant i\leqslant p)$$

et l'élément $[D_r(f)]_k$ de $\mathcal{M}_{\delta(r,q)\times q}(\mathbb{C})$ par

$$[D_r(f)](x)=\sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^p}[D_r(f)]_k x^k.$$

La démonstration se poursuit à l'aide de deux lemmes:

Lemme 2.6. *Pour tout couple d'indice (k,m) dans $\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$,*

$$R_{k,m} = \sum_{r\in\mathbb{N}} \sum_{m\leqslant j\leqslant k} Q_{r,k,j}[D_r(f_0)]_{j-m} = \sum_{r\geqslant 1} \sum_{m\leqslant j\leqslant k} Q_{r,k,j}[D_r(f_0)]_{j-m}$$

est une somme infinie de matrices constantes $q\times q$, qui est convergente.

Nous avons les inégalités:

1) pour tout $y\in\mathbb{C}^q$ et tout i tel que $1\leqslant i\leqslant q$ $||\partial/\partial y_i(e^q_r(y)|| \leqslant r||y||^{r-1}$, si on désigne par $[D_r(f)]^{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice $D_r(f)$ on a pour tout f appartenant à $\mathcal{B}_\varrho$
$$\| [D_r(f)]^{(i,j)} \|_\varrho \leqslant r(\|f\|_\varrho)^{r-1}.$$

2) Majorons maintenant $||R_{k,m}||$.

Si $[D_r(f_0)]^{(i,j)}_m$ désigne l'élément d'indice (i,j) de la matrice scalaire $[D_r(f_0)]_m$, nous avons:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m\leqslant j\leqslant k} Q_{r,k,j}[D_r(f_0)]_{j-m}\right\| &= \left\|\sum_{0\leqslant n\leqslant k-m} Q_{r,k,m+n}[D_r(f_0)]_n\right\| \\ &\leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant k-m} q||Q_{r,k,m+n}||\sup_{i,j}\left|[D_r(f_0)]^{(i,j)}_n\right| \\ &\leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant k-m} q a_{r,k-m-n}\sup_{i,j}\left|[D_r(f_0)]^{(i,j)}_n\right|.\end{aligned}$$

Désignons par $b^r_n(f_0)$ le coefficient d'indice n dans la série en ϱ

$$\left(\sum ||f_{0,n}||\varrho^n\right)^{r-1} = (||f_0||_\varrho)^{r-1}.$$

On a

$$\left|[D_r(f_0)]^{(i,j)}_n\right| \leqslant r b^r_n(f_0)$$

pour tout $n\in\mathbb{N}^p$ et tout (i,j) tel que $1\leqslant i\leqslant \delta(r,q), 1\leqslant j\leqslant q$ et donc

$$||R_{k,m}|| \leqslant q\sum_r r\sum_{0\leqslant n\leqslant k-m} a_{r,k-m-n}b^r_n(f_0).$$

Le membre de droite est bien une série convergente, en effet:
la série $\sum_r ||a_r||_\varrho \varrho'^r$ converge, donc aussi $\sum_r ||a_r||_\varrho r({\varrho'}_0)^{r-1}$ puisque dès que l'on a $\varrho' > {\varrho'}_0 \geqslant \varrho'/2$, on a $r{\varrho'}^{r-1}_0 \leqslant (2/e(\varrho' - {\varrho'}_0))\varrho'^r$ $(\log e = 1)$, donc aussi la série

$$\begin{aligned}\sum_r ||a_r||_\varrho r(||f_0||_\varrho)^{r-1} &= \sum_r\left(\sum_k a_{r,k}\varrho^k\right)\left(\sum_k rb^r_k(f_0)\varrho^k\right) \\ &= \sum_j \varrho^j\sum_{0\leqslant n\leqslant j, r\geqslant 0} ra_{r,j-n}b^r_j(f_0) = \sum_j \alpha_j(f_0)\varrho^j\end{aligned}$$

où $\alpha_j(f_0) = \sum_{0\leqslant n\leqslant j, r\geqslant 0} r a_{r,j-n} b_j^r(f_0)$.
On a alors

$$||R_{k,m}|| \leqslant q\alpha_{k-m}(f_0)$$

et la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^p} \alpha_j(f_0)\varrho^j$ est convergente.
Donc la famille infinie $(R_{k,m})_{(k,m)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ de matrices scalaires appartenant à $\mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{C})$ définit un bon opérateur linéaire de $\mathcal{B}_\varrho^q$ dans $\mathcal{B}_\varrho^q$ que l'on notera $(\partial Q/\partial y)(f_0)$.

Lemme 2.7. Nous avons

$$||Q(f) - Q(f_0) - (\partial Q/\partial f)(f_0)(f - f_0)||_\varrho \leqslant C(||f - f_0||_\varrho)^2$$

pour tout $f \in \mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$, *où* $(\partial Q/\partial f)(f_0) = (R_{k,m})_{(k,m)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ *et*

$$C = \sum_{r\geqslant 2} \|a_r\|_\varrho (r(r-1)/2)(\varrho_0')^{r-2}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
&Q(f) - Q(f_0) - (\partial Q/\partial f)(f_0)(f - f_0)\\
&= \sum_{r,k,j,k\geqslant j} Q_{r,j,k} x^k \{[e_r^q(f)]_j - [e_r^q(f_0)]_j\} - \sum_{k\geqslant j} R_{k,j} x^k \{[e_1^q(f)]_j - [e_1^q(f_0)]_j\}\\
&= \sum_{r\geqslant 1,k,j,k\geqslant j} Q_{r,k,j} x^k \{[e_r^q(f)]_j - [e_r^q(f_0)]_j\}\\
&\qquad - \sum_{r\geqslant 1,k\geqslant j} x^k \sum_{j\leqslant m\leqslant k} Q_{r,k,m}[D_r(f_0)]_{m-j} \{[e_1^q(f)]_j - [e_1^q(f_0)]_j\}\\
&\qquad - \sum_{r\geqslant 1,k\geqslant m} x^k Q_{r,m,k} \sum_{j\leqslant m} [D_r(f_0)]_{m-j}[e_1^q(f - f_0)]_j\\
&= \sum_{r\geqslant 1,k,j,k\geqslant j} Q_{r,k,j} x^k \left\{[e_r^q(f)]_j - [e_r^q(f_0)]_j - \sum_{m\leqslant j} [D_r(f_0)]_{j-m}[e_1^q(f - f_0)]_m\right\}\\
&= \sum_{r\geqslant 2,k,j,k\geqslant j} Q_{r,k,j} x^k \{[e_r^q(f)]_j - [e_r^q(f_0)]_j - [D_r(f_0)(f - f_0)]_j\}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\| Q(f) - Q(f_0) - (\partial Q/\partial f)(f_0)(f - f_0) \|_\varrho\\
&\qquad \leqslant \sum_{r\geqslant 2} \|a_r\|_\varrho \sum_j \left\|[e_r^q(f)]_j - [e_r^q(f_0)]_j - [D_r(f_0)(f - f_0)]_j\right\|_{\varrho^j}\\
&\qquad \leqslant \left[\sum_{r\geqslant 2} \|a_r\|_\varrho (r(r-1)/2)(\varrho_0')^{r-2}\right] \left[\| f - f_0 \|_\varrho\right]^2
\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C = \sum_{r\geqslant 2} \|a_r\|_\varrho (r(r-1)/2)(\varrho_0')^{r-2}$
La proposition 2.5 est donc démontrée.

Définition 2.8. *Le bon opérateur linéaire* $(\partial Q/\partial f)(f_0)$ *est appelé l'opérateur linéaire tangent à l'opérateur* Q *au point* f_0 *de* $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$.

§3. Partie σ-constante d'un bon opérateur linéaire

Soit σ une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{B}^q_\varrho$ dans $\mathcal{B}^q_\varrho$, dont on suppose seulement pour l'instant qu'elle est définie par une matrice diagonale infinie $(\sigma_{n,n})_{n\in\mathbb{N}^p}$, c'est à dire que:
pour tout $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} f_n x^n \in \mathcal{B}^q_\varrho$, $\sigma(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} \sigma_{n,n} f_n x^n$.

Exemples 3.1.

3.1.1. $\sigma = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i x_i \partial/\partial x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \cdots, p$.

3.1.2. $\sigma = f(x) \longrightarrow f(\lambda x)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Pour l'instant on ne fait aucune hypothèse sur σ, en particulier aucune hypothèse de continuité ou d'existence d'un inverse.

Définition 3.2. *Soit $R = (R_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ un bon opérateur linéaire de $\mathcal{B}^q_\varrho$ dans $\mathcal{B}^q_\varrho$. On appellera partie σ-constante de R et on notera $R^0 = (R^0_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ le bon opérateur linéaire de $\mathcal{B}^q_\varrho$ dans $\mathcal{B}^q_\varrho$ défini par:*

$$\begin{aligned} R^0_{k,j} &= 0 \quad si \quad k \neq j \\ R^0_{k,k} &= R_{k,k} \quad pour\ tout \quad k \in \mathbb{N}^p. \end{aligned}$$

Tout bon opérateur linéaire R est donc la somme $R = R^0 + R^*$ d'un bon opérateur linéaire σ-constant et d'un bon opérateur linéaire R^* dont la partie σ-constante est nulle.

Remarque 3.3. La partie σ-constante de R est ce que nous avions appelé dans[2] la valeur à l'origine de l'opérateur R. La dénomination σ-constant est justifiée par le fait que $[\sigma, R^0] = 0$.

Remarque 3.4. Une telle décomposition existe pour d'autres applications linéaires que σ. Considèrons par exemple le cas d'une seule variable x ($p = 1$) et d'un bon opérateur linéaire $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^2}$.

Définissons $Q^0 = (Q^0_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^2}$ par:

$$Q^0_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k > j \\ Q_{0,j-k} C_j^{j-k} & \text{si} \quad k \leqslant j \end{cases}$$

et appelons Q^0 la partie d/dx-constante de Q. Il existe une décomposition de $Q = Q^0 + Q^*$ en la somme de deux bons opérateurs linéaires, l'un Q^0, qui est d/dx-constant c'est à dire vérifie $[d/dx, Q^0] = 0$, l'autre Q^* dont la partie d/dx-constante est nulle.

§4. Solution analytique de l'équation $\sigma(y) = Q(y)$

Soit l'équation $\sigma(y) = Q(y)$ où Q est un bon opérateur non linéaire de $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}^q_\varrho)$ dans $\mathcal{M}^q_\varrho$. Donnons les étapes de la méthode de Newton, sans pour l'instant s'occuper de convergence:

Ne$_1$) On suppose que $y_0 = 0$ et que l'on peut résoudre de proche en proche la suite d'équations, où l'inconnue est $y_{n+1} \in \mathcal{V}_{\varrho'_{n+1}}(\mathcal{M}^q_{\varrho_{n+1}})$

$$(1_n) \qquad [\sigma - (\partial Q/\partial y)(y_n)](y_{n+1}) = Q(y_n) - (\partial Q/\partial y)(y_n)(y_n).$$

Ne$_2$) On pose ensuite $y_{n+1} - y_n = \Delta_n$ et on cherche une équation dont Δ_n est solution

$$\begin{aligned} \sigma(y_{n+1} - y_n) &- (\partial Q/\partial y)(y_n)(y_{n+1}) + (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(y_n) \\ &= Q(y_n) - Q(y_{n-1}) - (\partial Q/\partial y)(y_n)(y_n) + (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(y_{n-1}) \end{aligned}$$

c'est à dire $[\sigma - (\partial Q/\partial y)(y_n)](\Delta_n) = Q(y_n) - Q(y_{n-1}) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(\Delta_{n-1})$ qui est une suite d'équations équivalentes à (1_n) avec $y_{-1} = \Delta_{-1} = 0$.

Ne$_3$) On pose $\Delta_n = R_n(E_n)$, où R_n est un bon opérateur $\mathbb{C}$-linéaire que l'on déterminera pour "simplifier" le premier membre de l'équation c'est à dire obtenir une équation en E_n dont le premier membre est $(\sigma - [(\partial Q/\partial y)(y_n)]^0)(E_n)$, où $[(\partial Q/\partial y)(y_n)]^0$ est la partie σ-constante de l'opérateur $(\partial Q/\partial y)(y_n)$. Sous la condition $y_n(0) = 0$, cette partie σ-constante est égale à Q_1^0, partie σ-constante de la partie linéaire $Q_1 = (\partial Q/\partial y)(0))$ de Q.

L'équation vérifiée par Δ_n dans Ne$_2$) équivaut à:

$$\Big[\big(\sigma - (\partial Q/\partial y)(y_n)\big) \circ R_n\Big](E_n) = Q(y_n) - Q(y_{n-1}) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(\Delta_{n-1})$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} \Big\{[\sigma - Q_1^0, R_n] - ((\partial Q/\partial y)(y_n) - Q_1^0) \circ R_n + R_n \circ (\sigma - Q_1^0)\Big\}(E_n) \\ = Q(y_n) - Q(y_{n-1}) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(\Delta_{n-1}). \end{aligned}$$

Supposons que l'on puisse résoudre de proche en proche la suite d'équations:

$$(2_n) \qquad [\sigma - Q_1^0, R_n] = \big((\partial Q/\partial y)(y_n) - Q_1^0\big) \circ R_n.$$

Alors l'équation (1_n) équivaut à:

$$\big(R_n \circ (\sigma - Q_1^0)\big)(E_n) = Q(y_n) - Q(y_{n-1}) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(\Delta_{n-1})$$

et si R_n est inversible à:

$$(3_n) \qquad \big(\sigma - Q_1^0\big)(E_n) = (R_n)^{-1}\Big[Q(y_n) - Q(y_{n-1}) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(\Delta_{n-1})\Big].$$

Nous allons mettre maintenant sur le couple (σ, Q) (plus précisément sur le couple (σ, Q_1^0)) des hypothèses suffisantes pour pouvoir résoudre successivement les équations (2_n) et (3_n).

Définition 4.1. *On dit qu'un couple (σ, Q_1^0) vérifie des conditions de Siegel* (Sie₁) *et* (Sie₂) *s'il existe deux constantes réelles positives C et γ telles que pour tout couple de nombres réels positifs ϱ et ϱ' vérifiant $0 < \varrho' \leqslant \varrho < \varrho_0$:*

(Sie₁) *l'opérateur $(\sigma - Q_1^0)$ admet un inverse défini de $\mathcal{M}_\varrho^q$ dans $\mathcal{M}_{\varrho'}^q$ et vérifiant*

$$\left\|(\sigma - Q_1^0)^{-1}(f)\right\|_{\varrho'} \leqslant \left(C\varrho^\gamma/(\varrho-\varrho')^\gamma\right) \| f \|_\varrho;$$

(Sie₂) (intégration par parties) *Pour tout bon opérateur R défini sur $\mathcal{B}_\varrho^q$ et dont la partie σ-constante est nulle, il existe un bon opérateur R^* dont la partie σ-constante est nulle et défini sur $\mathcal{B}_{\varrho'}^q$ tel que:*

$$\begin{cases} [\sigma - Q_1^0, R^*] = R \\ \| R^* \|_\varrho \leqslant (C\varrho^\gamma/(\varrho-\varrho')^\gamma) \|R\|_\varrho. \end{cases}$$

Résolution de l'équation (2_n). Par récurrence.
Supposons que, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on a résolu (2_i) et (3_i) et que l'on a:

$$\begin{cases} \|R_i\|_{\varrho_{i+1}} \leqslant \alpha_i \leqslant M_1 \\ \|(R_i)^{-1}\|_{\varrho_{i+1}} \leqslant \alpha_i \leqslant M_1 \\ \|\Delta_i\|_{\varrho_{i+1}} \leqslant \varepsilon_i \quad \text{avec} \quad \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} \varepsilon_i < \varrho_o'. \end{cases}$$

On suppose que pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$ les opérateurs R_i ont l'identité pour partie σ-constante.

Posons $R_n = R_{n-1} \circ S_{n-1}$; l'équation

$$[\sigma - Q_1^0, R_n] = \left((\partial Q/\partial y)(y_n) - Q_1^0\right) \circ R_n$$

équivaut à:

$$[\sigma - Q_1^0, S_n] = \left\{(R_{n-1})^{-1} \circ ((\partial Q/\partial y)(y_n) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})) \circ R_{n-1}\right\} \circ S_n.$$

On a vu au paragraphe 6 de [2], que, si l'on pose $C^* = 2^{1+2\gamma}C$ (où γ et C sont les constantes intervenant dans la condition de Siegel) et si l'on a:

$$\|(R_{n-1})^{-1} \circ ((\partial Q/\partial y)(y_n) - (\partial Q/\partial y)(y_{n-1})) \circ R_{n-1}\|_{\varrho_n} \leqslant \tau^\gamma/C^*$$

où τ est un nombre réel tel que $0 < \tau < 1$, alors: l'équation en S_n possède une solution bon opérateur linéaire analytique dont la partie σ-constante est l'identité et qui vérifie

$$\begin{cases} \|S_n\|_{(1-\tau)\varrho_n} \leqslant \\ \qquad 1\Big/\Big\{1-(C^*/\tau^\gamma)\Big\|(R_{n-1})^{-1}\circ((\partial Q/\partial y)(y_n)-(\partial Q/\partial y)(y_{n-1}))\circ R_{n-1}\Big\|_{\varrho_n}\Big\} \\ \text{et} \\ \|S_n^{-1}\|_{(1-\tau)\varrho_n} \leqslant \\ \qquad 1\Big/\Big\{1-(C^*/\tau^\gamma)\Big\|(R_{n-1})^{-1}\circ((\partial Q/\partial y)(y_n)-(\partial Q/\partial y)(y_{n-1}))\circ R_{n-1}\Big\|_{\varrho_n}\Big\}. \end{cases}$$

Or il existe une constante C_1 telle que, si y_n et y_{n-1} sont dans $\mathcal{V}_{\varrho_0'}(\mathcal{M}^q_{\varrho 0})$ on ait:

$$\|(\partial Q/\partial y)(y_n)-(\partial Q/\partial y)(y_{n-1})\|_{\varrho_n} \leqslant C_1\|y_n-y_{n-1}\|_{\varrho_n}.$$

On choisit une valeur τ_n pour τ de façon que soit vérifiée l'inégalité:

$$C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1} < (\tau_n)^\gamma/C^*$$

qui entraîne

$$\Big\|R_{n-1}^{-1}\circ(\partial Q/\partial y)(y_n)-(\partial Q/\partial y)(y_{n-1})\circ R_{n-1}\Big\|_{\varrho_n} < (\tau_n)^\gamma/C^*$$

donc

$$\begin{cases} \|R_n\|_{(1-\tau)\varrho_n} \leqslant (\alpha_{n-1})\big/\big(1-(C^*/(\tau_n)^\gamma)C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1}\big) \\ \text{et} \\ \|R_n^{-1}\|_{(1-\tau)\varrho_n} \leqslant (\alpha_{n-1})\big/\big(1-(C^*/(\tau_n)^\gamma)C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1}\big). \end{cases}$$

Résolution de l'équation (3_n). Il existe une constante C_2 telle que, si y_n et y_{n-1} sont dans $\mathcal{V}_{\varrho_0'}(\mathcal{M}^q_{\varrho 0})$ on ait

$$\Big\|Q(y_n)-Q(y_{n-1})-(\partial Q/\partial y)(y_{n-1})(\Delta_{n-1})\Big\|_{(1-\tau_n)\varrho_n} \leqslant C_2\left(\|\Delta_{n-1}\|_{(1-\tau_n)\varrho_n}\right)^2.$$

Soit ϱ_{n+1} un nombre réel tel que $0<\varrho_{n+1}<(1-\tau_n)\varrho_n$.
On a alors d'après (Sie_1):

$$\begin{aligned} \|E_n\|_{\varrho_{n+1}} \leqslant {}& \big[(C(1-\tau_n)^\gamma(\varrho_n)^\gamma\big/[(1-\tau_n)\varrho_n-\varrho_{n+1}]^\gamma\big] \\ & \big[(\alpha_{n-1})\big/\big(1-(C^*/(\tau_n)^\gamma)C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1}\big)\big]\,C_2(\varepsilon_{n-1})^2 \\ \|\Delta_n\|_{\varrho_{n+1}} \leqslant {}& \big[(C(1-\tau_n)^\gamma(\varrho_n)^\gamma\big/[(1-\tau_n)\varrho_n-\varrho_{n+1}]^\gamma\big] \\ & \big[(\alpha_{n-1})\big/\big(1-(C^*/(\tau_n)^\gamma)C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1}\big)\big]^2\,C_2(\varepsilon_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Choix de τ_n, ε_n et ϱ_{n+1} et poursuite de la récurrence.

Soient a et b deux nombres réels tels que:

$$\begin{cases} 0 < a < (1/2)^{1/(b-1)}, \quad 1 < b \leqslant 3/2, \quad n \leq b^n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 \\ \qquad \sum_{n\geqslant 0} (CC_2/C^*C_1)^n a^{2b^{n+1}} \varepsilon_0 < \varrho_0' \\ \qquad (\text{le } \varrho_0' \text{ qui participe à la détermination de } C_1) \\ \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \quad 2C^*C_1M_1^2(CC_2/C^*C_1)^{n-1}a^{(b^n)}\varepsilon_0 < 1. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} (\tau_n)^\gamma &= C^*C_1M_1^2(CC_2/C^*C_1)^{n-1}a^{(b^n)}\varepsilon_0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \\ \varepsilon_n &= (CC_2/C^*C_1)^n a^{2b^{n+1}} \varepsilon_0 \qquad\qquad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_n &= (\alpha_{n-1})/(1 - ((C^*/(\tau_n)^\gamma)C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \\ \varrho_{n+1} &= (1 - 2\tau_n)\varrho_n \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

$\alpha_0, \varepsilon_0, \varrho_0, \tau_0$ seront déterminés plus tard au démarrage de la récurrence.

La suite de nombres réels strictement positifs $(\varrho_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un nombre réel strictement positif.

Pour poursuivre la récurrence, on doit montrer que

$$\begin{cases} \|R_n\|_{\varrho_{n+1}} &\leqslant \alpha_n \leqslant M_1 \\ \|(R_n)^{-1}\|_{\varrho_{n+1}} &\leqslant \alpha_n \leqslant M_1 \\ \|\Delta_n\|_{\varrho_{n+1}} &\leqslant \varepsilon_n \\ C_1(M_1)^2\varepsilon_{n-1} &\leqslant (\tau_n)^\gamma/C^*. \end{cases}$$

On a $C^*C_1(M_1)^2\varepsilon_{n-1} = a^{(b^n)}(\tau_n)^\gamma$, d'où la dernière inégalité; on a donc aussi, d'après l'hypothèse de récurrence, $C_1(\alpha_{n-1})^2\varepsilon_{n-1} \leqslant (\tau_n)^\gamma/C^*$, donc on peut résoudre l'équation en R_n et on a les majorations:

$$\|R_n\|_{\varrho_{n+1}} \leqslant \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \|(R_n)^{-1}\|_{\varrho_{n+1}} \leqslant \alpha_n.$$

Nous allons montrer maintenant que $\alpha_n \leqslant M_1$ et pour cela faire l'hypothèse de récurrence plus précise: $\alpha_n \leqslant M_1(1 - a^{(b^n)})$.

Posons momentanément, pour simplifier l'écriture, $a^{(b^n)} = a_n$, α_n s'écrit aussi

$$\alpha_n = (\alpha_{n-1})/\left(1 - a_n(\alpha_{n-1}/M_1)^2\right).$$

L'inégalité $\alpha_n \leqslant M_1(1-a_n)$ est équivalente à

$$(1-a_n)a_n(\alpha_{n-1}/M_1)^2 + \alpha_{n-1}/M_1 - (1-a_n) \leqslant 0.$$

Pour que cette dernière inégalité soit vérifiée il suffit que soit vérifiée l'inégalité

$$(1-a_n)a_n(1-a_{n-1})^2 + (1-a_{n-1}) - (1-a_n) \leqslant 0$$

car l'hypothèse de récurrence entraîne $0 \leqslant (\alpha_{n-1}/M_1) \leqslant (1-a_{n-1})$, c'est à dire encore

$$a_n(1-a_n)(1-a_{n-1})^2 \leqslant a_{n-1} - a_n,$$

ou, puisque $a_n = (a_{n-1})^b$

$$(a_{n-1})^{b-1}(1-(a_{n-1})^b)(1-a_{n-1})^2 \leqslant 1-(a_{n-1})^{b-1}$$

ce qui est vérifié car l'hypothèse $a < (1/2)^{1/b-1}$ entraîne $(a_{n-1})^{b-1} \leqslant 1-(a_{n-1})^{b-1}$.
Il reste à montrer l'inégalité $\|\Delta_n\|_{\varrho_{n+1}} \leqslant \varepsilon_n$. On a

$$(1-\tau_n)\varrho_n \big/ \left((1-\tau_n)\varrho_n - \varrho_{n+1}\right) = (1-\tau_n)\big/\tau_n$$

donc la majoration trouvée pour $\|\Delta_n\|_{\varrho_{n+1}}$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \|\Delta_n\|_{\varrho_{n+1}} \leqslant CC_2\left((1-\tau_n)/\tau_n\right)^\gamma (\alpha_n)^2(\varepsilon_{n-1})^2 &\leqslant CC_2(M_1)^2(\varepsilon_{n-1})^2/(\tau_n)^\gamma \\ &= (CC_2/C^*C_1)^n a^{3b^n} \leqslant \varepsilon_n \end{aligned}$$

puisque $2b^{n+1} \leqslant 3b^n$ équivaut à $b \leqslant 3/2$.
Démarrage de la récurrence à l'ordre 0.
On prend $y_0 = 0$. On résoud ensuite les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [\sigma - Q_1^0, R_0] &=& (Q_1 - Q_1^0) o R_0 \\ [\sigma - Q_1^0, (R_0)^{-1}] &=& -(R_0)^{-1} \circ (Q_1 - Q_1^0) \end{array} \right.$$

et on a pour tout nombre réel τ tel que $0 < \tau < 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|R_0\|_{(1-\tau)\varrho_0} &\leqslant& 1\big/\left(1 - (C^*/(\tau)^\gamma)\, \|Q_1 - Q_1^0\|_{\varrho_0}\right) \\ \|(R_0)^{-1}\|_{(1-\tau)\varrho_0} &\leqslant& 1\big/\left(1 - (C^*/(\tau)^\gamma)\, \|Q_1 - Q_1^0\|_{\varrho_0}\right) \end{array} \right.$$

dès que le couple ϱ_0, τ vérifie: $\|Q_1 - Q_1^0\|_{\varrho_0} < (\tau)^\gamma / C^*$
On choisit un tel couple ϱ_0, τ_0 (d'abord τ_0 et ensuite ϱ_0).

On pose:

$$\varrho_1 = (1-2\tau_0)\,\varrho_0, \quad \alpha_0 = \sup\left(\|R_0\|_{\varrho_1},\, \|(R_0)^{-1}\|_{\varrho_1}\right), \quad M_1 = \alpha_0/(1-a).$$

On résoud ensuite l'équation $(\sigma - Q_1^0)(E_0) = (R_0)^{-1}(Q(0))$ et on pose $\varepsilon_0 = \|\Delta_0\|_{\varrho_1}$. Ce qui termine la démonstration de la convergence de la suite y_n.

Remarque 4.2. On n'a pas fait l'hypotèse $Q(0)(0) = 0$, parce qu'elle n'intervient pas dans la démonstration de la convergence de la suite y_n.

Elle intervient par contre dans l'existence d'une solution formelle puisque on a supposé dans (Sie_1) l'existence de l'inverse $(\sigma - Q_1^0)^{-1}$ de $\mathcal{M}_\varrho^q$ dans $\mathcal{M}_{\varrho'}^q$. On a donc:

Théorème 4.3. *Soit Q un bon opérateur non linéaire, défini de $\mathcal{V}_{\varrho'}(\mathcal{M}_\varrho^q)$ dans $\mathcal{M}_\varrho^q$ tel que $Q(0)(0) = 0$ et σ une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{B}_\varrho^q$ dans $\mathcal{B}_\varrho^q$ définie par une matrice diagonale infinie. On suppose que le couple (σ, Q_1^0) vérifie des conditions de Siegel, où Q_1^0 est la partie σ-constante de la partie linéaire Q_1 de Q.*
Alors l'équation $\sigma(y) = Q(y)$ admet une solution analytique au voisinage de 0 et cette solution est l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$.

§5. Applications du théorème 4.3

5.1. Diagonalisation d'un champ de vecteurs vérifiant une condition de petits dénominateurs

Soit le champ de vecteurs $\tau = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} q_i(x)\partial/\partial x_i$ où l'on suppose:

a) $q_i(x)$ analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$ et $q_i(0) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$

b) la matrice $((\partial q_i/\partial x_j)(0))_{i,j}$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$

c) qu'il existe deux constantes réelles positives C et γ telles que pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ $\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i n_i - \lambda_j\right| \geqslant C/\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant p} n_i\right|^\gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}^p$ tel que $\sum_{1\leqslant i\leqslant p} n_i \geqslant 2$.

Alors,

Théorème 5.1.1. (K. Siegel cf.[3]). *Il existe un changement de variables $x = (y_1(\xi), \dots, y_p(\xi))$ holomorphe inversible au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$ tel que*

α) $y_i(\xi) = \xi_i +$ (termes d'ordre supérieur ou égal à deux)

β) *le changement de variables transforme le champ de vecteurs τ en $\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i \xi_i \partial/\partial\xi_i$.*

En effet, si l'on pose $\sigma(f) = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i \xi_i \partial f/\partial x_i$ le changement de variables y est solution de

$$\text{(E)} \qquad \sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_p(y) \end{pmatrix}.$$

Ecrivons l'opérateur

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} q_1(f) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_p(f) \end{pmatrix}$$

sous la forme

$$Q(f) = \sum_{r\in\mathbb{N}} Q_r e_r^p(f)$$

où les Q_r sont des matrices à p lignes et $\delta(r,p)$ colonnes d'éléments de $\mathbb{C}$
On a:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0 \\ Q_1 &= ((\partial q_i/\partial x_j)(0))_{1\leqslant i,j\leqslant p} = \text{la partie } \sigma\text{-constante de } Q_1. \end{aligned}$$

On peut supposer que

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda_p \end{pmatrix} = \Lambda.$$

L'équation (E) équivaut à:

$$(\sigma - \Lambda)(y) = Q^*(y) \quad \text{où} \quad Q^* = Q - \Lambda.$$

Montrons que l'hypothèse c) entraîne les conditions de Siegel. Soient ϱ et ϱ' deux réels tels que $0 < \varrho' < \varrho$

(Sie$_1$):

$$(\sigma - \Lambda) \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ f_j \\ \cdot \\ f_p \end{pmatrix} = \left\{ \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^p} \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i n_i - \lambda_j \right) f^j_{n_1\dots n_p} (\xi_1)^{n_1} \dots (\xi_p)^{n_p} \right) \right\}_{1\leqslant j\leqslant p}$$

donc $(\sigma - \Lambda)$ est inversible de $(\mathcal{M}_\varrho^2)^q$ dans $(\mathcal{M}_{\varrho'}^2)^q$, où $\mathcal{M}_\varrho^2$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{M}_\varrho$ dont la partie linéaire est nulle. Il faut alors prendre, pour premier terme $y_0 = {}^t(y_1, \ldots, y_p)_0$ (${}^t(y)$ désignant le vecteur transposé du vecteur y) de la suite utilisée dans la méthode de Newton, non pas 0, qui donnerait la solution 0, mais ${}^t(x_1, \ldots, x_p)$, ou bien si l'on veut se ramener aux conditions du théorème 4.3, faire d'abord le changement de variables

$$y = z + {}^t(x_1, \ldots, x_p).$$

(Sie$_2$): Soit $(R_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ un bon opérateur linéaire défini sur $\mathcal{B}_\varrho^p$ dont la diagonale $(R_{k,k})_{k\in\mathbb{N}^p}$ est nulle. On cherche un bon opérateur linéaire $(X_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ défini sur $\mathcal{B}_{\varrho'}^p$, de diagonale $(X_{k,k})_{k\in\mathbb{N}^p}$ nulle tel que

$$[\sigma - \Lambda,\ X_{k,j}] = R_{k,j}.$$

Soit $(X_{k,j})^{\alpha\beta}$ le coeffcient de la α^{ieme} ligne et de la β^{ieme} colonne de la matrice scalaire $X_{k,j}$. On a

$$\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i(k_i - j_i)(X_{(k_1,\ldots,k_p)(j_1,\ldots,j_p)})^{\alpha\beta} - (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(X_{k,j})^{\alpha\beta} = (R_{k,j})^{\alpha\beta}$$

donc

$$(X_{k,j})^{\alpha\beta} = (R_{k,j})^{\alpha\beta} \Big/ \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i(k_i - j_i) - (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)$$

et la condition **(Sie$_2$)** est vérifiée.

5.2. Fonctions analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$ conjuguées à une rotation

Considérons la fonction $q(x) = \lambda x + q_2 x + q_3 x + \ldots$, holomorphe au voisinage de l'origine 0 de $\mathbb{C}$. On cherche une application holomorpe au voisinage de 0 ainsi que son inverse telle que

$$(y^{-1} \circ q \circ y)(x) = \lambda x,$$

c'est à dire

$$y(\lambda x) = \lambda y + \sum\nolimits_{j\geqslant 2} q_j y^j$$

ou encore

$$y(\lambda x) - \lambda y = \sum\nolimits_{j\geqslant 2} q_j y^j.$$

Si on désigne par σ l'application $f \longrightarrow f(\lambda x) - \lambda f(x)$ et si l'on suppose que

$$|\,\lambda^n - \lambda\,| \geqslant C/n^\gamma \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 2$$

alors l'application σ est inversible de $(\mathcal{M}_\varrho)^2$ dans $(\mathcal{M}_{\varrho'})^2$; en poursuivant alors l'étude comme dans 5.1 nous obtenons:

Théorème 5.2.1. *Si λ vérifie la condition de Siegel*

$$|\,\lambda^n - \lambda\,| \geqslant C/n^\gamma \quad \textit{pour tout} \quad n \geqslant 2$$

le germe d'application holomorphe $q(x) = \lambda x + q_2 x + q_3 x + \dots$, est conjugué au germe λx.

5.3. Solutions analytiques périodiques de l'équation de J. Moser ([4] p.145)

Considérons l'équation donnée par Moser

$$\text{(E)} \qquad \omega_1 \partial^3 u/\partial x_1^3 + \omega_2 \partial^3 u/\partial x_2^3 + \mu a(x) u(x) = g(x)$$

où $a(x), g(x)$ sont des fonctions de deux variables, analytiques et périodiques de période 2π et μ une constante complexe. On suppose que le terme constant a_0 du développement en série de Fourier de $a(x)$ est nul.

Théorème 5.3.1. *Si ω_1/ω_2 est réel irrationnel et vérifie:*
il existe deux nombres réels positifs C et γ tels que

$$|\,\omega_1 (n_1)^3 + \omega_1 (n_2)^3\,| \geqslant C/(|n_1| + |n_2|)^\gamma \quad \textit{pour tout} \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}.$$

Alors, pour μ assez petit, si l'équation (E) *admet une série de Fourier formelle solution, cette série converge et est l'unique solution ayant un terme constant u_0 donné.*

Puisque les fonctions a, g sont analytiques périodiques, le changement de variables $z_1 = \exp(ix_1)$, $z_2 = \exp(ix_2)$ transforme l'équation (E) en l'équation équivalente

$$\text{(E}^*\text{)} \qquad \omega_1 (z_1 \partial^3/\partial z_1^3)(u^*) + \omega_2 (z_2 \partial^3/\partial z_2^3)(u^*) + \mu a^*(z) u^*(z) = g^*(z)$$

où $u(x) = u^*(e^{ix})$, $ia(x) = a^*(e^{ix})$ et $ig(x) = g^*(e^{ix})$.

Lemme 5.3.2. *Nous avons:*

a) $\omega_1 (z_1 \partial^3/\partial z_1^3) + \omega_2 (z_2 \partial^3/\partial z_2^3) \quad =$

$$\omega_1 (z_1 \partial/\partial z_1 + (\omega_2/\omega_1)^{1/3} z_2 \partial/\partial z_2) \circ (z_1 \partial/\partial z_1 + j (\omega_2/\omega_1)^{1/3} z_2 \partial/\partial z_2) \circ (z_1 \partial/\partial z_1 + j^2 (\omega_2/\omega_1)^{1/3} z_2 \partial/\partial z_2)$$

où j et j^2 sont les racines cubiques de l'unité et où l'on convient que $(\omega_2/\omega_1)^{1/3} = -(|\omega_2/\omega_1|)^{1/3}$ si ω_2/ω_1 est négatif;

b) *la condition*
$|\omega_1 (n_1)^3 + \omega_2 (n_2)^3| \geqslant C/(|n_1| + |n_2|)^\gamma$ *pour tout* $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}$
est équivalente à la condition:
$|n_1 + (\omega_2/\omega_1)^{1/3} n_2| \geqslant C_1/(|n_1| + |n_2|)^{\gamma_1}$ *pour tout* $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}$.

Démonstration.

a) est évident.

b) résulte de:

1°) de la factorisation

$$\omega_1(n_1)^3 + \omega_2(n_2)^3$$
$$= \omega_1(n_1 + (\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2)(n_1 + j(\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2)(n_1 + j^2(\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2)$$

2°) de l'existence de constantes positives C_2 et D_2 telles que

$$D_2(|n_1| + |n_2|) \geqslant |n_1 + j(\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2| \geqslant C_2(|n_1| + |n_2|)$$
$$D_2(|n_1| + |n_2|) \geqslant |n_1 + j^2(\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2| \geqslant C_2(|n_1| + |n_2|)$$

pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}$.

Dans toute la suite nous noterons

$$\sigma = z_1\partial/\partial z_1 + (\omega_2/\omega_1)^{1/3}z_2\partial/\partial z_2$$

et

$$P = (z_1\partial/\partial z_1 + j(\omega_2/\omega_1)^{1/3}z_2\partial/\partial z_2) \circ (z_1\partial/\partial z_1 + j^2(\omega_2/\omega_1)^{1/3}\, z_2\, \partial/\partial z_2).$$

Par la suite à un développement de la forme

$$f(z) = \sum\nolimits_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} f_{n_1,n_2}(z_1)^{n_1}(z_2)^{n_2}$$

on associera le vecteur

$$f^\sharp = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0} f_{n_1,n_2}(z_1)^{n_1}(z_2)^{n_2} \\ \sum_{n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0} f_{-n_1-1,n_2}(z_1)^{n_1}(z_2)^{n_2} \\ \sum_{n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0} f_{n_1,-n_2-1}(z_1)^{n_1}(z_2)^{n_2} \\ \sum_{n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0} f_{-n_1-1,-n_2-1}(z_1)^{n_1}(z_2)^{n_2} \end{pmatrix}$$

et on confondra f et $f^\sharp$.
Cet élément appartient à $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ pour un certain $\varrho > 1$.
Dans $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ nous prendrons pour norme

$$\|f^\sharp\|_\varrho = \|f^1\|_\varrho + \varrho\|f^2\|_\varrho + \varrho\|f^3\|_\varrho + \varrho^2\|f^4\|_\varrho$$

donc $\|f^\sharp\|_\varrho = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} |f_{n_1,n_2}|(\varrho)^{|n_1|+|n_2|}$.

Transformation de l'équation (E*) *en équations d'opérateurs linéaires.*

On peut supposer que le terme constant de u^* est nul.
L'équation (E^*) s'écrit

$$(\sigma \circ P)(u^*) + (\mu/\omega_1)a^*u^* = g^*/\omega_1$$

ou encore

$$(E_1) \qquad \sigma(v) + \mu a_1 P^{-1}(v) = g_1$$

où $v = P(u^*)$, $a_1 = (1/\omega_1)a^*$ et $g_1 = (1/\omega_1)g^*$.

Remarque 5.3.3. L'opérateur P est inversible sur les séries de Laurent sans terme constant.
On pose maintenant pour tout $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{array}{rcl} \langle\sigma^1, n\rangle & = & n_1 + (\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2 \\ \langle\sigma^2, n\rangle & = & -n_1 - 1 + (\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2 \quad = \quad \langle\sigma^1, (-n_1 - 1, n_2)\rangle \\ \langle\sigma^3, n\rangle & = & \langle\sigma^1, (n_1, -n_2 - 1)\rangle \\ \langle\sigma^4, n\rangle & = & \langle\sigma^1, (-n_1 - 1, -n_2 - 1)\rangle \end{array}$$

ainsi que

$$\langle Q^1, 0\rangle = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$

$$\langle Q^1, n\rangle = (n_1 + j(\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2)^{-1}(n_1 + j^2(\omega_2/\omega_1)^{1/3}n_2)^{-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{array}{rcl} \langle Q^2, n\rangle & = & \langle Q^1, (-n_1 - 1, n_2)\rangle \\ \langle Q^3, n\rangle & = & \langle Q^1, (n_1, -n_2 - 1)\rangle \\ \langle Q^4, n\rangle & = & \langle Q^1, (-n_1 - 1, -n_2 - 1)\rangle. \end{array}$$

On désigne par σ^i (resp. Q^i) l'opérateur linéaire de $\mathcal{B}^\varrho$ dans $\mathcal{B}^\varrho$ défini par

$$\sigma^i\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^2} f_n z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^2} \langle\sigma^i, n\rangle f_n z^n$$

$$\left(\text{resp. } Q^i\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^2} f_n z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^2} \langle Q^i, n\rangle f_n z^n\right)$$

et par σ° (resp. Q) l'opérateur de $(\mathcal{B}^\varrho)^4$ dans $(\mathcal{B}^\varrho)^4$ défini par:

$$\sigma^\circ(f^\sharp) = \sigma^\circ \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1(f^1) \\ \sigma^2(f^2) \\ \sigma^3(f^3) \\ \sigma^4(f^4) \end{pmatrix}$$

respectivement

$$Q(f^\sharp) = Q\begin{pmatrix} f^1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1(f^1) \\ Q^2(f^2) \\ Q^3(f^3) \\ Q^4(f^4) \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.3.4. Pour tout développement de Laurent v tel que $v^\sharp \in (\mathcal{B}_\varrho)^4$ (resp. $v^\sharp \in \mathcal{M} \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$) on a:

$$\begin{aligned} (\sigma(v))^\sharp &= \sigma^\circ(v^\sharp) \\ \text{(resp. } (P^{-1}(v))^\sharp &= Q(v^\sharp)). \end{aligned}$$

On va maintenant remplacer la multiplication par a_1 par un opérateur linéaire de $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans lui même.

Lemme 5.3.5. *A tout développement de Laurent f tel que $f^\sharp \in (\mathcal{B}_\varrho)^4$ on peut associer un opérateur linéaire de $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans lui même, $Op(f)$, tel que*

a) *pour tout développement g tel que $g^\sharp \in (\mathcal{B}_\varrho)^4$ on a:*

$$Op(f)(g^\sharp) = (fg)^\sharp$$

b) *$Op(f)$ est une matrice 4×4 $(F^{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ dont chaque élément $F^{i,j}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{B}_\varrho$ dans $\mathcal{B}_\varrho$ défini par une matrice infinie $((F^{i,j})_{k,p})_{(k,p) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2}$*

c) $$Op(f_1 f_2) = Op(f_1) \circ Op(f_2)$$

d) $$Op(\sigma(f)) = [\sigma^\circ, Op(f)].$$

Avant de donner la démonstration de ce lemme, transformons l'équation (E_1), où v est tel que $v^\sharp \in \mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$.

Il est facile de voir que les équations suivantes sont toutes équivalentes et équivalentes à (E_1):

$$(\sigma(v))^\sharp + \mu(a_1 P^{-1}(v))^\sharp = (g_1)^\sharp$$

$$\sigma^\circ(v^\sharp) + \mu Op(a_1)\big((P^{-1}(v))^\sharp\big) = (g_1)^\sharp$$

$$\sigma^\circ(v^\sharp) + \mu Op(a_1)(Q(v^\sharp)) = (g_1)^\sharp$$

$$(\mathrm{E}^\sharp) \qquad (\sigma^\circ + \mu Op(a_1) \circ Q)(v^\sharp) = (g_1)^\sharp.$$

Démonstration du lemme 5.3.5.

a) On note:

pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$

$$t_1(n_1,n_2) = (n_1,n_2), \qquad t_2(n_1,n_2) = (-n_1-1,n_2),$$
$$t_3(n_1,n_2) = (n_1,-n_2-1), \quad t_4(n_1,n_2) = (-n_1-1,-n_2-1)$$

et pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant 4$, $k \in \mathbb{N}^2$ et $p \in \mathbb{N}^2$

$$(F^{i,j})_{k,p} = f_{t_i(k)-t_j(p)}.$$

Introduisons, pour tout $h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^2} h_n z^n$ de $\mathcal{B}_\varrho$

$$F^{i,j}(h) = \sum_{(k,p)\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2} z^k (F^{i,j})_{k,p} h_p$$

et posons

$$Op(f)\begin{pmatrix} g^1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} & F^{13} & F^{14} \\ F^{21} & F^{22} & F^{23} & F^{24} \\ F^{31} & F^{32} & F^{33} & F^{34} \\ F^{41} & F^{42} & F^{43} & F^{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \\ g^4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que, pour tout développement de Laurent g tel que $g^\sharp \in (\mathcal{B}_\varrho)^4$, on a $Op(f)(g^\sharp) = (fg)^\sharp$

donc $$\|Op(f)(g^\sharp)\|_\varrho = \|(fg)^\sharp\|_\varrho \leqslant \|f^\sharp\|_\varrho \|g^\sharp\|_\varrho$$

et $$\|Op(f)\|_\varrho \leqslant \|f\|_\varrho.$$

Les propriétés b), c) et d) du lemme se vérifient facilement. On notera aussi les $F^{i,j}(Op(f))^{i,j}$.

L'équation (E) conduit à considérer l'équation linéaire d'opérateurs

$$(\mathrm{E_{Op}}) \qquad [\sigma^\circ, Y] + \mu Op(a_1) \circ Q \circ Y = 0$$

et à lui chercher une solution fondamentale(voir §§6 et 7 de [2]) dans l'ensemble des bons opérateurs linéaires de $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ que nous allons définir maintenant:

Définition 5.3.6. *On dit qu'un opérateur $R = (R^{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ défini par une matrice 4×4 d'opérateurs linéaires continus $((R^{i,j})_{k,p})_{(k,p)\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2}$ de $\mathcal{B}_\varrho$ dans $\mathcal{B}_\varrho$ est un bon opérateur linéaire de $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans lui même, s'il possède une fonction majorante, c'est à dire s'il existe une série de Laurent $r(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} r_n z^n$ à coefficients réels positifs telle que:*

pour tout i, j, $1 \leqslant i,\ j \leqslant 4$ et pour tout $(k,p) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$

$$|(R^{i,j})_{k,p}| \leqslant (Op(r)^{i,j})_{k,p}.$$

Il faut maintenant vérifier que l'on est dans les conditions d'application du théorème d'existence d'un bon opérateur solution fondamentale de ($\mathrm{E_{Op}}$). C'est à dire qu'il faut vérifier la condition (Sie_2) (voir définition 4.1) et la nullité de la partie σ-constante de $(Opa_1) \circ Q$.

Lemme 5.3.7. *Pour tout bon opérateur R de $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ de fonction majorante r et dont la valeur à l'origine* (ou partie σ°-constante) *est nulle, il existe un unique bon opérateur R^* s'annulant à l'origine, tel que:*

1) $[\sigma^\circ, R^*] = R$

2) $\|R^*\|_{\varrho'} \leqslant \left(C_3\varrho^{\gamma_1}/(\varrho-\varrho')^{\gamma_1}\right)\|r\|_\varrho$ *pour* $0<\varrho'<\varrho$ *où* $C_3 = (1/C_1)(\gamma_1/e)^{\gamma_1}$.

En effet, soit $R = (R^{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ où $R^{i,j} = (R^{i,j})_{(k,p)\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2}$; on cherche $R^* = (R^{*i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ où $R^{*i,j} = (R^{*i,j})_{(k,p)\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2}$ tel que

$$[\sigma^\circ, R^*] = R$$

c'est à dire

$$[\sigma^\circ, R^*]^{i,j} = \sigma^i R^{*i,j} - R^{*i,j}\sigma^j$$

ou encore

$$\begin{aligned}([\sigma^\circ, R^*]^{i,j})_{k,p} &= \langle\sigma^i, k\rangle(R^{*i,j})_{k,p} - \langle\sigma^j, p\rangle(R^{*i,j})_{k,p}\\ &= \langle\sigma^1, t_i(k) - t_j(p)\rangle(R^{*i,j})_{k,p}.\end{aligned}$$

Donc $[\sigma^\circ, R^*] = R$ est équivalente à

$$\langle\sigma^1, t_i(k) - t_j(p)\rangle(R^{*i,j})_{k,p} = (R^{i,j})_{k,p}$$

c'est à dire à

$$(R^{*i,j})_{k,p} = (1/\langle\sigma^1, t_i(k) - t_j(p)\rangle)(R^{i,j})_{k,p} \quad \text{pour} \quad i\neq j \quad \text{et} \quad k\neq p.$$

En effet on a supposé nulle la partie σ°-constante de R qui est

$$\begin{pmatrix} ((R^{1,1})_{k,k})_{k\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & ((R^{2,2})_{k,k})_{k\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & ((R^{3,3})_{k,k})_{k\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & ((R^{4,4})_{k,k})_{k\in\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^2}\end{pmatrix}$$

ainsi que celle de R^* et pour $i \neq j$ et $k \neq p$ nous avons $t_i(k) - t_j(p) \neq 0$.
La majoration de $\|R^*\|_{\varrho'}$ en découle immédiatement.
$Op\,(a_1) \circ Q$ est un bon opérateur linéair de $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ s'annulant à l'origine, en effet Q est un bon opérateur linéaire ayant pour fonction majorante une constante q et est égal à sa partie σ°-constante; d'autre part le terme constant de a_1 est nul donc $((Op\,a_1)^{i,i})_{k,k} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $k \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ enfin

$$((Op\,a_1 \circ Q)^{i,i})_{k,k} = ((Op\,a_1)^{i,i})_{k,k}\langle Q^i, k\rangle = 0.$$

Démonstration du théorème 5.3.1.
On a vu que l'équation (E) était équivalente à

$$(\mathrm{E}^\sharp) \qquad (\sigma^\circ + \mu Op\,(a_1) \circ Q)\,(v^\sharp) = g_1^\sharp$$

pour v tel que $v^\sharp \in \mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$.
Soit $\Im$ une solution fondamentale de l'équation

$$[\sigma^\circ, Y] + \mu Op\,(a_1) \circ Q \circ Y = 0$$

prenant la valeur 1 à l'origine.
On a pour tout nombre réel τ tel que $0 < \tau < 1$

$$\|\Im\|_{(1-\tau)\varrho} \quad \leqslant \quad 1/\left(1 - (2^{1+2\gamma_1} C_3/\tau^{\gamma_1})\mu q \| \, a_1^\sharp \, \|_\varrho\right)$$

ici tous les rayons utilisés doivent rester supérieurs à 1; on choisit donc d'abord τ pour avoir $(1-\tau)\varrho > 1$ et on choisit ensuite μ pour avoir

$$\mu(2^{1+2\gamma_1} C_3/\tau^{\gamma_1})\, q \, \| \, a_1^\sharp \, \|_\varrho) < 1.$$

On cherche ensuite v sous la fortme $v^\sharp = \Im(w^\sharp)$, ce qui est possible puisque $\Im$ est inversible de $(\mathcal{B}_{(1-\tau)\varrho})^4$ dans lui même. L'équation (E) est alors équivalente aux équations suivantes

$$(\sigma^\circ \circ \Im + \mu Op\,(a_1) \circ Q \circ \Im)(w^\sharp) = g_1^\sharp$$
$$(\Im \circ \sigma^\circ)(w^\sharp) = g_1^\sharp$$
$$\sigma^\circ(w^\sharp) = \Im^{-1}(g_1^\sharp).$$

C'est ici que pose le problème de l'existence d'une solution formelle. Si une telle solution formelle existe elle est unique et appartient à $\mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$ d'apres le lemme 5.3.8.

Lemme 5.3.8. *L'opéateur σ° envoie $(\mathcal{B}_\varrho)^4$ dans $\mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$ et vérifie la condition* (Sie$_1$)*:*

$$(\sigma^\circ)^{-1} \quad \text{existe de} \quad \mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$$

et on a

$$\| (\sigma^\circ)^{-1}(f^\sharp) \|_{\varrho'} \leqslant (C_3 \varrho^{\gamma_1}/(\varrho - \varrho')^{\gamma_1}) \| f^\sharp \|_\varrho \quad \textit{pour} \quad 0 < \varrho' < \varrho$$

où $C_3 = (1/C_1)(\gamma_1/e)^{\gamma_1}$

En effet

$$(\sigma^\circ)^{-1}(f^\sharp) = (\sigma^\circ)^{-1} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma^1)^{-1}(f^1) \\ (\sigma^2)^{-1}(f^2) \\ (\sigma^3)^{-1}(f^3) \\ (\sigma^4)^{-1}(f^4) \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} &\|(\sigma^\circ)^{-1}(f^\sharp)\|_{\varrho'} \\ &\quad = \|(\sigma^1)^{-1}(f^1)\|_{\varrho'} + \varrho'\|(\sigma^2)^{-1}(f^2)\|_{\varrho'} + \varrho'\|(\sigma^3)^{-1}(f^3)\|_{\varrho'} + \varrho'^2\|(\sigma^4)^{-1}(f^4)\|_{\varrho'} \\ &\quad \leqslant (C_3\varrho^{\gamma_1}/(\varrho - \varrho')^{\gamma_1})(\|f^1\|_\varrho + \varrho\|f^2\|_\varrho + \varrho\|f^3\|_\varrho + \varrho^2\|f^4\|_\varrho). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les conditions d'existence d'une telle solution formelle.

Corollaire 5.3.9. *Si dans l'équation* (E) *les fonctions a et g sont telles que $a(x) = -a(-x)$, $g(x) = -g(-x)$, alors l'équation* (E) *possède une solution périodique analytique telle que $u(x) = u(-x)$ et u est l'unique solution de* (E) *dont le terme constant est donné.*

Preuve. On peut toujours se ramener au cas où le terme constant de u est nul et dans ce cas l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$(\mathrm{E}^\sharp) \qquad (\sigma^\circ + \mu Op(a_1) \circ Q)(v^\sharp) = g_1^\sharp$$

où $v^\sharp$ est dans $\mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$.

Soit $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$) le sous -espace fermé de $\mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$ formé des vecteurs (f^1, f^2, f^3, f^4) tels que la fonction

$$\begin{aligned} f(z) = f^1(z) &+ \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}^2} f^2_{n_1,n_2}(z_1)^{-n_1-1}(z_2)^{n_2} \\ &+ \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}^2} f^3_{n_1,n_2}(z_1)^{n_1}(z_2)^{-n_2-1} + (1/z_1 z_2) f^4(1/z_1, 1/z_2) \end{aligned}$$

vérifie $f(z) = f(1/z_1, 1/z_2)$ (resp. $f(z) = -f(1/z_1, 1/z_2)$).

Alors:

- Q est inversible de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_1$,
- $Op\,(a_1)$ envoie $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ (mais pas nécessairement $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_1$ car $Op\,(a_1)(\mathcal{E}_2)$ n'est pas nécessairement contenu dans $\mathcal{M}_\varrho \times (\mathcal{B}_\varrho)^3$),
- σ° est inversible de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ et de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_1$ donc $1 + \mu(\sigma^\circ)^{-1} \circ Op\,(a_1) \circ Q$ envoie $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_1$.

Or d'après le §6 de [2] la série

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \mu^n ((\sigma^\circ)^{-1} \circ Op\,(a_1) \circ Q)^n$$

converge pour μ assez petit (parce que sont vérifiées les conditions Sie$_1$ et Sie$_2$) donc $1 + \mu(\sigma^\circ)^{-1} \circ Op\,(a_1) \circ Q$ est inversible de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_1$ donc l'application

$$\sigma^\circ + \mu \circ Op\,(a_1) \circ Q = \sigma^\circ (1 + \mu(\sigma^\circ)^{-1} \circ Op\,(a_1) \circ Q) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

est inversible, d'où le résultat.

Références

[1] **H. Charrière,** *Une équations aux dérivées partielles avec petits dénominateurs,* C.R.A.S. Paris T.297 (1983).

[2] **H. Charrière,** *Une équations aux dérivées partielles avec petits dénominateurs,* Colloque Franco-Japonais (1985) Vol. III, 35–72, I.R.M.A. Strasbourg.

[3] **G. Bengel et R. Gérard,** *Formal and convergent solutions of singular partial differential equations.* Manuscripta Math. **28**, 343–373 (1982).

[4] **J. Moser,** Ann. of Math. Studies, 77, Princeton Univ. Press, 1973, pp.145.

I.R.M.A
10 rue du Général Zimmer
67080 Strasbourg (Alsace)
France.