Kumamoto J. Math.
Vol. 8, 1~49 March (1995)

Opérateurs linéaires analytiques. Transformé de Fourier. Produit de convolution. Applications.

H. CHARRIÈRE

(Received January 4, 1994)

Contenu

Introduction.

Cet article contient une définition du transformé de Fourier d'un opérateur linéaire analytique, une définition du produit de convolution de deux opérateurs linéaires analytiques, une application de ces définitions à certaines équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

Pourquoi les opérateurs linéaires analytiques, c'est à dire des matrices infinies à coefficients complexes, avec majoration de ces coefficients pour raison de convergence? Leur utilisation s'impose pour résoudre des équations du type

$$(\sigma \circ P) = a(x)y + b(x),$$

où $\sigma = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \lambda_i x_i \partial/\partial x_i$ est un champ de vecteurs vérifiant une condition de petits dénominateurs, P un produit de champs de vecteurs vérifiant une condition de Poincaré, a, b, y des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$ (voir, [1], [2], [3] et [4]).

Pourquoi chercher un transformé de Fourier de tels opérateurs? Les solutions opérateurs linéaires analytiques apparaissent naturellement quand on résoud les équations évoquées ci-dessus, donc aussi l'idée de remplacer les dérivations par des multiplications par des polynômes.

Le produit de convolution est le transformê de Fourier du produit de composition de deux opérateurs.

L'application à certaines équations aux dérivées partielles à coefficients constants généralise la résolution matricielle du cas d'une variable, mais ici les matrices sont des matrices d'opérateurs (voir [5]). Un certain nombres de résultats de cet article ont été annoncés dans [6] et [7].

§1. Les opérateurs linéaires analytiques.

Définition 1. 1. On appelle opérateur linéaire analytique une matrice infinie $(Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ vérifiant:

1) pour tout $(k,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$, $Q_{k,j} \in \mathbb{C}$,

2) il existe $2p+1$ constantes réeles positives M; $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_p$

telles que

$$|\,Q_{k,j}\,| \leqslant M a^k b^j \qquad (k,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$

où $a = (a_1, \dots, a_p)$ $b = (b_1, \dots, b_p)$, $a^k = (a_1)^{k_1} \dots (a_p)^{k_p}$, $b_j = (b_1)^{j_1} \dots (b_p)^{j_p}$.

Définition 1. 2. Pour tout p-uple $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_p)$ de nombres réels positifs, $\mathcal{B}_\varrho$ désigne l'espace de Banach des fonctions

$$f(x) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^p} f_n x^n \text{ (pour tout } n \in \mathbb{N}^p,\ f_n \in \mathbb{C},\ x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p)$$

telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}^p} |f_n|\varrho^n < +\infty$, normé par $|f|_\varrho = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} |f_n|\varrho^n$.

Lemme 1. 3. *Soit Q un opérateur linéaire analytique. Alors Q envoie $\mathcal{B}_\varrho$ dans $\mathcal{B}_{\varrho'}$ de façon linéaire continue dès que sont vérifiées les inégalités $\varrho_i \geqslant b_i$ et $\varrho'_i < 1/a_i$.*

Démonstration.

$$Q\left(\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^p} f_n x^n\right) = \sum\nolimits_{k,j} x^k Q_{k,j} f_j$$

donc

$$\begin{aligned}\|Q(f)\|_{\varrho'} &\leqslant \sum\nolimits_{k,j} |Q_{k,j}|\,|f_j|(\varrho')^k \leqslant M\sum\nolimits_{k,j} (a)^k(b)^j|f_j|(\varrho')^k \\ &\leqslant M/\prod\nolimits_{1\leqslant i\leqslant p}(1-a_i\varrho_i')\|f\|_\varrho\end{aligned}$$

Ce qui implique $\|Q\| \leqslant M/\prod_{q\leqslant i\leqslant p}(1-a_i\varrho')$.

Remarque 1.4. On montre facilement que, si $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_p)$ et $\varrho' = (\varrho_1', \dots, \varrho_p')$ sont deux p-uples de nombres réels positifs et si Q est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{B}_\varrho$ dans $\mathcal{B}_{\varrho'}$, on peut associer à Q une matrice infinie de nombres complexes $(Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ telle que

$$|Q_{k,j}| \leqslant \|Q\|(\varrho_1^{j_1}\dots\varrho_p^{j_p})/(\varrho_1'^{k_1}\dots\varrho_p'^{k_p})$$

D'autre part, si on pose, pour un opérateur linéaire analytique Q:

$$\begin{aligned}X(Q) &= \left\{(\varrho,\varrho') \in (\mathbb{R}^{+*})^{2p}/Q \text{ est continue de } \mathcal{B}_\varrho \text{ dans } \mathcal{B}_{\varrho'}\right\}\\ Y(Q) &= \Big\{(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^{2p}/ \text{ il existe } M \in \mathbb{R}^{+*} \text{ tel que } |Q_{k,j}| \leqslant Ma^kb^j \\ &\qquad \text{pour tout } (k,j) \in \mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p\Big\}\end{aligned}$$

alors, si, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, π_i désigne la projection

$$\big((x_1,\dots,x_p),\ (y_1,\dots,y_p)\big) \longrightarrow (x_i,y_i)$$

de $(\mathbb{R}^{+*})^{2p}$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$ on a

$$\inf\nolimits_{(\varrho_i,\varrho_i')\in\pi_i(x)}(\varrho_i/\varrho_i') = \inf\nolimits_{(a_i,b_i)\in\pi_i(Y)} a_ib_i$$

Exemple 1.5.

1.5.1. Soit $b \in \mathbb{C}^p$,

$$(\delta_b)_{k,j} = 0 \text{ si } k \neq 0 \text{ et } (\delta_b)_{o,j} = b^j$$

1.5.2. Soit $q(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} q_nx^n$ un germe de fonction analytque à l'origine de $\mathbb{C}^p$ et soit q_{op} l'opérateur

$$f(x) \longrightarrow q(x)f(x)$$

on a $(q_{op})_{k,j} = q_{k-j}$ donc $|(q_{op})_{k,j}| \leqslant \|q\|_\varrho(\varrho^j/\varrho^k)$.

1.5.3. Soit $P_{np}(1/(x-b))$ l'opérateur

$$f(x) \longrightarrow (f(x)-f(b))/(x-b) \text{ où } x \text{ et } b \text{ sont dans } \mathbb{C}$$

nous avons

$$(P_{np}(1/(x-b)))_{k,j} = b^{j-k-1} \text{ si } j \geqslant k+1 \text{ et } (P_{np}(1/(x-b)))_{k,j} = 0 \text{ si } j < k+1.$$

1.5.4. Soit $\int_{[0,x_1]}$ l'opérateur

$$f(x) \longrightarrow \int_{[0,x_1]} f(t,x_2,\ldots,x_p)\,dt$$

on a

$$\begin{cases} \left(\int_{[0,x_1]}\right)_{k,j} & = 0 \ \text{ si } \ k \neq j+(1,0,\ldots,0) \\ \left(\int_{[0,x_1]}\right)_{j+(1,0,\ldots,0),j} & = 1/(j_1+1). \end{cases}$$

1.5.5. De même on définit l'opérateur dérivation par la matrice

$$\begin{cases} (\partial/\partial x_1)_{k,j} & = 0 \ \text{ si } \ k \neq j-(1,0,\ldots,0) \\ (\partial/\partial x_1)_{j-(1,0,\ldots,0),j} & = j_1. \end{cases}$$

1.5.6. Soit $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ un germe d'opérateur linéaire analytique. On introduit l'opérateur

$$\begin{aligned} ([\partial/\partial x_1, Q])_{k,j} &= ((\partial/\partial x_1)\circ Q)_{k,j} - (Q\circ \partial/\partial x_1)_{k,j} \\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}^p} (\partial/\partial x_1)_{k,l} Q_{l,j} - \sum_{l\in\mathbb{N}^p} Q_{k,l}(\partial/\partial x_1)_{l,j} \\ &= (k_1+1)Q_{k+(1,0,\ldots,0),j} - j_1 Q_{k,j-(1,0,\ldots,0)}. \end{aligned}$$

1.5.7. Soit $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ un opérateur linéaire analytique. On peut alors considérer les opérateurs suivants

a) $(Q\circ x_1)(f) = Q(x_1 f) = Q(\sum_j f_{j_1-1,j_2,\ldots,j_p} x^j) = \sum_{k,j} x^k Q_{k,j} f_{j_1-1,j_2,\ldots,j_p}$
donc $(Q\circ x_1)_{k,j} = Q_{k,j+(1,0,\ldots,0)}$.

b) $(x_1\circ Q)(f)(x) = \sum_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p} (x_1)^{k_1+1}(x_2)^{k_2}\cdots(x_p)^{k_p} Q_{k,j} f_j$
donc

$$\begin{cases} (x_1\circ Q)_{(0,k_2,\ldots,k_p),j} = 0 \\ (x_1\circ Q)_{k,j} = Q_{(k_1-1,k_2,\ldots,k_p),j} \quad \text{pour} \quad k_1 \geqslant 1. \end{cases}$$

Définition 1. 6. Pour tout germe d'opérateur linéaire analytique Q, on pose $\partial Q/\partial x_1 = [\partial/\partial x_1, Q]$.

§2. La transformation de Fourier formelle.

On cherche à associer, à tout opérateur linéaire analytique $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ un autre opérateur, noté $\Im^{x_1}(Q)$ tel que:

$$\left\{\begin{array}{ll} (f_1): & \textit{il existe des nombres complexes } C^l_{k,j} \textit{ tels que, pour tout } Q \textit{ et tout} \\ & (k,j) = ((k_1,k_2,\dots,k_p),(j_1,j_2,\dots,j_p)) \in \mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p \\ & (\Im^{x_1}(Q))_{k,j} = \sum_{l\in\mathbb{N},\, l\geqslant \max(j_1,k_1)} C^l_{k,j} Q_{(l-k_1,k_2,\dots,k_p),(l-j_1,j_2,\dots,j_p)}, \\ (f_2): & \Im^{x_1}(\partial Q/\partial x_1) = \Im^{x_1}(Q)\circ i x_1 \ (i^2=-1) \\ (f_3): & \partial(\Im^{x_1}(Q))/\partial x_1 = -\Im^{x_1}(Q\circ i x_1). \end{array}\right.$$

Pour faciliter l'écriture, on pose $k = (k_1,k_2,\dots,k_p) = (k_1,K_1)$, $j = (j_1,j_2,\dots,j_p) = (j_1,J_1)$ pour k et j dans $\mathbb{N}^p$.

Lemme 2. 1. *Le système de conditions* $\{(f_1),(f_2),(f_3)\}$ *est équivalent à*
$C^l_{k,j} = \sum_{p\geqslant 0,\, l-k_1\geqslant p\geqslant l-k_1-j_1} (-1)^{l+k_1+p} E^l_{k,j}/F^l_{k,j}$
où
$E^l_{k,j} = (i)^{j_1-k_1}(l-k_1)!\,(k_1+p)!\,j_1!\,c^p_{(0,K_1),(0,J_1)}$
$F^l_{k,j} = p!\,(l-k_1-p)!\,(l-j_1)!\,(k_1+j_1+p-l)!\,k_1!$
c'est à dire en notant pour tout couple d'entiers positifs ou nus $r\geqslant s$: $B(r,s) = \dfrac{r!}{s!(r-s)!}$
$C^l_{k,j} = (i)^{j_1+k_1}(j_1!/k_1!)\sum(-1)^{l+p}B(l-k_1,p)B(k_1+p,l-j_1)C^p_{(0,K_1),(0,J_1)}$
pour $l\geqslant \max(k_1,j_1)$, *où les coefficients* $C^p_{(0,K_1),(0,J_1)}$ *sont des nombres complexes arbitraires.*

Lemme 2. 2. *Sous la condition* (f_1) *le système de conditions* $\{(f_2),(f_3)\}$ *est équivalent à*

$$\left\{\begin{array}{ll} (f_2^*): & \textit{pour tout } (k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p \textit{ et tout } l\geqslant \max(k_1,j_1+1) \\ & iC^l_{k,(j_1+l,J_1)} = (l-k_1)C^{l-1}_{k,j} - (l-j_1)C^l_{k,j} \\ (f_3^*): & \textit{pour tout } (k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p \textit{ et tout } l\geqslant \max(k_1,j_1-1) \\ & -iC^l_{k,j} = (1+k_1)C^{l+1}_{(k_1+1,K),j} - j_1 C^l_{k,(j_1-1,J_1)}. \end{array}\right.$$

<u>Démonstration du lemme</u> 2. 2.

La condition (f_2) est équivalente à chacune des conditons suivantes:

(1) pour tout $(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$, $(\Im^{x_1}(\partial Q/\partial x_1)_{k,j} = (\Im^{x_1}(Q)\circ i x_1)_{k,j}$,

(2) $\sum_{l\geqslant\max(j_1,k_1)} C^l_{k,j}(\partial Q/\partial x_1)_{(l-k_1,K_1)(l-j_1,J_1)} = i(\Im^{x_1}(Q))_{k,(j_1+1,J_1)}$,

(3) $\sum_{l\geqslant\max(j_1,k_1)} C^l_{k,j}\big\{(l-k_1+1)Q_{(l-k_1+1,K_1),(l-j_1,J_1)} - (l-j_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1-1,J_1)}\big\}$
$= \sum_{l\geqslant\max(j_1+1,k_1)} iC^l_{k,(j_1+1,J_1)}Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1-1,J_1)}$,

(4) $\sum_{l\geqslant \max(j_1+1,k_1)} \{C^{l-1}_{k,j}(l-k_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1-1,J_1)} - C^l_{k,j}(l-j_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1-1,J_1)}\}$
$= \sum_{l\geqslant \max(j_1,k_1)} iC^l_{k,(j_1+1,J_1)}Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1-1,J_1)}$,

(5) $(l-k_1)C^{l-1}_{k,j} - (l-j_1)C^l_{k,j} = iC^l_{k,(j_1+1,J_1)}$

pour $(k,j)\in \mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ et $l\geqslant \max(k_1,j_1+1)$ ce qui est la conditiion (f_2^*). La condition (f_3^*) est équivalente à chacune des conditions suivantes:

(1′) pour tout $(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$, $(\partial(\Im^{x_1}(Q))/\partial x_1)_{k,j} = (-\Im^{x_1}(Q\circ ix_1))_{k,j}$,

(2′) $(k_1+1)(\Im^{x_1}(Q))_{(k_1+1,K_1),j} - j_1(\Im^{x_1}(Q))_{k,(j_1-1,J_1)}$
$= -\sum_{l\geqslant \max(k_1,j_1)} iC^l_{k,j}(Q\circ x_1)_{(l-k_1,K_1),(l-j_1-1,J_1)}$,

(3′) $(k_1+1)\sum_{l\,\max(k_1,j_1)} C^l_{(k_1+1,K_1),j}Q_{(l-k_1-1,K_1),(l-j_1,J_1)}$
$-j_1\sum_{l\geqslant \max(j_1-1,k_1)} C^l_{k,(j_1-1,J_1)}Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1+1,J_1)}$
$= -\sum_{l\geqslant \max(j_1,k_1)} iC^l_{k,j}Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1+1,J_1)}$

(4′) $(k_1+1)C^{l+1}_{(k_1+1,K_1),j} - j_1C^l_{k,(j_1-1,J_1)} = -iC^l_{k,j}$

pour tout $(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ et $l\geqslant \max(k_1,j_1-1)$.

Le lemme 2. 2 est donc démontré.

Preuve du lemme 2. 1.

Premier cas $j_1\leqslant k_1$. Calcul de $C^{k_1}_{k,j}$.

Pour $l=k_1$ et $j_1+1\leqslant k_1$ la condition (f_2^*) s'écrit:

$$\begin{aligned} C^{k_1}_{k,(j_1+1,J_1)} &= i(k_1-j_1)C^{k_1}_{k,(j_1,J_1)} \\ &= i^2(k_1-j_1)(k_1-(j_1-1))C^{k_1}_{k,(j_1-1,J_1)} \end{aligned}$$

et de proche en proche

$$C^{k_1}_{k,(j_1+1,J_1)} = i^{j_1+1}(k_1!/(k_1-j_1-1)!)C^{k_1}_{k,(0,J_1)}$$

et donc, pour $k_1\geqslant j_1$

$$C^{k_1}_{k,j} = i^{j_1}(k_1!/(k_1-j_1)!)C^{k_1}_{k,(0,J_1)}.$$

D'autre part, pour $j_1=0$ (f_3^*) s'écrit:

$$\begin{aligned} (k_1+1)C^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(0,J_1)} &= (-1)C^l_{k,(0,J_1)} \quad \text{pour tout } l\geqslant k_1 \text{ donc} \\ C^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(0,J_1)} &= (-i/(k_1+1))C^l_{k,(0,J_1)} \end{aligned}$$

et ainsi de proche en proche

$$C^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(0,J_1)} = \left((-i)^{k_1+1}/((k_1+1)!)\right)C^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

donc, pour tout $l \geqslant k_1$:

$$C^l_{k,(0,J_1)} = ((-i)^{k_1}/(k_1!)C^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

en particulier

$$C^{k_1}_{k,(0,J_1)} = ((-i)^{k_1}/(k_1!)C^0_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

donc, pour $k_1 \geqslant j_1$

$$C^{k_1}_{k,j} = i^{j_1-k_1}(1/(k_1-j_1)!)C^0_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

La formule a aussi un sens pour $k_1 < j_1$ puisqu'on peut supposer alors $C^{k_1}_{k,j} = 0$.

<u>Deuxiéme cas</u> $j_1 \geqslant k_1$. <u>Calcul de</u> $C^{j_1}_{k,j}$.

Pour $l = j_1 - 1$ et $j_1 - 1 \geqslant k_1$ la condition (f_3'$*$) s'écrit

$$\begin{aligned} C^{j_1}_{(k_1+1,K_1).j} &= (j_1/(k_1+1))C^{j_1-1}_{k,(j_1-1,J_1)} \\ &= (j_1(j_1-1)/(k_1+1)k_1)C^{j_1-2}_{(k_1-1,K_1),(j_1-2,J_1)} = \cdots \\ &= (j_1!/(k_1+1)!\,(j_1-k_1-1)!)C^{j_1-k_1-1}_{(0,K_1),(j_1-k_1-1,J_1)} \end{aligned}$$

donc pour $j_1 \geqslant k_1$

$$C^{j_1}_{k,j} = (j_1!/(k_1)!\,(j_1-k_1)!)C^{j_1-k_1}_{(0,K_1),(j_1-k_1,J_1)}.$$

Montrons maintemant la formule

$$C^{j_1}_{(0,K_1),(j_1,J_1)} = \sum\nolimits_{0\leqslant p\leqslant j_1}\left[(-1)^{j_1+p}i^{j_1}j_1!j_1!/(j_1-p)p!\right]C^p_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

et pour cela montrons, par récurrence sur j_1, la formule:

pour tout $l \geqslant j_1$,

$$C^l_{(0,K_1),j} = \sum\nolimits_{l-j_1\leqslant p\leqslant l}\left[(-1)^{l+p}i^{j_1}l!j_1!/(l-p)!\,(l-j_1)(p-l+j_1)!\right]C^p_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

Pour $j_1 = 0$ elle est évidente.

Pour $k_1 = 0$ et $l \geqslant j_1 + 1$ la condition (f_2^*) s'écrit

$$iC^l_{(0,K_1),(j_1+1,J_1)} = lC^{l-1}_{0,J} - (l-j_1)C^l_{0,j}$$

donc

$$\begin{aligned} &C^l_{(0,K_1),(j_1+1,J_1)} = \sum\nolimits_{l-1-j_1\leqslant p\leqslant l-1} \\ &\left[(-1)^{l+p}i^{j_1+1}l!j_1!/(l-1-p)!\,(l-1-j_1)!\,(p-l+1+j_1)!\right]C^p_{(0,K_1),(0,J_1)} \\ &+\sum\nolimits_{l-j_1\leqslant p\leqslant l}\left[(-1)^{l+p}i^{j_1+1}l!j_1!/(l-p)!\,(l-1-j_1)!\,(p-l+j_1)!\right]C^p_{(0,K_1),(0,J_1)} \\ &=\sum\nolimits_{l-1-j_1\leqslant p\leqslant l}\left[(-1)^{l+p}i^{j_1+1}l!j_1!/(l-p)!\,(l-1-j_1)!\right](j_1+1)C^p_{(0,K_1),(0,J_1)} \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On en déduit la valeur de $C^{j_1}_{(0,K_1),(j_1,J_1)}$ en fonction des $C^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}$, et donc que pour $j_1 \geqslant k_1$,

$$C^{j_1}_{k,j} = (j_1/k_1!)\sum\nolimits_{0\leqslant p\leqslant j_1-k_1} \left[(-1)^{j_1+k+p} i^{j_1-k_1}(j_1-k_1)!\,p!\,(j_1-k_1-p)!\right] C^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}.$$

On peut maintenant démontrer la formule du lemme 2. 1 par récurrence sur $\inf(l-k_1, l-j_1) = n$; pour $n = 0$, la formule est vraie d'après les valeurs trouvées pour $C^{k_1}_{k,j}$ et $C^{j_1}_{k,j}$. Supposons la formule vraie jusqu'à n et montrons la pour $n+1$.

Pour tout $C^{l}_{k,j}$ tel que $0 \leqslant l-k_1$ et $0 \leqslant l-j_1$, on pose

$$C^{l}_{k,j} = \left[(-1)^{l+k_1} i^{j_1-k_1}(l-k_1)!\,j_1!/(l-j_1)!\,k_1!\right] D^{l}_{k,j}$$

Le système de conditions (f_2^*) et (f_3^*) équivaut au système

(g_2): $\quad (j_1+1)D^{l}_{k,(j_1+1,J_1)} = D^{l-1}_{k,j} + D^{l}_{k,j} \qquad \forall \quad l \geqslant \max(k_1, j_1+1)$

(g_3): $\quad (l+1-j_1)D^{l}_{k,j} = D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),j} - D^{l}_{k,(j_1-J_1),J_1)} \qquad \forall \quad l \geqslant \max(k_1, j_1-1)$

et on doit montrer que, dans les deux cas suivants:

$j_1 \leqslant k_1 \leqslant l \leqslant k_1+n+1$ et $k_1 \leqslant j_1 \leqslant l \leqslant j_1+n+1$ on a:

$$\begin{aligned} D^{l}_{k,j} &= \sum\nolimits_{p\geqslant 0, l-k_1-j_1\leqslant p\leqslant l-k_1} \left[(-1)^p(k_1+p)!\,/p!\,(l-k_1-p)!\,(k_1+j_1+p-l)!\right] C^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)} \\ &= \sum\nolimits_{p\geqslant 0, l-k_1-j\leqslant p\leqslant l-k_1} \left[(k_1+p)!\,/p!\,(l-k_1-p)!\,(k_1+j_1+p-l)!\right] D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)} \end{aligned}$$

La condition (g_3) s'écrit aussi

$(l-j_1)D^{l}_{k,(j_1+1,J_1)} = D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} - D^{l}_{k,j} \qquad \forall \quad l \geqslant \max(k_1, j_1)$

et en éliminant $D^{l}_{k,(j_1+1,J_1)}$ entre (g_2) et (g_3) on obtient

(g_4): $\quad D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = [(l+1)/(j_1+l)]D^{l}_{k,j} + [(l-j_1)/(j_1+l)]D^{l-1}_{k,j}$

pour tout $l \geqslant \max(k_1, j_1+1)$.

Supposons d'abord $j_1 \leqslant k_1 \leqslant l \leqslant k_1+n+1$.

(g_4) entraine de proche en proche

$$\begin{aligned} &D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = [(l+1)!\,/((l-j_1)!\,(j_1+1)!]D^{l-j_1}_{(k_1-j_1,K_1),(0,J)} \\ &+ [(l-j_1)(l+1)!\,/(j_1+1)!]\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant j_1} [(j_1-q)!\,/(l+1-q)!]D^{l-1-q}_{(k_1-q,K_1),(j_1-q,J_1)}. \end{aligned}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux $D^{l-1-q}_{(k_1-q,K_1),(j_1-q,J_1)} \quad (0 \leqslant q \leqslant j_1)$

D'autre part

$$\begin{aligned} D^{l-j_1}_{(k_1-j,K_1),(0,J_1)} &= \left[(l-j_1)!\,(k_1-j_1)!\,/(-1)^{l+k_1}i^{j_1-k_1}(l-k_1)!\right] C^{l-j_1}_{(k_1-j_1,K_1),(0,J_1)} \\ &= \left[(-1)^{l+k_1}(l-j_1)!\,/(l-k_1)!\right] C^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)} \\ &= [(l-j_1)!\,/(l-k_1)!]\, D^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = [(l+1)!\,(l-k_1)!\,(j_1+1)!]\, D^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)} + [(l-j_1)(l+1)!\,/(j_1+1)!]\, A$$

où

$$A = \sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant j_1} [(j_1-q)!\,/(l+1-q)!]\, A_q$$

avec

$$A_q = \sum\nolimits_{\substack{p\geqslant 0,\\ l-k_1-j_1+q\leqslant p\leqslant l-k_1-1}} [(k_1+p-q)!\,/p!\,(l-k_1-1-p)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!]\, D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

et

$$D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = [(l+1)!\,/(l-k_1)!\,(j_1+1)!]\, D^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)} + [(l-j_1)(l+1)!\,/(j_1+1)!]\, C$$

où

$$C = \sum\nolimits_{\substack{p\geqslant 0,\\ l-k_1-j_1\leqslant p\leqslant l-k_1-1}} [1/p!\,(l-k_1-p)!]\, D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)} C_p$$

avec

$$C_p = \sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant k_1+j_1+1+p-l} (j_1-q)!\,(k_1+p-q)!\,/(l+1-q)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!$$

Or si r, s, t sont trois nombres entiers positifs ou nuls, on a

$$\begin{aligned} E(r,s,t) &= \sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant r} (s+q)!\,(t+q)!\,/q!\,(s+t+q+2)! \\ &= [1/(s+1)(t+1)]\,[(r+s+1)!\,(r+t+1)!\,/(r+s+t+2)!\,r!] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} C_p &= E(k_1+j_1+1+p-l,\, l-j_1-1,\, l-k_1-1-p) \\ &= [(j_1+1)!\,(k_1+p+1)!\,/(l+1)!\,(k_1+j_1+1+p-l)!]\,[1/(l-j_1)(l-k_1-p)] \end{aligned}$$

donc

$$D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = \sum\nolimits_{\substack{p\geqslant 0,\\ l-k_1-j_1-1\leqslant p\leqslant l-k_1}} [(k_1+p+1)!\,/p!\,(l-k_1-p)!\,(k_1+j_1+1+p-l)!]\, D^{p}_{(0,K_1),(0,j_1)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant $k_1 \leqslant j_1 \leqslant l \leqslant j_1 + n + 1$.

L'égalité (g_4) nous donne de proche en proche

$$D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = [(l+1)!\,(j_1-k_1)!\,/(l-k_1)!\,(j_1+1)!\,]\,D^{l-k_1}_{(0,K_1),(j_1-k_1,J_1)} + [(l-j_1)(l+1)!\,(j_1+1)!\,]\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant k_1}[(j_1-q)!\,/(l+1-q)!\,]\,D^{l-1-q}_{(k_1-q,K_1),(j_1-q,J_1)}.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux $D^{l-1-q}_{(k_1-q,K_1),(j_1-q,J_1)}$ $\quad(0 \leqslant q \leqslant k_1)$
D'autre part:

$$D^{l-k_1}_{(0,K_1),(j_1-k_1,J_1)} = \sum\nolimits_{l-j_1\leqslant p\leqslant l-k_1}[1/(l-k_1-p)!\,(p-l+j_1)!\,]\,D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

donc

$$\begin{aligned}D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = {} & [(l+1)!\,(j_1-k_1)!\,/(l-k_1)!\,(j_1+1)!] \times \\ & \sum\nolimits_{l-j_1\leqslant p\leqslant l-k_1}[1/(l-k_1-p)!\,(p-l+j_1)!\,]\,D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)} \\ & + [(l+1)!\,/(j_1+1)!\,]\sum_{\substack{p\geqslant 0,\\ l-k_1-j_1-1\leqslant p\leqslant l-k_1-1}}[(1/p!\,(l-k_1-1-p)!\,]\,D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}D_p\end{aligned}$$

où

$$D_p = \sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant \inf(k_1,k_1+j_1+1+p-l)}(j_1-q)!\,(k_1+p-q)!\,/(l+1-q)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!$$

ensuite

$$\begin{aligned}& D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)} = [(l+1)!\,/(l-k_1)!(j_1+1)!\,]\,D^{l-k_1}_{(0,K_1),(0,J_1)} + [(l+1)!\,/(j_1+1)!\,] \times \\ & \sum\nolimits_{l-j_1\leqslant p\leqslant l-k_1-1} D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}\{(j_1-k_1)!\,/(l-k_1)!\,(l-k_1-p)!\,(p-l+j_1)! + \\ & [(l-j_1)/p!\,(l-k_1-1-p)!\,]\sum_{0\leqslant q\leqslant k_1}(j_1-q)!\,(k_1+p-q)!\,/(l+1-q)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!\} \\ & + \sum_{\substack{p\geqslant 0,\\ l-k_1-j_1-1\leqslant p\leqslant l-k_1-1}}[(k_1+p+1)!\,/p!\,(l-k_1-p)!\,(k_1+j_1+1+p-l)!\,]\,D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}\end{aligned}$$

puisque, pour $\sum_{l-k_1-j_1-1\leqslant p\leqslant l-k_1-1}$, le calcul est le même que lorsque

$$j_1 \leqslant k_1 \leqslant l \leqslant k_1 + n + 1.$$

Or

$$\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant k_1}(j_1-q)!\,(k_1+p-q)!\,/(l+1-q)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!$$
$$=\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant k_1+j_1+1+p-l}(j_1-q)!\,(k_1+p-q)!\,/(l+1-q)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!\,-$$
$$\sum\nolimits_{k_1+1\leqslant q\leqslant k_1+j_1+1+p-l}(j_1-q)!\,(k_1+p-q)!\,/(l+1-q)!\,(k_1+j_1+1+p-l-q)!$$
$$=E(k_1+j_1+1+p-l,l-j_1-1,l-k_1-1-p)-E(j_1+p-l,l-j_1-1,l-k_1-1-p)$$
$$=[1/(l-j_1)(l-k_1-p)]\left\{(j_1+1)!\,(k_1+p+1)!\,/(l+1)!\,(k_1+j_1+1+p-l)!\,-\right.$$
$$\left.p!\,(j_1-k_1)!\,/(p-l+j_1)!\,(l-k_1)!\,\right\}$$

donc

$$D^{l+1}_{(k_1+1,K_1),(j_1+1,J_1)}=$$
$$\sum\nolimits_{\substack{p\geqslant 0,\\ l-k_1-j_1-1\leqslant p\leqslant l-k_1}}[(k_1+p+1)!\,/p!\,(l-k_1-p)!\,(k_1+j_1+1+p-l)!\,]\,D^{p}_{(0,K_1),(0,J_1)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Comme nous n'avons pas raisonné par équivalence, il reste encore, pour finir la démonstration du lemme 2. 1, à montrer que les valeurs trouvées pour $C^l_{k,j}$ vérifient le système de conditions (f_1) et (f_2), ce qui se fait facilement.

En faisant la convention que $1/\Gamma(z)=0$ si z est un entier négatif ou nul, on pose pour k_1, j_1, l, r entiers positifs tels que $l\geqslant\max(k_1,j_1)$

$$C^{l,r}_{k_1,j_1}=(-1)^{l+r}B(l-k_1,r)B(k_1+r,l-j_1).$$

On peut dès lors écrire:

$$C^l_{k,j}=(j_1!\,/k_1!\,)i^{j_1+k_1}\sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}}(-1)^{l+r}B(l-k_1,r)B(k_1+r,l-j_1)C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}$$
$$=(j_1!\,/k_1!\,)i^{j_1+k_1}\sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}}C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}C^{l,r}_{k_1,j_1}.$$

Définition 2. 3. On appelle opérateur linéaire analytique formel la donnée d'une matrice infinie $(Q_{k,j})_{k,j\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ à éléments dans dans $\mathbb{C}$. On peut maintenant énoncer le résultat:

Proposition 2. 4. *Les transformations $\Im^{x_1}$ qui, à tout opérateur linéaire analytique $Q=(Q_{k,j})_{k,j\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ associent un opérateur linéaire analytique formel $\Im^{x_1}(Q)$ sous les conditions (f_1), (f_2), (f_3) sont entièrement déterminées par la formule*

(1)
$$(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}=(j_1!\,/k_1!\,)^{j_1+k_1}\sum\nolimits_{l\in\mathbb{N},l\geqslant\max(k_1,j_1)}Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}$$
$$\sum\nolimits_{r\geqslant 0,l-k_1-j_1\leqslant r\leqslant l-k_1}C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}C^{l,r}_{k_1,j_1}$$

où les $C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}$ *sont des nombres complexes tels que la série entière* $\sum_{r\geqslant \mathbb{N}} C^r_{(0,K_1),(0,J_1)} x^r$ *converge dans* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

On notera ces transformations $\Im^{x_1}(C^r_{(0,K_1),(0,J_1),r\in\mathbb{N}})$

Démonstration.

On doit montrer la convergence de la série dont le terme général est indexé par l dnas le membre de droite de la formule (1).

On suppose que Q vérifie $|Q_{k,j}| \leqslant Ma^k b^j$ pour tout $(k,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$ pour un certain triplet (M,a,b) où $a=(a_1,\dots,a_p)$, $b=(b_1,\dots,b_p)$, M, a_i, b_i sont des nombres réels positifs. D'autre part, il existe un réel positif C_{K_1,J_1}, tel que:

$$|C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}| \leqslant C_{K_1,J_1}/(1+a_1b_1)^r \quad \text{pourtout} \quad r\in\mathbb{N}.$$

Supposons par exemple $k_1 \geqslant j_1$; on pose $l=k_1+n$ dans la formule (1)

$$|(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant MC_{K_1,J_1}(1+a_1b_1)^{j_1} a^{(0,K_1)} b^{(k_1-j_1,J_1)} (j_1!/k_1!) \times A$$

où

$$A=\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_1b_1/(1+a_1b_1))^n \sum_{n-j_1\leqslant r\leqslant n, r\geqslant 0} |C^{k_1+n,r}_{k_1,j_1}|$$

or

$$\sum_{n-j_1\leqslant r\leqslant n, r\geqslant 0} |C^{k_1+n,r}_{k_1,j_1}| \\ = (n!/(n+k_1-j_1)!) \sum_{0\leqslant q\leqslant j_1, j_1-n\leqslant q} (k_1+n-j_1+q)!/(n-j_1+q)!\,(j_1-q)!\,q!$$

et

$$\sum_{0\leqslant q\leqslant j_1, j_1-n\leqslant q} (k_1+n-j_1+q)!/(n-j_1+q)!\,(j_1-q)!\,q! \\ = k_1!\,(n+k_1-j_1)!\,(k_1-j_1)!\,(n+j_1)!$$

donc

$$|(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant MC_{K_1,J_1}(1+a_1b_1)^{j_1} a^{(0,k_1)} b^{(k_1-j_1,J_1)} (j_1!/(k_1-j_1)!)\times \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_1b_1/(1+a_1b_1))^n (n!/(n+j_1)! \\ \leqslant MC_{K_1,J_1}(1+a_1b_1)^{j_1+1} a^{(0,K_1)} b^{(k_1-j_1,J_1)}/(k_1-j_1)!.$$

Deuxième cas $j_1 \geqslant k_1$; on pose $l=j_1+n$ dans la formule (1).

$$|(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant MC_{K_1,J_1}(1+a_1b_1)^{k_1} a^{(j_1-k_1,K_1)} b^{(0,J_1)} (j_1!/k_1)!)\times \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_1b_1/(1+a_1b_1))^n \sum_{n-k_1\leqslant r\leqslant n+j_1-k_1, r\geqslant 0} |C^{j_1+n,r}_{k_1,j_1}|$$

or

$$\sum\nolimits_{n-k_1\leqslant r\leqslant n+j_1-k_1, r\geqslant 0} |C_{k_1,j_1}^{j_1+n,r}|$$
$$= ((n+j_1-k_1)!\,/n!\,)\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant j_1, k_1-n\leqslant q}(n+q)!\,/(n-k_1+q)!\,(j_1-q)!\,q!$$

et

$$\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant j_1, k_1-n\leqslant q}(n+q)!\,/(n-k_1+q)!\,(j_1-q)!\,q!$$
$$\leqslant (1/(j_1-k_1)!\,)\sum\nolimits_{0\leqslant q\leqslant j_1, k_1-n\leqslant q}(n+j_1-k_1+q)!\,/(n-k_1+q)!\,(j_1-q)!\,q!$$
$$= (1/(j_1-k_1)!\,)(j_1!\,(n+j_1-k_1)!\,/(n+2j_1-k_1)! \leqslant (1/(j_1-k_1)!\,)$$

donc

$$|(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant MC_{K_1,J_1}(1+a_1b_1)^{k_1}a^{(j_1-k_1,K_1)}b^{(0,J_1)}(j_1!\,/k_1!\,(j_1-k_1)!\,)\times$$
$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}}((a_1b_1/(1+a_1b_1))^n)((n+j_1-k_1)!,/n!\,)$$
$$= MC_{K_1,J_1}(1+a_1b_1)^{j_1+1}a^{(j_1-k_1,K_1)}b^{(0,J_1)}(j_1!\,/k_1!).$$

Les coefficients $(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}$ sont donc bien définis par des séries numériques convergentes quand on met sur les constantes $C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}$ la condition de convergence dans $\mathbb{C}$ de la série $\sum_{r\in\mathbb{N}} C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}x^r$.

Montrons la nécessité de cette condition:
la condition (f_1) entraine:

$$(\Im^{x_1}(Q))_{(0,K_1),(0,J_1)} = \sum\nolimits_{l\in\mathbb{N}} C^l_{(0,K_1),(0,J_1)}Q_{(l,K_1),(l,J_1)}$$

En particulier, à tout couple de p-uples de nombres réels positifs $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_p)$, on peut associer l'opérateur $Q(\alpha,\beta)$ défini par

$$(Q(\alpha,\beta))_{k,j} = \alpha^k\beta^j$$

Pour tout couple (α,β) dans $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$, la série

$$\sum\nolimits_{l\in\mathbb{N}} C^l_{(0,K_1),(0,J_1)}\alpha^{(0,K_1)}\beta^{(0,J_1)}(\alpha_1\beta_1)^l$$

doit être convergente, d'où le résultat.

Les majorations obtenues pour $(\Im^{x_1}(Q))_{k,j}$ montrent que $\Im^{x_1}(Q)$ n'est pas en général un opérateur linéaire analytique.

§3. Les transformations $\Im_r^{x_1}$ et leurs relations.

On définit les transformations $\Im_r^{x_1}$ en prenant pour suite $(C^l_{(0,K_1),(0,J_1)})_{l\in\mathbb{N}}$ la suite particuliere

$$C^l_{(0,K_1),(0,J_1)} = 0 \qquad \text{pour tout } l \neq r, \text{ quelque soit } (K_1, J_1) \in \mathbb{N}^{p-1} \times \mathbb{N}^{p-1}$$
$$C^l_{(0,K_1),(0,J_1)} = r! \qquad \text{quelque soit } (K_1, J_1) \in \mathbb{N}^{p-1} \times \mathbb{N}^{p-1}$$

Définition 3. 1. Pour tout entier naturel r, on appelle transformation de Fourier d'ordre r, partielle en x_1, la transformation $\Im_r^{x_1}$ définie sur tout opérateur linéaire analytique $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ par

$$\begin{aligned}(\Im^{x_1}(Q))_{k,j} &= (r!\,j_1!\,/k_1!\,)i^{j_1+k_1}\sum\nolimits_{l\geqslant k_1}(-1)^{l+r}B(l-k_1,r)B(k_1+r,l-j_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}\\ &= (j_1!\,/k_1!\,)i^{j_1+k_1}(-1)^r\sum\nolimits_{k_1+j_1+r\geqslant l\geqslant k_1+r,\,l\geqslant j_1}\\ &\quad (-1)^l\,[(l-k_1)!\,(k_1+r)!\,/(l-k_1-r)!\,(l-j_1)!\,(k_1+j_1+r-l)!\,]\times Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}\end{aligned}$$

Remarque 3. 2. Les transformations $\Im^{x_1}(C^l_{(0,K_1),(0,J_1)})$ sont telles que, pour tout opérateur Q,:

$$\left\{\Im^{x_1}(C^l_{(0,K_1),(0,J_1)})(Q)\right\}_{(k,j)} = \sum\nolimits_{r\in\mathbb{N}}(1/r!\,)C^r_{(0,K_1),(0,J_1)}\left\{\Im^{x_1}r(Q)\right\}_{(k,j)}.$$

Des relations entre les transformations $\Im_r^{x_1}$ sont données par

Lemme 3. 3. *Pour tout opérateur Q on a:*

a) $\Im^{x_1}_{r+1}(Q) = \Im^{x_1}_r(rQ + (\partial/\partial x_1)\circ Q\circ x_1 - x_1\circ(\partial/\partial x_1)\circ Q)$,

b) $\Im^{x_1}_r(Q) = \Im^{x_1}_o\left(\sum_{0\leqslant s\leqslant r}(-1)^s(r!\,/s!\,(r-s)!\,)(x_1)^s\circ(\partial^r/\partial x_1^r)\circ Q\circ(x_1)^{r-s}\right)$

c) $\Im^{x_1}_r(Q) = (\partial^r/\partial x_1^r)\circ[x_1,[x_1,[\ldots[x_1,\Im^{x_1}_o(Q)]\ldots]]]$ (r crochets).

<u>Démonstration.</u>

a) $(rQ + (\partial/\partial x_1)\circ Q\circ x_1 - x_1\circ(\partial/\partial x_1\circ Q)_{k,j}$
$$= (r-k_1)Q_{k,j} + (k_1+1)Q_{(k_1+1,K_1),(j_1+,J_1)}$$

donc

$$\begin{aligned}&(\Im^{x_1}_r(rQ + \partial/\partial x_1\circ Q\circ x_1 - x_1\circ(\partial/\partial x_1)\circ Q))_{k,j} = (j_1!\,/k_1!\,)^{j_1+k_1}\times\\ &\quad\sum\nolimits_{l\geqslant k_1}C^{l,r}_{k_1,j_1}\left\{(r-l+k_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)} + (l-k_1+1)Q_{(l-k_1+1,K_1),(l-j_1+1,J_1)}\right\}\end{aligned}$$

$$= (r!\,j_1!\,/k_1!\,)i^{j_1+k_1} \sum\nolimits_{l \geqslant k_1} \{C^{l,k}_{k_1<j_1}(r-l+k_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}+$$
$$C^{l-1,r}_{k_1,j_1}(l-k_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}\}$$
$$= (r!\,j_1!\,/k_1!)i^{j_1+k_1}\times$$
$$\sum\nolimits_{l \geqslant k_1}(-1)^{l+r+1}((l-k_1)!\,/r!\,(l-k_1-r-1)!\,B(k_1+r+1,l-j_1)Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}$$
$$= (r!\,j_1!\,/k_1!\,)i^{j_1+k_1}\sum\nolimits_{l \geqslant k_1}(r+1)C^{l,r+1}_{k_1,j_1}Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}$$
$$= (\Im^{x_1}_{r+1}(Q))_{k,j}.$$

b) On définit la suite $S_n(Q)$ d'opérateurs linéaires analytiques par:

$$\begin{cases} S_0(Q) = Q \\ S_{n+1}(Q) = S_n(nQ + \partial/\partial x_1 \circ Q \circ x_1 - x_1 \circ (\partial/\partial x_1 \circ Q) \\ \qquad\qquad = S_n((n+1)Q - (\partial/\partial x_1 \circ [x_1, Q]). \end{cases}$$

Par récurrence sur n, on monte que

$$S_n(Q) = \sum\nolimits_{0 \leqslant s \leqslant n} (-1)^s B(n,s)(x_1)^s \circ (\partial^n/\partial x_1^n) \circ Q \circ (x_1)^{n-s}$$

et par récurrence sur r, on en déduit la formule pour $\Im^{x_1}_r$.

c) On montre d'abord la formule

$$\Im^{x_1}_{r+1}(Q) = r\Im^{x_1}_r(Q) + (\partial/\partial x_1) \circ [x_1, \Im^{x_1}_r(Q)].$$

Puis on définit la suite $T_n(Q)$ d'opérateurs linéaires analytiques par

$$\begin{cases} T_0(Q) = Q \\ T_{n+1}(Q) = nT_n(Q) + (\partial/\partial x_1) \circ [x_1, T_n(Q)]. \end{cases}$$

On montre par récurrence sur n, que

$$T_n(Q) = (\partial^n/\partial x_1^n) \circ [x_1, [x_1, [\ldots [x_1, Q] \ldots]]] \quad (n \text{ crochets})$$

et on en déduit par récurrence sur r la formule pour $\Im^{x_1}_r$.

Exemple 3.4. Soit q_{op} l'opérateur $f(x) \longrightarrow q(x)f(x)$, où

$$q(x) = \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}^p} q_n x^n.$$

a) Calul de $\Im_0^{x_1}(q_{op})$

$$\begin{aligned}(\Im_0^{x_1}(q_{op}))_{k,j} &= (j_1!/k_1!)i^{j_1+k_1}q_{(j_1-k_1,k_2-j_2,\dots,k_p-j_p)}\sum\nolimits_{l\geqslant k}(-1)^l B(k_1,l-j_1)\\ &= (-1)^{j_1}(j_1!/k_1!)i^{j_1+k_1}q_{(j_1-k_1,k_2-j_2,\dots,k_p-j_p)}(1-1)^{k_1}\\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } j_1<k_1 \text{ ou s'il existe } i \text{ tel que } 2\leqslant i\leqslant p \text{ et } k_i<j_i\\ 0 \text{ si } k_1\neq 0\\ j_1!(-i)^{j_1}q_{(j_1,k_2-j_2,\dots,k_p-j_p)} \quad \text{si } k_1=0 \text{ et si } k_i\geqslant j_i \text{ pour } 2\leqslant i\leqslant p.\end{cases}\end{aligned}$$

Donc si $\varphi(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}^p}\varphi_n x^n$, on a formellement

$$(\Im_0(q_{op}))(\varphi)=\\ \sum\nolimits_{(k_2,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^{p-1},j\in\mathbb{N}^p,k_i\geqslant j_i}(-i)^{j_1}j_1!\,\varphi_j q_{(j_1,k_2-j_2,\dots,k_p,l_p)}(x_2)^{k_2}\cdots(x_p)^{k_p}$$

si on pose

$$q(x)=\sum\nolimits_{j_1\in\mathbb{N}}(x_1)^{j_1}q_{j_1}(x_2,\dots,x_p)\quad \text{et } \varphi(x)=\sum\nolimits_{j_1\in\mathbb{N}}(x_1)^{j_1}\varphi_{j_1}(x_2,\dots,x_p)$$
$$(\Im_0^{x_1}(q_{op}))(\varphi)=\sum\nolimits_{j_1\in\mathbb{N}}(-i)^{j_1}j_1!\,\varphi_{j_1}(x_2,\dots,x_p)q_{j_1}(x_2,\dots,x_p).$$

En particulier

$$(\Im_0^{x_1}(1))(\varphi)=\varphi_0(x_2,\dots,x_p)=\varphi(0,x_2,\dots,x_p)\quad \text{donc } \Im_0^{x_1}(1)=\delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}$$

b) Calcul de $\Im_r^{x_1}(q_{op})$.

D'après la démonstration du lemme 3.3, b, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$S_n(q_{op})=n!\,q_{op}$$

or $\Im_r^{x_1}(Q)=\Im_0^{x_1}(S_r(Q))$ donc pour tout $r\in\mathbb{N}$

$$\Im_r^{x_1}(q_{op})=r!\,\Im_0^{x_1}(q_{op}).$$

Exemple 3.5. Soit $a\in\mathbb{C}$ et soit $\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}$ l'application

$$f(x_1,\dots,x_p)\longrightarrow f(a,x_2,\dots,x_p)$$

a) Calcul de $\Im_0^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)})$

$$(\Im_0^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}))_{k,j} = j_1!\, i^{j_1+k_1} \sum\nolimits_{l\geqslant k_1} ((-1)^l/(l-j_1)!\,(k_1+j_1-l)!\,)(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)})_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}$$
$$= 0 \quad \text{si } K_1 \neq J_1$$

$$(\Im_0^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}))_{(k_1,K_1),(j_1,K_1)} = a^{k_1-j_1}(-i)^{k_1-j_1}/(k_1-j_1)!$$

Donc si $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} \varphi_n x^n$, on a formellement

$$(\Im_0^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}))(\varphi) = \sum\nolimits_{k_1\geqslant j_1,(j_2,\dots,j_p)\in\mathbb{N}^{p-1}} (x_1)^{k_1}(x_2)^{j_2}\cdots(x_p)^{j_p}((-ia)^{k_1-j_1}/(k_1-j_1)!\,)\varphi_{j_1,\dots,j_p}$$
$$= e^{-iax_1}\varphi(x_1,\dots,x_p).$$

Donc

$$\Im_0^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}) = (e^{-iax_1})_{op}.$$

b) Calcul de $\Im_r^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)})$ pour $r \geqslant 1$.

On a $\Im_r^{x_1}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$ comme le montre la formule c) du lemme 3.3.

Exemple 3.6. On calcule de même

$$\Im_0^{x_1}(\partial/\partial x_1) = -ix_1\delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}$$

et pour tout $r \geqslant 1$,

$$\Im_r^{x_1}(\partial/\partial x_1) = -i(r+1)!\, x_1\delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} = (r+1)!\,\Im_0^{x_1}(\partial/\partial x_1).$$

§3.1. Quelques formules vérifiées par les transformations S_n, T_n, $\Im_n^{x_1}$.

On a utilisé pour la démonstration du lemme 3.3, les suites de transformations $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(T_n)_{n\geqslant 0}$ définies par récurrence par

$$\begin{cases} T_0 = id \\ T_1(.) = \partial/\partial x_1 \circ [x_1, .] \\ T_{n+1} = (n+T_1)\circ T_n \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = id \\ \cdots\cdots \\ S_{n+1} = S_n \circ (n+1-T_1) \end{cases}$$

Lemme 3.1.1.

a) *Les transformations S_n et T_n sont des polynômes en T_1 donnés par*

$$T_n = (n-1+T_1)(n-2+T_1)\dots T_1 = \prod\nolimits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(k+T_1)$$
$$S_n = (n-T_1)(n-1-T_1)\dots(1-T_1) = \prod\nolimits_{1\leqslant k\leqslant n}(k-T_1)$$

b) *Pour tout entier positif ou nul* n,

$$\Im_n^{x_1} = \Im_0^{x_1} \circ S_n = T_n \circ \Im_0^{x_1}.$$

Démonstration évidente.

§4. Transformation de Fourier formelle d'ordre r lorsque r est un entier négatif.

Définition 4. 1. Pour tout entier naturel r et pour tout opérateur linéaire continu $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ de $\mathcal{B}_\varrho$ dans $\mathcal{B}_{\varrho'}$, on définit la transformation $\Im_{-r}^{x_1}$ par;

$$(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j} = (j_1!/k_1!)i^{j_1+k_1} \sum_{l\geqslant \sup(k_1,j_1)} d_{k_1,j_1}^{l,-r} Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}$$

où

a) si $r \leqslant k_1$ (et $l \geqslant k_1$)
$d_{k_1,j_1}^{l,-r} = (-1)^{l-r}\,[(l-k_1)!\,(k_1-r)!\,]/[(l-k_1+r)!\,(l-j_1)!\,(k_1+j_1-r-l)!\,]$

b) si $r > k_1$ (et $l \geqslant k_1+j_1-r+1$)
$d_{k_1,j_1}^{l,-r} = (-1)^{j_1+r}\,[(l-k_1)!\,(-k_1-j_1+r+l-1)!\,]\,/\,[(l-k_1+r)!\,(l-j_1)!\,(-k_1+r-l)!\,]$

La série indexée par l qui définit $\Im_{-r}^{x_1}(Q)$ n'est pas toujours convergente.

Lemme 4. 2. *La série qui définit* $(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}$ *converge si* $\varrho_1/\varrho_1' < 1$.

<u>Démonstration.</u> On a $|Q_{k,j}| \leqslant \|Q\|\varrho^j/\varrho'^k$ pour tout $(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ (où $\|Q\|$ désigne la norme de $Q:\mathcal{B}_\varrho \longrightarrow \mathcal{B}_{\varrho'}$).

<u>Premier cas:</u> $r > k_1$

$$|(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant \|Q\|\,[(j_1!)/(k_1!)] \sum_{l\geqslant\sup(k_1,j_1)} (\varrho')^{k_1-l}(\varrho_2',\dots,\varrho_p')^{-K_1}\times$$
$$(\varrho_1)^{l-j_1}(\varrho_2,\dots,\varrho_p)^{J_1}\,[(l-k_1)!\,(-k_1-j_1+r+l-1)!\,]\,/\,[(l-k_1+r)!\,(l-j_1)!\,(-k_1+r-l)!\,]$$

donc,

si $j_1 \geqslant k_1$ on a

$$|(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant \|Q\|\,[(j_1-k_1)!\,/(j_1-k_1+r)!\,k_1!](\varrho_1')^{k_1-j_1}(\varrho_2',\dots,\varrho_p')^{-K_1}\times$$
$$(\varrho_2,\dots,\varrho_p)^{J_1}F(j_1-k_1+1,r-k_1,j_1-k_1+r+1,\varrho_1/\varrho_1')$$

et si $j_1 \leqslant k_1$

$$|(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant \|Q\|\,[j_1!\,/(k_1-j_1)!\,k_1!\,(j_1-k_1+r)!\,](\varrho_1')^{k_1-j_1}(\varrho_2',\dots,\varrho_p')^{-K_1}\times$$
$$(\varrho_2,\dots,\varrho_p)^{J_1}F(1,r-k_1,j_1-k_1+r+1,\varrho_1/\varrho_1')$$

où $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désigne la fonction hypergéométrique de Gauss. La série qui définit $\Im_{-r}^{x_1}(Q)$ converge donc si $\varrho_1/\varrho_1' > 1$. Remarquons que si (k_1, j_1) n'appartient pas à $\{0\} \times \mathbb{N}$, la série qui définit $\Im_{-r}^{x_1}(Q)$ converge aussi si $\varrho_1 = \varrho_1'$.

Deuxiéme cas $r \leqslant k_1$:la série qui définit $\Im_{-r}^{x_1}(Q)$ est une somme finie.

$$|(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant \|Q\| \, [(j_1!)/(k_1!)] \sum\nolimits_{l \geqslant \sup(k_1, j_1)} (\varrho_1')^{k_1 - l} (\varrho_2', \ldots, \varrho_p')^{-K_1} \times$$
$$(\varrho_1)^{l - j_1} (\varrho_2, \ldots, \varrho_p)^{J_1} [(l - k_1)! \, (k_1 - r)!]/[(l - k_1 + r)! \, (l - j_1)! \, (k_1 + j_1 - r - l)!]$$

si $j_1 \geqslant k_1$ on a

$$|(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant \|Q\| \, [(k_1 - r)! \, / k_1!] (\varrho_1'/2)^r (\varrho_1)^{k_1 - j_1 - r} (\varrho_2', \ldots, \varrho_p')^{-K_1} \times$$
$$(\varrho_2, \ldots, \varrho_p)^{J_1} (1 + 2\varrho_1/\varrho_1')^{j_1} (j_1 - k_1)!$$

et si $j_1 \leqslant k_1$

$$|(\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j}| \leqslant \|Q\| \, [j_1! \, / k_1!] (\varrho_1')^{k_1 - j_1} (\varrho_2', \ldots, \varrho_p')^{-K_1} \times$$
$$(\varrho_2, \ldots, \varrho_p)^{J_1} (1 + \varrho_1/\varrho_1')^{k_1 - r}$$

Lemme 4.3. *La transformation $\Im_{-r}^{x_1}$ vérifie*

$$\begin{cases} (f_2) & \Im_{-r}^{x_1}(\partial Q/\partial x_1) = \Im_{-r}^{x_1}(Q) \circ i x_1 \\ (f_3) & \partial(\Im_{-r}^{x_1}(Q))/\partial x_1 = -\Im_{-r}^{x_1}(Q \circ i x_1). \end{cases}$$

Démonstration.
La relation (f_2) équivaut à:

$$-(j_1 + 1) d_{k_1, j_1 + 1}^{l, -r} = (l - k_1) d_{k_1, j_1}^{l-1, -r} - (l - j_1) d_{k_1, j_1}^{l, -r};$$

la relation (f_3) équivaut à:

$$-d_{k_1, j_1}^{l, -r} = d_{k_1 + 1, j_1}^{l+1, -r} + d_{k_1, j_1 - 1}^{l, -r}$$

et on vérifie facilement ces égalités.

Exemple 4.1. Calcul de $\Im_{-r}^{x_1}(\delta_{(a, x_2, \ldots, x_p)})$.

$$\begin{aligned} (\Im_{-r}^{x_1}(Q))_{k,j} &= (j_1! \, / k_1!) i^{j_1 + k_1} \sum\nolimits_{l \geqslant \sup(k_1, j_1)} d_{k_1, j_1}^{l, -r} (\delta_{(a, x_2, \ldots, x_p)})_{(l - k_1, K_1), (l - j_1, J_1)} \\ &= (j_1! \, / k_1!) i^{j_1 + k_1} d_{k_1, j_1}^{k_1, -r} (\delta_{(a, x_2, \ldots, x_p)})_{(0, K_1), (k_1 - j_1, J_1)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } K_1 \neq J_1 \text{ ou si } k_1 < j_1 \\ (j_1!/k_1)^{j_1 + k_1} d_{k_1, j_1}^{k_1, -r} a^{k_1 - j_1} & \text{si } k_1 \geqslant j_1 \text{ et } K_1 = J_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{si } K_1 \neq J_1 \text{ ou si } k_1 < j_1 \\ (-1)^{k_1+r} i^{j_1+k_1} a^{k_1-j_1} [j_1!\,(k_1-r)!\,]/[k_1!\,(k_1-j_1)!\,(j_1-r)!\,r!\,] & \\ & \text{si } k_1 \geqslant j_1 \text{ et } k_1 \geqslant r \\ (-1)^{j_1+r} i^{j_1+k_1} a^{k_1-j_1} [j_1!\,(-j_1+r-1)!\,]/[k_1!\,(k_1-j_1)!\,(-k_1+r-1)!\,r!\,] & \\ & \text{si } r > k_1 \geqslant j_1. \end{cases}
$$

Donc, si $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^p} \varphi_n x^n$, on a, formellement:

$$
\begin{aligned}
&(\Im^{x_1}_{-r}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)}))(\varphi)(x) = \sum\nolimits_{(k_1,j_1)\in\mathbb{N}^2, k_1\geqslant j_1, K_1\in\mathbb{N}^{p-1}} x^k (j_1!\,/k_1!\,) i^{j_1+k_1} d^{k_1,-r}_{k_1,j_1} a^{k_1-j_1} \varphi_{(j_1,K_1)} \\
&= \sum\nolimits_{j_1,K_1;\, n\in\mathbb{N}} (x_1)^{j_1+n} (x_2,\dots,x_p)^{K_1} [j_1!\,/(j_1+n)!\,] i^{2j_1+n} d^{j_1+n,-r}_{j_1+n,j_1} a^n \varphi_{(j_1,K_1)} \\
&= \sum\nolimits_{j_1,K_1} (x_1)^{j_1} (x_2,\dots,x_p)^{K_1} \varphi_{(j_1,K_1)} j_1! \times \\
&\qquad \Big\{ \sum\nolimits_{n\geqslant 0} (x_1)^n (ia)^n (-1)^{n+r} [(j_1+n-r)!]\,/[(j_1+n)!\,(j_1-r)!\,r!\,n!] + \\
&\qquad \sum\nolimits_{0\leqslant n\leqslant r-j_1-1} (x_1)^n (ia)^n (-1)^r [(-j_1+r-1)!\,]/[(j_1+n)!\,(-j_1+r-1-n)!\,r!\,n!] \Big\} \\
&= [(-1)^r/r!\,] \sum\nolimits_{j_1\geqslant 0, K_1} (x_1)^{j_1} (x_2,\dots,x_p)^{K_1} \varphi_{(j_1,K_1)} \Phi(j_1+1-r, j_1+1, -iax_1)
\end{aligned}
$$

où Φ est une fonction hypergéométrique confluente.
Par exemple si $a = 0$, $(\Im^{x_1}_{-r}(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)})) = (-1)^r/r!$.

Exemple 4.2.
4.2.1. $\Im^{x_1}_{-r}(\partial/\partial x_1)$ n'existe pas.
4.2.2. Si q_{op} est l'opérateur multiplication par la fonction $q(x)$ analytique au voisinage de l'origine alors on peut voir que $\Im^{x_1}_{-r}(q_{op})$ n'existe pas en général.

Notations. On pose, pour tout entier naturel r,

$$
d^{l,r}_{k_1,j_1} = (-1)^{l+r} (l-k_1)!\,(k_1+r)!\,/(l-k_1-r)!\,(l-j_1)!\,(k_1+j_1+r-l)!
$$

Definition 4.3. Pour tout entier relatif r, on définit la transformation de Fourier d'ordre r conjuguée, partielle en x_1, par

$$
({}^*\Im^{x_1}_{-r}(Q))_{k,j} = [(-i)^{j_1+k_1} j_1!\,/k_1!] \sum\nolimits_{l\geqslant k_1,j_1} d^{l,r}_{k_1,j_1} Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}
$$

Proposition 4.4. *Pour tout entier r posirif ou nul, on a:*

$$
\Im^{x_1}_{r} \circ {}^*\Im^{x_1}_{-r} = (-1)^r id.
$$

$$
{}^*\Im^{x_1}_{r} \circ {}^*\Im^{x_1}_{-r} = (-1)^r id.
$$

Démonstration.

Soit s un entier positif ou nul

$$((\Im_r^{x_1} \circ {}^*\Im_{-s}^{x_1})(Q))_{k,j} = [(i)^{j_1+k_1} j_1!/k_1!] \sum_{l \geqslant k_1, j_1} d_{k_1,j_1}^{l,r} ({}^*\Im_{-s}^{x_1}(Q))_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)}$$

$$= [(i)^{j_1+k_1} j_1! k_1!] \sum_{l \geqslant k_1,j_1} d_{k_1,j_1}^{l,r} [(l-j_1)!/(l-k_1)!](-i)^{2l-k_1-j_1}$$
$$\sum_{L \geqslant l-k_1, l-j_1} d_{l-k_1,l-j_1}^{L,-s} Q_{(L-l+k_1,K_1),(L-l+j_1,J_1)}$$

$$= [(-i)^{j_1+k_1} j_1!/k_1!] \sum_{l \geqslant k_1,j_1} d_{k_1,j_1}^{l,r} [(l-j_1)!/(l-k_1)!](-1)^l$$
$$\sum_{h \leqslant k_1,j_1} d_{l-k_1,l-j_1}^{l-h,-s} Q_{(k_1-h,K_1)(j_1-h,J_1)}$$

$$= [(-1)^{j_1+k_1} j_1!/k_1!] \sum_{h \leqslant k_1,j_1} Q_{(k_1-h,K_1),(j_1-h,J_1)}$$
$$\sum_{l \geqslant k_1,j_1} [(l-j_1)!/(l-k_1)!](-1)^l d_{k_1,j_1}^{l,r} d_{l-k_1,l-j_1}^{l-h,-s}$$

$$= [(-1)^{j_1+k_1} j_1! k_1!] \sum_{h \leqslant k_1,j_1} Q_{(k_1-h,K_1),(j_1-h,J_1)}$$
$$\Big\{ \sum_{l \geqslant k_1+s,j_1} [(-1)^r (k_1+r)!/(l-k_1-r)!(k_1+j_1+r-l)!]$$
$$[(-1)^{l+h+s}(k_1-h)!(l-k_1-s)!/(k_1-h+s)!(j_1-h)!(h+l-k_1-j_1-s)!]$$
$$+ \sum_{k_1+s>l \geqslant k_1, l \geqslant j_1} [(-1)^r (k_1+r)!/(l-k_1-r)!(k_1+j_1+r-l)!]$$
$$[(-1)^{l+j_1+s}(k_1-h)!(k_1+j_1+s-l-h-1)!/(j_1-h)!(k_1-h+s)!(k_1+s-l-1)!] \Big\}$$

$$= [(-1)^{j_1+k_1+r+s}(k_1+r)! j_1!/k_1!] \sum_{h \leqslant k_1,j_1} Q_{(k_1-h,K_1),(j_1-h,J_1)}$$
$$[(k_1-h)!/(k_1-h+s)!(j_1-h)!] \Big\{ \sum_{l \geqslant k_1+s,j_1} [(-1)^{l+h}(l-k_1-s)!/(l-k_1-r)!$$
$$(k_1+j_1+r-l)!(h+l-k_1-j_1-s)! +$$
$$\sum_{k_1+s>l \geqslant k_1, l \geqslant j} (-1)^{l+j_1}(k_1+j_1+s-l-h-1)!/$$
$$(l-k_1-r)!(k_1+j_1+r-l)!(k_1+s-l-1)! \Big\}$$

Supposons maintenant $r \geqslant s$; alors:

$$\sum_{l \geqslant k_1+s,j_1} [(-1)^{l+h}(l-k_1-s)!/(l-k_1-r)!(k_1+j+r-l)!(h+l-k_1-j_1-s)!$$
$$= (-1)^{h+k_1+j_1+r}(r-s)!(j_1-h)!/(h+r-s)!j_1!(-h)!$$

et

$$\sum_{k_1+s>l \geqslant k_1, l \geqslant j} (-1)^{l+j_1}(k_1+j_1+s-l-1)!/(l-k_1-r)!(k_1+j_1+r-l)!(k_1+s-l-1)! = 0.$$

Donc

$$((\Im_r^{x_1} \circ {}^*\Im_{-s}^{x_1})(Q))_{k,j} = [(r-s)!\,(k_1+r)!\,(-1)^s/k_1!]$$
$$\sum\nolimits_{h\leqslant 0}[(-1)^h(k_1-h)!\,/(-h)!\,(h+r-s)!\,(k_1-h+s)!\,]Q_{(k_1-h,K_1),(j_1-h,J_1)}$$

En particulier, si $r = s \geqslant 0$

$$((\Im_r^{x_1} \circ {}^*\Im_{-r}^{x_1})(Q))_{k,j} = (-1)^r Q_{k,j} \quad \text{donc} \quad \Im_r^{x_1} \circ {}^*\Im_{-r}^{x_1} = (-1)^r id.$$

La démonstration est la même pour ${}^*\Im_r^{x_1} \circ \Im_{-r}^{x_1} = (-1)^r id.$

Remarque 4. 5 Si r est un entier positif, on n'a pas ${}^*\Im_{-r}^{x_1} \circ \Im_r^{x_1} == (-1)^r id$. C'est donc seulement pour $r = 0$ que les transformations $\Im_r^{x_1}$ et $(-1)^r\,{}^*\Im_{-r}^{x_1}$ sont inverses l'une de l'autre.

§5. Produit de convolution d'ordre r de deux opérateurs linéaires analytiques lorsque r est un entier naturel.

Soient $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ et $R = (R_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ deux opérateurs linéaires analytiques et r un entier naturel.

Définition 5. 1. On appelle produit de convolution d'ordre r, partiel en x_1 des opérateurs R et Q et on note $R \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} Q$, l'opérateur dont le terme d'indice (k,j) est donné par:

$$(R \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} Q)_{k,j} =$$
$$[(-1)^r j_1!\,(k_1+r)!\,/k_1!\,]\sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant j_1, 0\leqslant n\leqslant k_1, l\leqslant n+m, H\in\mathbb{N}^{p-1}}[(-1)^{l+m+n}(k_1+m-l)!\,n!$$
$$(k_1+m-l)!\,/(k_1+m-l+r)!\,(n+r)!\,m!\,(j_1-m)!\,(k_1-n)!\,(n+m-l)!\,]$$
$$R_{(n,K_1),(j_1+n-l,H)}Q_{(k_1+m-l,H),(m,J_1)}$$
$$= [(-1)^r(k_1+r)!\,/k_1!]\sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant j_1, 0\leqslant n\leqslant k_1, l\leqslant n+m, H\in\mathbb{N}^{p-1}}[(-1)^{l+m+n}(k_1+m-l)!\,n!$$
$$/(k_1+m-l+r)!\,(n+r)!\,]B(j_1,m)B(k_1+m-l,k_1-n)$$
$$R_{(n,K_1),(j_1+n-l,H)}Q_{(k_1+m-l,H),(m,J_1)}.$$

On remarque immédiatement que, par rapport aux variables $x_2,\ldots,x_p$, $R \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} Q$ est le composé $R\circ Q$ et que le produit de convolution est bilinéaire sur $\mathbb{C}$.

Avant de donner des conditions de convergence pour la série indexée par (l,H) qui définit $(R \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} Q)_{k,j}$, établissons une relation entre le produit d'ordre r et le produit d'ordre 0.

Lemme 5.2. *Si $\mathcal{V}_r$ désigne la transformation qui, à tout opérateur linéaire analytique $Q = (Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ associe l'opérateur linéaire analytique de terme général*

$$(\mathcal{V}_r(Q))_{k,j} = [(-1)^r k_1!/(k_1+r)!]Q_{k,j}$$

on a

$$R \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} Q = (\mathcal{V}_r)^{-1}(\mathcal{V}_r(R) \underset{0}{\overset{x_1}{\star}} \mathcal{V}_r(Q)).$$

La démonstration est évidente.

Donnons maintenant des conditions suffisantes de convergence pour la série indéxée par (l, H) qui définit $(R \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} Q)_{k,j}$.

Lemme 5.3. *Sil existe des constantes réelles positives*

$$M, N, a_1, \dots, a_p;\ b_1, \dots, b_p;\ \alpha_1 \dots, \alpha_p;\ \beta_1, \dots, \beta_p \quad \text{telles que}$$

$$|Q_{k,j}| \leqslant Ma^k b^j \quad \text{pour tout} \quad (k,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$

$$|R_{k,j}| \leqslant M\alpha^k \beta^j \quad \text{pour tout} \quad (k,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$

$$a_i\beta_i < 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant p$$

alors la série qui définit $(R \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} Q)_{k,j}$ est convergente et $R \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} Q$ est un opérateur linéaire analytique.

<u>Démonstration.</u> Il suffit de faire la démonstration lorsque $r = 0$.

$$\begin{aligned}
|(R \underset{0}{\overset{x_1}{\star}} Q)_{k,j}| \leqslant{} & MNj_1! \sum\nolimits_{m,n,l,H} [(k_1+m-l)!/m!\,(j_1-m)!, (k_1-n)!\,(n+m-l)!] \\
& (\alpha_1)^n(\alpha_2,\dots,\alpha_p)^{K_1}(\beta_1)^{j_1+n-l}(\beta_2,\dots,\beta_p)^H(a_1)^{k_1+m-l}(a_2,\dots,a_p)^H(b_1)^m(b_2,\dots,b_p)^{J_1} \\
\leqslant{} & MN(\alpha_2,\dots,\alpha_p)^{K_1}(b_2,\dots,b_p)^{J_1}(a_1)^{k_1}(\beta_1)^{j_1}\times \\
& \sum\nolimits_{m,n,l,H} B(j_1,m)B(k_1+m-l,k_1-n)(a_1b_1)^m(\alpha_1\beta_1)^n(a_1\beta_1)^{-l}(a_2\beta_2,\dots,a_p\beta_p)^H \\
\leqslant{} & MN(\alpha_2,\dots,\alpha_p)^{K_1}(b_2,\dots,b_p)^{J_1}(a_1)^{k_1}(\beta_1)^{j_1}\sum\nolimits_{0\leqslant n\leqslant k_1, 0\leqslant m\leqslant j_1, H\in\mathbb{N}^{p-1}} \\
& (\alpha_1/a_1)^n(b_1/\beta_1)^m B(j_1,m)B(k_1,n)F(k_1+1,1,1,a_1\beta_1)(a_2\beta_2,\dots,a_p\beta_p)^H \\
\leqslant{} & MN(\alpha_2,\dots,\alpha_p)^{K_1}(b_2,\dots,b_p)^{J_1}(a_1+\alpha_1)^{k_1}(b_1+\beta_1)^{j_1}F(k_1+1,1,1,a_1\beta_1) \\
& \qquad \prod\nolimits_{2\leqslant i\leqslant p} 1/(1-a_i\beta_i) \\
\leqslant{} & MN(\alpha_2,\dots,\alpha_p)^{K_1}(b_2,\dots,b_p)^{J_1}(a_1+\alpha_1)^{k_1}(b_1+\beta_1)^{j_1}[1/(1-a_1\beta_1)^{k_1+1}] \\
& \qquad \prod\nolimits_{2\leqslant i\leqslant p} 1/(1-a_i\beta_i)
\end{aligned}$$

Remarque 5.4. Pour la variable x_1, la condition $a_1\beta_1 < 1$ est aussi une condition suffisante d'existence de $R \circ Q$.

Définition 5. 5. On appelle composé (ou produit) partiel en x_1 d'ordre r de deux opérateurs linéaires analytique Q et R et on note $Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R$, l'opérateur linéaire analytique défini par

$$(Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R)_{k,j} = \sum\nolimits_{l \in \mathbb{N}, H \in \mathbb{N}^{p-1}} Q_{(k_1,H),(l,J_1)} R_{(l,K_1),(j_1,H)}.$$

Le produit partiel en x_1 d'ordre 0 est donc; pour la variable x_1, le composé $Q \circ R$ et pour les variables $x_2, \dots, x_p$, le composé $R \circ Q$.

Proposition 5. 6. *Si Q et R sont deux opérateurs linéaires analytiques, on a, pour tout entier naturel r:*

$$\Im_r^{x_1}(Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R) = \Im_r^{x_1}(R) \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} \Im_r^{x_1}(Q)$$

et de même

$${}^*\Im_r^{x_1}(Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R) = {}^*\Im_r^{x_1}(R) \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} {}^*\Im_r^{x_1}(Q).$$

<u>Demonstration.</u>

$$\begin{aligned}(\Im_r^{x_1}(Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R))_{k,j} &= [j_1!\, i^{j_1+k_1}/k_1!] \sum\nolimits_{l \geqslant k_1, j_1} d_{k_1,j_1}^{l,r} (Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R)_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)} \\ &= [(-1)^r j_1!\, i^{j_1+k_1}/k_1!] \sum\nolimits_{l \geqslant k_1, j_1} d_{k_1,j_1}^{l,r} \sum\nolimits_{(h,H) \in \mathbb{N}^p, h \geqslant r} Q_{(l-k_1,H),(h,J_1)} R_{(h,K_1),(l-j_1,H)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Im_r^{x_1}(R) \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} \Im_r^{x_1}(Q))_{k,j} &= [(-1)^r (k_1+r)!/k_1!] \sum\nolimits_{0 \leqslant m \leqslant j_1, 0 \leqslant n \leqslant k_1, q \leqslant m+n, H \in \mathbb{N}^{p-1}} (-1)^{q+m+n} \\ &\qquad [(k_1+m-q)!\, n!/(k_1+m-q+r)!\,(n+r)!] B(j_1,m) B(k_1+m-q, k_1-n) \\ &\qquad\qquad (\Im_r^{x_1}(R))_{(n,K_1),(j_1+n-q,H)} (\Im_r^{x_1}(Q))_{(k_1+m-q,H),(m,J_1)} \\ &= [(-1)^r (k_1+r)!/k_1!] \sum\nolimits_{m,n,q,H} (-1)^{q+m+n} [(k_1+m-q)!\, n!/(k_1+m-q+r)!\,(n+r)!] \\ &\qquad B(j_1,m) B(k_1+m-q, k_1-n) [i^{j_1+2n-q} (j_1+n-q)!/n!] \times \\ &\qquad\qquad \sum\nolimits_{\nu} d_{n,j_1+n-q}^{\nu,r} R_{(\nu-n,K_1),(\nu+q-j_1-n,H)} [m! i^{k_1+2m-q}/(k_1+m-q)!] \\ &\qquad\qquad\qquad \sum\nolimits_{\mu} d_{k_1+m-q,m}^{\mu,r} Q_{(\mu+q-k_1-m,H),(\mu-m,J_1)} \\ &= [(-1)^r (k_1+r)!/k_1!] \sum\nolimits_{m,n,q,H,\mu,\nu} [m!\,(j_1+n-q)!/(k_1+m-q+r)!\,(n+r)!] \\ &\quad d_{n,j_1+n-q}^{\nu,r} d_{k_1+m-q,m}^{\mu,r} B(j_1,m) B(k_1+m-q, k_1-n) R_{(\nu-n,K_1),(\nu+q-j_1-n,H)} \times \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad Q_{(\mu+q-k_1-m,H),(\mu-m,J_1)}.\end{aligned}$$

On pose $\mu+q-m=l$, $\nu+q-n=\lambda$, $\mu-m=h$ donc $q=l-h$, $\mu=m+h$, $\nu=n+h+\lambda-l$

$$
\begin{aligned}
&(\Im_r^{x_1}(R) \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} \Im_r^{x_1}(Q))_{k,j} = \\
&\quad [(-1)^r (k_1+r)!\, i^{j_1+k_1}/k_1!\,] \sum\nolimits_{l,\lambda,h,H} Q_{(l-k_1,H),(h,J_1)} R_{(h+\lambda-l,K_1),(\lambda-j_1,H)} \\
&\qquad\quad \sum\nolimits_{m,n} [m!\,(j_1+n-q)!\,/(k_1+m-q+r)!\,(n+r)!\,] \\
&\qquad\qquad\quad d^{\nu,r}_{n,j_1+n-q} d^{\mu,r}_{k_1+m-q,m} B(j_1,m) B(k_1+m-q,k_1-n)
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{m,n} [m!\,(j_1+n-q)!\,/(k_1+m-q+r)!\,(n+r)!\,] \\
&\quad d^{\nu,r}_{n,j_1+n-q} d^{\mu,r}_{k_1+m-q,m} B(j_1,m) B(k_1+m-q,k_1-n) \\
&=(-1)^{\lambda-l}[(h+\lambda-l)!\,(l-k_1)!\,j_1!\,/(h+\lambda-l-r)!\,(\lambda-j_1)!\,(l-k_1-r)!\,h!\,] \\
&\quad \sum\nolimits_{m,n} (-1)^{m,n} (j_1+n+h-l)!\,(k_1+m+h-l)!\,/(j_1+n+r-\lambda)!\,(k_1+m+r-l)! \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j_1-m)!\,(k_1-n)!\,(m+n+h-l)!
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{m,n} (-1)^{m+n} (j_1+n+h-l)!\,(k_1+m+h-l)!\,/(j_1+n+r-\lambda)!\,(k_1+m+r-l)!\,(j_1-m)! \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k_1-n)!\,(m+n+h-l)! \\
&= (-1)^{k_1+j_1} \sum\nolimits_{m_1,n_1} (-1)^{m_1+n_1} m_1!\,n_1!\,/(n_1-\alpha)!\,(m_1-\beta)!\,(\gamma-m_1)!\,(\gamma-n_1)!(m_1+n_1-\gamma)!
\end{aligned}
$$

où $\alpha=h+\lambda-l-r\geqslant 0$, $\beta=h-r$, $\gamma=k_1+j_1+h-l\geqslant 0$.
Comme

$$
\sum\nolimits_{n_1} (-1)^{n_1} n_1!/(n_1-\alpha)!\,(n_1-(\gamma-m_1))!\,(\gamma-n_1)! = (-1)^\gamma \alpha!\,(\gamma-m_1)!\,/(\gamma-\alpha)!\,m_1!\,(\alpha-m_1)!
$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{m_1,n_1} (-1)^{m_1+n_1} m_1!\,n_1!/(n_1-\alpha)!\,(m_1-\beta)!\,(\gamma-m_1)!\,(\gamma-n_1)!\,(m_1+n_1-\gamma)! \\
=\;& [(-1)^\gamma \alpha!/(\gamma-\alpha)!] \sum\nolimits_{0\leqslant m_1\leqslant\gamma} (-1)^{m_1}/(m_1-\beta)!\,(\alpha-m_1)! \\
=\;& \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\neq\beta \\ (-1)^{\gamma+\alpha}\alpha!/(\gamma-\alpha)! & \text{si } \alpha=\beta \end{cases}
\end{aligned}
$$

donc

$$\sum\nolimits_{m,n} (-1)^{m+n} (j_1+n+h-l)!\,(k_1+m+h-l)!\,/(j_1+n+r-\lambda)!\,(k_1+m+r-l)!$$
$$(j_1-m)!\,(k_1-n)!\,(m+n+h-l)!$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 1 \\ (-1)^{l+r}(h-r)!/(k_1+j_1+r-l)! & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

et

$$(\Im_r^{x_1}(R)) \overset{x_1}{\underset{r}{\star}} (\Im_r^{x_1}(Q))_{k,j} = [i^{j_1+k_1}(k_1+r)!/k_1!] \times$$
$$\sum\nolimits_{l \geqslant k_1, j_1, h \geqslant r, H \in \mathbb{N}^{p-1}} \Big[(l-k_1)!\,j_1!\,(-1)^l/(l-j_1)!\,(l-k_1-r)!$$
$$(k_1+j_1+r-l)!\Big] Q_{(l-k_1,H),(h,J_1)} R_{(h,K_1),(l-j_1,H)}$$
$$= (\Im_r^{x_1}(Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} (R))_{k,j}$$

Remarque 5. 7. Posons, pour tout entier naturel r,

$$P_{np}(1/x^r) = (P_{np}(1/x))^r$$

et définissons les transformations $\mathcal{U}_r$ et $\mathcal{U}_{-r}$ par

$$\mathcal{U}_r(Q) = (-1)^r P_{np}(1/(x_1)^r) \circ Q \circ (x_1)^r$$
$$\mathcal{U}_{-r}(Q) = (-1)^r (x_1)^r \circ Q \circ P_{np}(1/(x_1)^r)$$

On a alors

$$Q \overset{x_1}{\underset{r}{\circ}} R = \mathcal{U}_{-r}(\mathcal{U}_r(Q) \overset{x_1}{\underset{o}{\circ}} \mathcal{U}_r(R)).$$

En effet

$$(\mathcal{U}_r(Q))_{k,j} = Q_{(k_1+r,K_1),(j_1+r,J_1)} \quad \text{pour tout } k,\ j$$
$$(\mathcal{U}_{-r}(Q))_{k,j} = Q_{(k_1-r,K_1),(j_1-r,J_1)} \quad \text{si } k_1 \geqslant r \text{ et } j_1 \geqslant r$$
$$(\mathcal{U}_{-r}(Q))_{k,j} = 0 \quad \text{sinon.}$$

On établit maintenant une formule plus simple pour $R \overset{x_1}{\underset{o}{\star}} Q$.

Notations. Au lieu de $R \overset{x_1}{\underset{o}{\star}} Q$ (resp. $R \overset{x_1}{\underset{o}{\circ}} Q$) on notera plus simplement $R \overset{x_1}{\star} Q$ (resp. $R \overset{x_1}{\circ} Q$).

Proposition 5. 8. *Si R et Q sont deux opérateurs linéaires analytiques dont le produit de convolution $R \overset{x_1}{\star} Q$ est défini et continu de $\mathcal{B}_\varrho$ dans $\mathcal{B}_{\varrho''}$ et si $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^p} \varrho_n x^n$ est dans*

$\mathcal{B}_\varrho$:

$$(R \overset{x_1}{\star} Q)(\varphi)(x) =$$
$$R(u \longrightarrow Q(v \longrightarrow \varphi(u_1+v_1,v_2,\dots,v_p))(x_1-u_1,u_2,\dots,u_p))(x).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\varphi(u_1+v_1,v_2,\dots,v_p) &= \sum\nolimits_{j\in\mathbb{N}^p} \varphi_j(u_1+v_1)^{j_1}(v_2,\dots,v_p)^{J_1}\\ &= \sum\nolimits_{(m,J_1)\in\mathbb{N}^p}\left(\sum\nolimits_{j_1\geqslant m} B(j_1,m)(u_1)^{j_1-m}\varphi_j\right)(v_1)^m(v_2,\dots,v_p)^{j_1}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&Q(v \longrightarrow \varphi(u_1+v_1,v_2,\dots,v_p))(x_1-u_1,u_2,\dots,u_p)\\ &= \sum\nolimits_{(h,H)\in\mathbb{N}^p,(m,J_1)\in\mathbb{N}^p}(x_1-u_1)^h(u_2,\dots,u_p)^H Q_{(h,H),(m,J_1)}\sum\nolimits_{j_1\geqslant m} B(j_1,m)(u_1)^{j_1-m}\varphi_j\\ &= \sum\nolimits_{h,H,m,j,q\in\mathbb{N}}(u_1)^{j_1-m+q}(u_2,\dots,u_p)^H(-1)^qB(h,q)B(j_1,m)(x_1)^{h-q}Q_{(h,H),(m,J_1)}\varphi_j\\ &= \sum\nolimits_{h,H,m,j,q_1\in\mathbb{N}}(u_1)^{q_1}(u_2,\dots,u_p)^H(-1)^{q_1+m-j_1}B(j_1,m)B(h,q_1+m-j_1)(x_1)^{h+j_1-m-q_1}\times\\ &\qquad Q_{(h,H),(m,J_1)}\varphi_j\end{aligned}$$

qui entraine

$$\begin{aligned}&R(u \longrightarrow Q(v \longrightarrow \varphi(u_1+v_1,v_2,\dots,v_p))(x_1-u_1,u_2,\dots,u_p))(x)\\ &= \sum\nolimits_{j,h,H,m,q_1,(n,K_1)\in\mathbb{N}^p}(x_1)^{n+h+j_1-m-q_1}(x_2,\dots,x_p)^{K_1}(-1)^{q_1+m-j_1}B(j_1,m)\\ &\qquad B(h,q_1+m-j_1)R_{(n,K_1),(q_1,H)}Q_{(h,H),(m,J_1)}\varphi_j\\ &= \sum\nolimits_{k,j,n,H,m,q_1} x^k(-1)^{q_1+m-j_1}B(j_1,m)\\ &B(k_1+m-j_1-n+q_1,k_1-n)R_{(n,K_1),(q_1,H)}Q_{(k_1+m-j_1-n+q_1,H),(m,J_1)}\varphi_j\\ &= \sum\nolimits_{k,j,n,H,m,l} x^k(-1)^{l+m+n}B(j_1,m)B(k_1+m-l,k_1-n)\\ &\qquad R_{(n,K_1),(j_1+n-l,H)}Q_{(k_1+m-l,H),(m,J_1)}\varphi_j\\ &= (R \overset{x_1}{\star} Q)(\varphi)(x)\end{aligned}$$

Remarque 5. 9 On peut aussi montrer la formule

$$\Im_r^{x_1}({}^*\Im_{-r}^{x_1}(Q) \overset{x_1}{\circ} {}^*\Im_{-r}^{x_1}(R)) = R \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} Q.$$

c'est d'ailleurs en en calculant le membre de gauche que l'on trouve la définition du produit de convolution. On peut déduire cette formule de la proposition 5. 8 en remarquant que

$${}^*\Im_{-r}^{x_1}(Q) \overset{x_1}{\circ} {}^*\Im_{-r}^{x_1}(R) = {}^*\Im_{-r}^{x_1}(Q) \underset{r}{\overset{x_1}{\circ}} {}^*\Im_{-r}^{x_1}(R).$$

§6. Produit de convolution d'ordre $-r$ de deux opérateurs analytiques lorsque lorsque r est un entier naturel.

§6.1. Définitions et exemples.

Définitions 6. 1. 1. On pose

$$(R \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} Q)_{k,j} = \begin{cases} (-1)^r[(k_1-r)!/k_1!]\sum_{0\leqslant m\leqslant j_1, 0\leqslant n\leqslant k_1, l\leqslant m+n, H\in\mathbb{N}^{p-1}}(-1)^{l+m+n}\times \\ \qquad [(k_1+m-l)!\,n!/(k_1+m-l-r)!\,(n-r)!]\times \\ B(j_1,m)B(k_1+m-l,k_1-n)R_{(n,K_1),(j_1+n-l,H)}Q_{(k_1+m-l,H),(m,J_1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad k_1\geqslant r \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

et on appelle produit de convolution partiel en x_1, d'ordre $-r$, de R et Q l'opérateur linéaire analytique $R \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} Q = ((R \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} Q)_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$.

Proposition 6. 1. 2. *Si Q et R sont deux opérateurs linéaires analytiques, on a, pour tout entier naturel r:*

$$\Im_r^{x_1}(Q \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} R) = \Im_r^{x_1}(R) \overset{x_1}{\circ} \Im_r^{x_1}(Q).$$

<u>Démonstration.</u>

$$\begin{aligned}
&(\Im_r^{x_1}(Q \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} R))_{k,j} \\
&= [i^{j_1+k_1}j_1!/k_1!]\sum_{l\geqslant j_1,k_1} d_{j_1,k_1}^{l,r}(Q \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} R)_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)} \\
&= [i^{j_1+k_1}j_1!/k_1!]\sum_{l\geqslant j_1,k_1} d_{j_1,k_1}^{l,r}(-1)^r[(l-k_1-r)/(l-k_1)!] \\
&\quad \sum_{0\leqslant m\leqslant l-j_1, 0\leqslant n\leqslant l-k_1, h\leqslant m+n, H\in\mathbb{N}^{p-1}} (-1)^{h+m+n}[(l-k_1+m-h)!\,n!/(l-k_1+m-h-r)!\,(n-r)!]\times \\
&\qquad B(l-j_1,m)B(l-k_1+m-h,l-k_1-n)R_{(l-k_1+m-h,H),(m,J_1)}Q_{(n,K_1),(l-j_1+n-h,H)}.
\end{aligned}$$

On pose $l+m-h=s$, $l+n-h=t$,$l-h=q$ donc $m=s-q$, $n=t-q$, $h=l-q$

$$\begin{aligned}
&(\Im_r^{x_1}(Q \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} R))_{k,j} \\
&= [i^{j_1+k_1}j_1!/k_1!]\sum_{q,s,t,h}(-1)^{q+s+t} \\
&\quad [(s-k_1)!\,(t-q)!\,(s-k_1)!\,(k_1+r)!\,/(s-k_1-r)!\,(t-q-r)!\,(s-q)] \\
&\quad R_{(s-k_1,H),(s-q,J_1)}Q_{(t-q,K_1),(t-j_1,H)} \\
&\quad \sum_l 1/(l+q-j_1-s)!\,(l+q-k_1-t)!\,(s+t-l-q)!\,(k_1+j_1+r-l)!
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_l 1/(l+q-j_1)!\,(l+q-k_1-t)!\,(s+t-l-q)!\,(k_1+j_1+r-l)! \\
&\quad= \sum\nolimits_{L\geqslant 0} 1/(t-j_1-L)!\,(s-k_1-L)!\,L!\,(L+k_1+j_1+q+r-s-t)! \\
&\quad= F(-s+k_1,-t+j_1,k_1+j_1+q+r-s-t+1,1)/(t-j_1)!\,(s-k_1)!\,(k_1+j_1+q+r-s-t)! \\
&\quad= (q+r)!/(t-j_1)!\,(s-k_1)!\,(k_1+q+r-s)!(j_1+q+r-t)!
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&(\Im_r^{x_1}(Q \underset{-r}{\overset{x_1}{\star}} R))_{k,j} \\
&= [i^{j_1+k_1} j_1!/k_1!] \sum\nolimits_{q,H} (-1)^q \sum\nolimits_s (-1)^s \\
&\qquad [(s-k_1)!\,(k_1+r)!\,/(s-k_1-r)!\,(k_1+q-s+r)!\,(s-q)!\,] R_{(s-k_1,H),(s-q,J_1)} \\
&\qquad\qquad \sum\nolimits_t (-1)^t (t-q)!\,(q+r)!\,/(t-q-r)!\,(t-j_1)!\,(j_1+q-t+r)!\,Q_{(t-q,K_1),(t-j_1,H)} \\
&= \sum\nolimits_{q,H} (-1)^q (\Im_r^{x_1}(R))_{(k_1,H),(q,J_1)} (\Im_r^{x_1}(Q))_{(q,K_1),(j_1,H)} \\
&= (\Im_r^{x_1}(R)) \overset{x_1}{\circ} (\Im_r^{x_1}(Q))_{k,j}.
\end{aligned}$$

Notation. A partir de maintenant on n'utilisera plus d'autre valeur de r que 0 et au lieu de noter $\Im_0^{x_1}$ (resp. ${}^*\Im_0^{x_1}$) on notera simplement $\Im^{x_1}$ (resp. ${}^*\Im^{x_1}$).

Exemples 6.1.3.

6.1.3.1. $(\delta_{(a,x_2,\dots,x_p)} \overset{x_1}{\star} Q)(\varphi)(x) = Q(v \longrightarrow \varphi(a+v_1,v_2,\dots,v_p))(x_1-a,x_2,\dots,x_p)$ en paticulier $\delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} \overset{x_1}{\star} Q = Q$.

6.1.3.2. Soient q et r deux fonctions holomorphes au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^p$. On désigne par $\int_{[0,x_1]} \circ q_{op}$ l'opérateur

$$\varphi \longrightarrow \int_{[0,x_1]} q(t_1,x_2,\dots,x_p)\varphi(t_1,x_2,\dots,x_p)\,dt_1$$

$$\left(\int_{[0,x_1]} \circ q_{op}\right) \overset{x_1}{\star} \left(\int_{[0,x_1]} \circ r_{op}\right) = \int_{[0,x_1]} \circ s_{op}$$

où $\qquad s(x) = \int_{[0,x_1]} q(u_1,x_2,\dots,x_p) r(x_1-u_1,x_2,\dots,x_p)\,du_1.$

6.1.3.3.

$$(Q \overset{x_1}{\star} \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)})(\varphi)(x) = Q(v \longrightarrow \varphi(a+v_1,v_2,\dots,v_p))(x)$$

en paticulier $(Q \overset{x_1}{\star} \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}) = Q$.

6. 1. 3. 4. $$q_{op} \overset{x_1}{\star} r_{op} = r(0, x_2, \ldots, x_p) q_{op}.$$

6. 1. 3. 5. $$Q \overset{x_1}{\star} x_1 \delta_{(0,x_2,\ldots,x_p)} = [x_1, Q].$$

§6.2. Quelques propriétés du produit de convolution et de la transformation de Fourier.

Lemme 6. 2. 1. *Si Q, R, S sont des opérateurs linéaires analytiques:*

a) $Q \circ (R \overset{x_1}{\star} S) = (Q \circ R) \overset{x_1}{\star} S)$

b) $\partial(Q \overset{x_1}{\star} R)/\partial x_1 = (\partial Q/\partial x_1) \overset{x_1}{\star} R = Q \overset{x_1}{\star} (\partial Q/\partial x_1) + ((\partial/\partial x_1) \circ Q) \overset{x_1}{\star} R$

c) $\partial(Q \overset{x_1}{\star} R)/\partial x_1 = (\partial Q/\partial x_1) \overset{x_1}{\star} R + R \overset{x_1}{\star} (\partial Q/\partial x_1)$ *(pour $2 \leqslant i \leqslant p$).*

La preuve de ce lemme est facile.

La formule qui suit montre que la transformation de Fourier des opérateurs est entièrement déterminée dès que l'on connait sa valeur sur les opérateurs particuliers que sont les fonctions.

Lemme 6. 2. 2. *Si φ est fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$ et s'écrit*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = \varphi^1(x_1)\varphi^2(x_2, \ldots, x_p)$$

on a formellement

$$(\Im^{x_1}(Q)(\varphi))(x) =$$
$$\Im^{x_1} \left\{ (u \longrightarrow Q(v \longrightarrow e^{-ix_1 v_1} \varphi^2(v_2, \ldots, v_p))(u_1, x_2, \ldots, x_p))_{op} \right\} (u \longrightarrow \varphi^1(x_1 + u_1)).$$

<u>Démonstration.</u>

$$(\Im^{x_1}(Q)(\varphi))(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p, j\in\mathbb{N}^p, l\in\mathbb{N}} x^k i^{j_1+k_1} [(-1)^l j_1!/(l-j_1)!(k_1+j_1-l)!] Q_{(l-k_1,K_1),(l-j_1,J_1)} \varphi_j$$

or $\varphi_{(j_1,J_1)} = \varphi^1_{j_1} \times \varphi^2_{J_1}$, donc si l'on pose $l - j_1 = n$, $k_1 + j_1 - l = h$, $l - k_1 = q$ c'est à dire $l = n + h + q$, $k_1 = n + h$, $j_1 = h + q$ nous obtenons

$$(\Im^{x_1}(Q)(\varphi))(x)$$
$$= \sum_{K_1, J_1 \in \mathbb{N}^{p-1}, n,h,q \in \mathbb{N}} (-i)^q (x_1)^h [(h+q)!/h!] \varphi^1_{h+q} [(-ix_1)^n/n!] (x_2, \ldots, x_p)^{K_1} Q_{(q,K_1),(n,J_1)} \varphi^2_{J_1}$$
$$= \sum_{K_1, J_1, n, q} (-i)^q (d^q \varphi^1/dx_1^q)(x_1)(x_2, \ldots, x_p)^{K_1} Q_{(q,K_1),(n,J_1)} [(-ix_1)^n/n!] \varphi^2_{J_1}.$$

D'autre part

$$(Q(v \longrightarrow e^{-ix_1 v_1} \varphi^2(v_2, \ldots, v_p)))(u_1, x_2, \ldots, x_p)$$
$$= \sum_{q, K_1, n, J_1} (u_1)^q (x_2, \ldots, x_p)^{K_1} Q_{(q,K_1),(n,J_1)} [(-ix_1)^n/n!] \varphi^2_{J_1}$$

donc

$$\Im^{x_1}\left\{(u \longrightarrow Q(v \longrightarrow e^{-ix_1v_1}\varphi^2(v_2,\ldots,v_p))(u_1,x_2,\ldots,x_p))_{op}\right\}(u \longrightarrow \varphi^1(x_1+u_1))$$
$$= \sum\nolimits_{K_1,J_1,n,q}(-i)^q(d^q\varphi^1/dx_1^q)(x_1)(x_2,\ldots,x_p)^{K_1}Q_{(q,K_1),(n,J_1)}[(-ix_1)^n/n!]\varphi^2_{J_1}$$

d'où le résultat.

§7. Transformation de Fourier totale et produit de convolution total.

Définition 7.1. Si Q est un opérateur linéaire analytique, on appellera transformé de Fourier total de Q et on notera $\Im(Q)$ l'opérateur défini par le produit commutatif

$$\Im(Q) = \Im^{x_1} \circ \Im^{x_2} \circ \cdots \circ \Im^{x_p}(Q).$$

Définition 7.2. Si Q et R sont deux opérateurs linéaires analytiques, leur produit de convolution total $R\star Q$ est défini par:

$$(R\star Q)_{k,j} =$$
$$j!\sum\nolimits_{m\in\mathbb{N}^p,n\in\mathbb{N}^p,l\in\mathbb{N}^p}(-1)^{|l+m+n|}[(k+m-l)!/m!(j-m)!(k-n)!(n+m-l)!]R_{(n,j+n-l)}Q_{(k+m-l,m)}$$

avec les conventions habituelles

$$j! = j_1!\ldots j_p, |j| = j_1+\cdots+j_p, j-m = (j_1-m_1,\ldots,j_p-m_p), k+m = (k_1+m_1,\ldots,k_p+m_p).$$

On a immédiatement pour $1 \leqslant l \leqslant p$ les formules:

$$\begin{aligned}
\partial(\Im(Q))/\partial x_1 &= -\Im(Q\circ ix_1); \quad \Im(\partial Q/\partial x_1) = \Im(Q)\circ ix_1\\
\partial(Q\star R)/\partial x_1 &= \partial Q/\partial x_1 \star R = Q\star\partial R/\partial x_1 + (\partial/\partial x_1\circ Q)\star R\\
Q\circ(R\star S) &= (Q\circ R)\star S)\\
\delta_o\star Q &= Q\star\delta_o\\
\Im(Q\star R) &= \Im(R)\circ\Im(Q)\\
\Im(Q\circ R) &= \Im(R)\star\Im(Q)\\
(Q\star R)(\varphi)(x) &= \{Q(u\longrightarrow R(v\longrightarrow\varphi(u_1+v_1,\ldots,u_p+v_p))(x_1-u_1,\ldots,x_p-u_p))\}(x)\\
(\Im(Q)(\varphi))(x) &= \Im((u\longrightarrow Q(v\longrightarrow e^{-i(x_1v_1+\cdots+x_pv_p)})(u_1,\ldots,u_p))_{op})\\
&\qquad\qquad (u\longrightarrow\varphi(u_1+x_1,\ldots,u_p+x_p))
\end{aligned}$$

§8. Opérateurs linéaires analytiques exponentiels.

On a vu, dans la démonstration de la proposition l, que le transformé de Fourier d'un opérateur linéaire analytique n'est pas en général un opérateur linéaire analytique. Plus

précisément si l'opérateur $Q=(Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ vérifie:
il existe des nombres réels positifs $M,a_1,\dots,a_p$, $b_1,\dots,b_p$ tels que: $|Q_{k,j}|\leqslant Ma^kb^j$ pour tout $(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ (où $a=(a_1,\dots,a_p)$, $b=(b_1,\dots,b_p)$) alors $\Im(Q)$ vérifie:
$|(\Im(Q))_{k,j}|\leqslant M(j!/k!)(1/a+b)^ka^j$ pour tout $(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ où $1/a+b$ désigne le p-uple $(1/a_1+b_1,\dots,1/a_p+b_p)$.
En effet, si pour $k=(k_1,\dots,k_p)$, $j=(j_1,\dots,j_p)$, $l=(l_1,\dots,l_p)$ appartenant à $\mathbb{N}^p$ on pose:

$$\begin{aligned}d^l_{k,j}=\prod_{1\leqslant i\leqslant p}d^{l_io}_{k_i,j_i}&=\prod_{1\leqslant i\leqslant p}(-1)^{l_i}k_i!/(l_i-j_i)!\,(k_i+j_i-l_i)!\\&=(-1)^{|l|}k!/(l-j)!\,(k+j-l)!\end{aligned}$$

alors

$$(\Im(Q))_{k,j}=(i^{|j+k|}j!/k!)\sum_{l\in\mathbb{N}^p,l\geqslant k,j}d^l_{k,j}Q_{(l-k,l-j)}$$

ce qui entraine

$$|(\Im(Q))_{k,j}|\leqslant Mj!\,a^{-k}b^{-j}\sum_l(ab)^l/(l-j)!\,(k+j-l)!\leqslant M(j!/k!)(1/a+b)^ka^j.$$

Définition 8. 1. Soient $s=(s_1,\dots,s_p)$ et $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_p)$ deux p-uples de nombres réels positifs ou nuls, on appelle opérateur linéaire analytique exponentiel d'ordre inverse (s,σ) une matrice infinie $Q=(Q_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p}$ à éléments complexes pour laquelle il existe des réels positifs $M,a_1,\dots,a_p$, $b_1,\dots,b_p$ tels que

$$|Q_{k,j}|\leqslant Ma^kb_j\Gamma(sj+1)/\Gamma(\sigma k+1)\qquad\forall\quad k,j\in\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$$

où $\Gamma(sj+1)=\prod_{1\leqslant i\leqslant p}\Gamma(s_ij_i+1)$, $\Gamma(\sigma k+1)=\prod_{1\leqslant i\leqslant p}\Gamma(\sigma_ik_i+1)$.

Remarque 8. 2. Dans cette définition on peut remplacer l'inégalité par

$$|Q_{k,j}|\leqslant Ma^kb^j(j!)^s/(k)^\sigma$$

en utilisant:
pour $s\geqslant 1$, $1\leqslant\Gamma(sx+1)/(\Gamma(x+1))^s\leqslant s^{sx}$
et pour $0\leqslant s\leqslant 1$, $s^{sx}\leqslant\Gamma(sx+1)/(\Gamma(x)+1))^s\leqslant 1$ où x et s sont des réels positifs ou nuls.

Notation. Soient $\varrho=(\varrho_1,\dots,\varrho_p)$ un p-uple de réels positifs et $s=(s_1,\dots,s_p)$ un p-uple de réels positifs ou nuls. On désigne par $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ l'espace de Banach sur $\mathbb{C}$ des fonctions $f(x)$ admettant au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$ un développement en série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^p}f_nx^n$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}^p}(n!)^sf_nx^n\in\mathcal{B}_\varrho$, normé par

$$\|f\|_{s,\varrho}=\sum_{n\in\mathbb{N}^p}(n!)^s|f_n|\varrho^n.$$

Remarquons que si les s_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ sont positifs, les fontions f sont entières dans $\mathbb{C}^p$ et que pour deux p-uples s et σ de réels positifs tels que $\sigma \leqslant s$, $\|f\|_{\sigma,\varrho} \leqslant \|f\|_{s,\varrho}$.

Lemme 8. 3. *Soit $s = (s_1, \ldots, s_p)$ un p-uple de réels positifs et $k = (k_1, \ldots, k_p)$ un p-uple d'entiers positifs ou nuls*

a) *si f et g sont dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ alors fg est dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{\varrho'})$ pour tout $\varrho' = (\varrho'_1, \ldots, \varrho'_p)$ tel que $0 < \varrho'_i \leqslant \varrho_i/2^{s_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$*
et
$$\|fg\|_{s,\varrho'} \leqslant \|f\|_{s,\varrho}\,\|g\|_{s,\varrho}$$

b) *si f est dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ alors $x^k f$ est dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{\varrho'})$ pour tout $\varrho' = (\varrho'_1, \ldots, \varrho'_p)$ tel que $0 < \varrho'_i < \varrho_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ et*
$$\|x^k f\|_{s,\varrho'} \leqslant (k!)^s \prod_{1\leqslant i\leqslant p}\left[(\varrho_i\varrho'_i)^{k_i}/(\varrho_i^{1/s_i} - \varrho_i'^{1/s_i})^{k_i s_i}\right]\|f\|_{s,\varrho}$$

c) *si $p(x)$ est un polynôme à coefficients complexes en les variables $x_1, \ldots, x_p$, si k_0 est un entier naturel et si f est dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ alors $p^{k_0} f$ est dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{\varrho'})$ pour tout $\varrho' = (\varrho'_1, \ldots, \varrho'_p)$ tel que $0 < \varrho'_i < \varrho_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ et:*
$$\|p^{k_0} f\|_{s,\varrho'} \leqslant \left[\prod_{1\leqslant i\leqslant p}(n_i+1)^{k_0}\right](M)^{k_0}\left[\prod_{1\leqslant i\leqslant p}((k_0 n_i)!)^{s_i}(\varrho_i\varrho'_i)^{k_0 n_i}/ (\varrho_i^{1/s_i} - \varrho_i'^{1/s_i})^{k_0 n_i s_i}\right]\|f\|_{s,\varrho}$$

dès que $0 < (1/\varrho'_i)^{1/s_1} - (1/\varrho_i)^{1/s_i} < 1$ où n_i désigne le degré de p par rapport à la variable x_i et M la borne supérieure du module des coefficients de p.

<u>Démonstration.</u>

a) $$\begin{aligned}\|fg\|_{s,\varrho'} &= \sum_n (n!)^s\Big|\sum_{0\leqslant k\leqslant n} f_k g_{n-k}\Big|\varrho'^n \\ &\leqslant \sum_n 2^{\Sigma s_i n_i}\varrho'^n \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k!)^s\,|f_k|((n-k)!)^s|g_{n-k}| \\ &\leqslant \|f\|_{s,\varrho''}\,\|g\|_{s,\varrho''} \leqslant \|f\|_{s,\varrho}\,\|g\|_{s,\varrho}\end{aligned}$$
dès que $\varrho''_i = 2^{s_i}\varrho'_i \leqslant \varrho_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$

b) $$\begin{aligned}\|x^k f\|_{x,\varrho'} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^p}((n+k)!)^s|f_n|\varrho' n + k \\ &= \varrho'^k \sum_{n\in\mathbb{N}^p}(((n+k)!/n!)(\varrho'^{1/s}/\varrho^{1/s}))^n)^s(n!)^s|f_n|\varrho^n \\ &\leqslant (k!)^s \prod_{1\leqslant i\leqslant p}(1/(1-\varrho'^{1/s_i}/\varrho^{1/s_i})^{k_i s_i})\varrho'^k\|f\|_{s,\varrho}\end{aligned}$$
puisque, si$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est un p-uple de nombres réels dans $]0,1[$
$\varepsilon^n(n+k)!/n! \leqslant k!\prod_{1\leqslant i\leqslant p}(1/(1-\varepsilon_i))^{k_i}$ pour tout k et n dans $\mathbb{N}^p$.

c) se déduit immédiatement de b en remarquant que, sous la condition $0 \leqslant (1/\varrho'_i)^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i} < 1$, la fonction $((k_0 n_i)!)^{si}/((1/\varrho'_i)^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i})^{k_0 n_i s_i}$ est une fonction croissante de n_i.

Lemme 8. 4. a) *Si $Q = (Q_{k,j})$ est un opérateur linéaire analytique exponentiel d'ordre inverse (s,σ) tel que $|Q_{k,j}| \leqslant Ma^k b^j (j!)^s/(k!)^\sigma$ pour tout $(k,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$, Q envoie de façon linéaire et continue $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{B}_{\varrho'})$ dès que sont vérifiées les inégalités $\varrho_i \geqslant b_i$ et*

$\varrho'_i < 1/a_i$,

b) *réciproquement, si Q est une application linéaire continue de $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{B}_{\varrho'})$, Q est défini par une matrice $(Q_{k,j})_{(k,j)} \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$ à éléments complexes telle que*

$$| Q_{k,j} | \leqslant \| Q \|_{s,\sigma,\varrho,\varrho'} ((j!)^s/(k!)^\sigma)(\varrho^j/\varrho'^k)$$

où $\|Q\|_{s,\sigma,\varrho,\varrho'}$ désigne la norme de Q.

Démonstration.

a) soit f dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$

$$\begin{aligned}\|Q(f)\|_{\sigma,\varrho'} &= \textstyle\sum_k (k!)^\sigma \varrho'^k \big|\sum_j Q_{k,j} f_j\big| \\ &\leqslant M \textstyle\sum_{k,j} (a\varrho')^k (j!)^s |f_j| a^k b^j \\ &\leqslant M \textstyle\sum_k (a\varrho')^k \sum_j (j!)^s |f_j| \varrho^j \\ &\leqslant M \textstyle\prod_{1\leqslant i\leqslant p} (1/(1-a_i\varrho'_i)) \|f\|_{s,\varrho}.\end{aligned}$$

b) On pose $Q(x^j) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} Q_{k,j} x^k$

$$\|Q(x^j)\|_{\sigma,\varrho'} = \textstyle\sum_k |Q_{k,j}| \varrho'^k (k!)^\sigma \leqslant \|Q\|_{s,\sigma,\varrho,\varrho'} (j!)^s \varrho^j$$

donc $|Q_{k,j}| \leqslant \|Q\|_{s,\sigma,\varrho,\varrho'} (j!)^s \varrho^j / (k!)^\sigma \varrho'^k$.

Lemme 8. 5.

a) *Si Q et R sont deux opérateurs linéaires analytiques exponentiels d'ordres inverses respectifs (σ,τ) et (s,σ) tels que:*

$$|Q_{k,j}| \leqslant M a^k b^j (j!)^\sigma/(k!)^\tau \qquad \forall \quad k,j \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$
$$|R_{k,j}| \leqslant N \alpha^k \beta^j (j!)^s/(k!)^\sigma \qquad \forall \quad k,j \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$

$Q \circ R$ est un opérateur linéaire analytique exponentiel d'ordre inverse (s,τ) si pour tout i $(1 \leqslant i \leq p)$ on a $b_i\alpha_i < 1$.

b) *Si Q est un opérateur linéaire analytique exponentiel d'ordre inverse (s,σ) où $0 \leqslant s_i, \sigma_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, $\Im(Q)$ et ${}^*\Im(Q)$ sont des opérateurs linéaires analytiques exponentiels d'ordre inverse $((1-\sigma_i)_{1\leqslant i\leqslant p}, (1-\max(s_i,\sigma_i))_{1\leqslant i\leqslant p})$;*

c) *Si Q et R sont deux opérateurs linéaires analytiques exponentiels d'ordres inverse respectifs (σ,τ) et (s,σ) où $0 \leqslant \tau_i \leqslant \sigma_i \leqslant s_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, tels que.*

$$|Q_{k,j}| \leqslant M a^k b^j (j!)^\sigma/(k!)^\tau \qquad \forall \quad k,j \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$
$$|R_{k,j}| \leqslant N \alpha^k \beta^j (j!)^s/(k!)^\sigma \qquad \forall \quad k,j \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$$

alors $Q \star R$ est un opérateur linéaire analytique exponentiel d'ordre inverse (s,τ) si on a la condition $b_i\alpha_i < 1$ pour tout $i = 1,\ldots,p$.

Démonstration.

a) est évident.

b) On suppose que $|Q_{k,j}| \leqslant Ma^k b^j (j!)^s/(k!)^\sigma$ alors

$$|(\Im(Q))_{k,j}| \leqslant M(j!/a^k b^j) \sum_{l\geqslant k,j} (ab)^l/((l-j)!)^{1-s}((l-k)!)^\sigma (k+j-l)!.$$

On distingue deux cas,

premier cas $s \geqslant \sigma$

$$\begin{aligned}|(\Im(Q))_{k,j}| &\leqslant (M/a^k b^j)((j!)^{1-\sigma}/(k!)^{1-s}) \sum_{l\geqslant k,j} (B(j,k+j-l))^\sigma \\ &\qquad (B(k,k+j-l))^{1-s}(1/(k+j-l)!)^{s-\sigma}(ab)^l \\ &\leqslant (M/a^k b^j)((j!)^{1-\sigma}/(k!)^{1-s}) \sum_{l\geqslant k,j} (B(\max(j,k),k+j-l))(ab)^l \\ &\leqslant M(j!)^{1-\sigma}/(k!)^{1-s}) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} (a_i^{\inf(0,j_i-k_i)} b_i^{\inf(0,k_i-j_i)}(1+a_ib_i)^{\sup(k_i,j_i)})\end{aligned}$$

deuxième cas $s \leqslant \sigma$

$$\begin{aligned}|(\Im(Q))_{k,j}| &\leqslant (M/a^k b^j)\big((j!)^{1-\sigma}/(k!)^{1-\sigma}\big) \sum_{l\geqslant k,j} (B(j,k+j-l))^\sigma \\ &\qquad (B(k,k+j-l))^{1-\sigma}(1/(l-j)!)^{\sigma-s}(ab)^l \\ &\leqslant (M/a^k b^j)(j!/k!)^{1-\sigma} \sum_{l\geqslant k,j} (B(\max(j,k),k+j-l))(ab)^l \\ &\leqslant M((j!/k!)^{1-\sigma}) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} (a_i^{\inf(0,j_i-k_i)} b_i^{\inf(0,k_i-j_i)}(1+a_ib_i)^{\sup(k_i,j_i)})\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}|(Q\star R)_{k,j}| &\leqslant MN \sum_{0\leqslant m\leqslant j, 0\leqslant n\leqslant k, l\leqslant m+n} ((k+m-l)!)^{1-\sigma} \\ &\qquad ((j+n-l)!)^\sigma a^n b^{j+n-l} \alpha^{k+m-l} \beta^m/(m!)^{1-s}(j-m)!\,(k-n)!\,(n+m-l)!\,(n!)^\tau \\ &\leqslant MN\alpha^k b^j ((j!)^s/(k!)^\tau) \sum_{m,n,l} (B(j,m)^{1-s}(B(k,n))^\tau (B(k+m-1,k-n))^{1-\sigma} \\ &\qquad (B(j+n-1,j-m))^\sigma (ab)^n (\alpha\beta)^m (\alpha b)^{-l}/((k-n)!)^{\sigma-\tau}((j-m)!)^{s-\sigma} \\ &\leqslant MN\alpha^k n^j ((j!)^s/(k!)) \sum_{m.n.l} (B(j,m))^{1-s}(B(k,n))^\tau (B(k+m-1,m+n-1))^{1-\sigma} \\ &\qquad ((B(j+n-1,m+n-1))^\sigma (ab)^n (\alpha\beta)^m (\alpha b)^{-l} \\ &\leqslant MN\alpha^k b^j ((j!)^s/(k!)^\tau) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \sum_{0\leqslant m_i\leqslant j_i, 0\leqslant n_i\leqslant k_i} B(j_i,m_i)(\beta_i/b_i)^{m_i} B(k_i,n_i) \\ &\qquad (a_i/\alpha_i)^{n_i} \sum_{h_i\geqslant 0} (B(k_i-n_i+h_i,h_i))^{1-\sigma}(B(j_i-m_i+h_i,h_i))^\sigma (\alpha_i b_i)^{h_i} \\ &\leqslant MN\alpha^k b^j ((j!)^s/(k!)^\tau) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \sum_{0\leqslant m_i\leqslant j_i, 0\leqslant n_i\leqslant k_i} B(j_i,m_i)(\beta_i/b_i)^{m_i} \\ &\qquad B(k_i,n)(a_i/\alpha_i)^{n_i}(1/(1-\alpha_i b_i)^{\sup(k_i,j_i)+1}) \\ &\leqslant MN\alpha^k b^j ((j!)^s/(k!)^\tau) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} (1+\beta_i/b_i)^{j_i}(1+a_i/\alpha_i)^{k_i}(1/(1-\alpha_i b_i)^{\sup(k_i,j_i)+1})\end{aligned}$$

Remarque 8.6 A partir de maintenant on se limitera, pour les opérateurs linéaires analytiques exponentiels d'ordre inverse (s,σ) aux cas suivants:

$$0 \leqslant s_i \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \sigma_i \leqslant 1 \qquad \forall\, i \quad 1 \leqslant i \leqslant p$$
$$s_i \geqslant \sigma_i \qquad \forall\, i \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Remarquons que la dernière condition peut toujours être réalisée puisque si Q est d'ordre inverse (s,σ), il est aussi d'ordre inverse (s^*,σ^*) pour tout couple $(s^*,\ \sigma^*)$ tel que $s \leqslant s^*$, $0 \leqslant \sigma^* \leqslant \sigma$.
Nous allons maintenant établir un résultat utile pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

Proposition 8.7. *Soit* $p(x) = \sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_n(x_2,\dots,x_p)(x_1)^n$ *un polynôme à* p *variables et à coefficients complexes tel que* $c_{k_1}(x_2,\dots,x_p) = 1$ *et soit un* p*-uple de nombres réels* $(s_1,\dots,s_p)$ *tels que* $0 \leqslant s_i \leqslant 1$ $(i = 1,\dots,p)$.
Si $s_2,\dots,s_p$ *sont assez petits par rapport à* s_1, *il existe un opérateur linéaire analytique exponentiel* Q *d'ordre inverse* (s,s) *vérifiant.*

a) $Q \circ (\sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_n(x_2,\dots,x_p)(x_1)^n) = 1$
b) Q *envoie* $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_p)$ *dans* $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{(\varrho_1,\varrho'_2,\dots,\varrho'_p)})$ *de façon continue dès que les* ϱ_i *et* ϱ'_i *sont assez grands,* $\varrho'_i < \varrho_i$ $(2 \leqslant i \leqslant p)$ *et* ϱ_1 *assez grand en fonction des* ϱ_i *et* ϱ'_i *pour* $2 \leqslant i \leqslant p$.

Démonstration.

a) On définit d'abord une famille de polynômes à coefficients réels $p_{m,k_1}(Y_1,\dots,Y_{k_1})$, de degré total m.
Désignons d'abord par $h_{m,k_1}(X_1,\dots,X_{k_1})$ le polynôme homogène symétrique à k_1 variables de degré m dont tous les coefficients sont 1 et par $s_1,\dots,s_{k_1}$ les polynômes symtriques:

$$s_1(X_1,\dots,X_{k_1}) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k_1} X_i$$
$$s_2(X_1,\dots,X_{k_1}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k_1} X_iX_j$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$s_k(X_1,\dots,X_{k_1}) = \prod_{1\leqslant i\leqslant k_1} X_i.$$

Les polynômes p_{m,k_1} sont définis par $h_{m,k_1}(X_1,\dots,X_{k_1}) = p_{m,k_1}(s_1,\dots,s_{k_1})$ pour $m \geqslant 0$; on convient que $h_{0,k_1} = p_{0,k_1} = 1$.

Les polynômes p_{m,k_1} vérifient la condition (qui peut aussi servir à les définir par récurrence sur m):
$p_{m,k_1}(Y_1, Y_0Y_2, \ldots, Y_0^{i-1}Y_i, \ldots, Y_0^{k_1-1}Y_{k_1})$
$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant \inf(k_1,m)} (-Y_0)^{j-1} Y_j p_{m-j,k_1}(Y_1, Y_0Y_2, \ldots, Y_0^{i-1}Y_i, \ldots, Y_0^{k_1-1}Y_{k_1})$
pour $m \geqslant 1$.
Posons ${}^*P_{m,k_1} = p_{m,k_1}(-c_{k_1-1}, c_{k_1-2}, \ldots, (-1)^{k_1}c_0)$ où les $c_i(x_2, \ldots, x_p)$ sont les coefficients du polynôme $p(x)$.
${}^*P_{m,k_1} = -\sum_{1 \leqslant j \leqslant \inf(k_1,m)} c_{k_1-j}\, {}^*P_{m-j,k_1}$, pour $m \geqslant 1$.
Soit $\varphi(x) = \sum_{n \geqslant 0} (x_1)^n \varphi_n(x_2, \ldots, x_p)$ une fonction appartenant à $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$.
Les seules hypothèses pour l'instant sur s et ϱ sont $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $0 < \varrho_i$. On définit l'opérateur Q par:

$$Q(\varphi)(x) = \sum_{n \geqslant k_1} \sum_{0 \leqslant l \leqslant n-k_1} x_1^l\, {}^*P_{n-k_1-l,k_1} \varphi_n = \sum_{n \geqslant k_1} \sum_{0 \leqslant m \leqslant n-k_1} x_1^{n-k_1-m}\, {}^*P_{m,k_1} \varphi_n.$$

Montrons la convergence normale de cette série. Chaque polynôme p_{m,k_1} s'écrit

$$p_{m,k_1}(Y_1, \ldots, Y_{k_1}) = \sum a^{m,k_1}_{n_1,\ldots,n_{k_1}} (Y_1)^{n_1} \cdot (Y_{k_1})^{n_{k_1}}$$

où les coefficients $a^{m,k_1}_{n_1,\ldots,n_{k_1}}$ sont des entiers relatifs tels que

$$\sum \left| a^{m,k_1}_{n_1,\ldots,n_{k_1}} \right| \leqslant (k_1)^m$$

et les exposants $n_1, \ldots, n_{k_1}$ tels que $n_1 + 2n_2 + \cdots + k_1 n_{k_1} = m$. Puisque φ est dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ les φ_n sont dans $\mathcal{L}_{s_2,\ldots,s_p}(\mathcal{B}_{\varrho_2,\ldots,\varrho_p})$. Posons pour tout $1 \leqslant j \leqslant k_1$ et $2 \leqslant i \leqslant p$, $d_{k_1-j,i} =$ le degré du polynôme c_{k_1-j} par rapport à la variable x_i, M_{k_1-j} la borne supérieure du module des coefficients complexes de c_{k_1-j}. Si les couples de rayons (ϱ_i, ϱ_i') vérifient pour $2 \leqslant i \leqslant p$

$$0 < (1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i} < 1,$$

on a:

$$\begin{aligned} &\| (c_{k_1-j})^{n_j} \varphi_n \|_{x_2,\ldots,x_p;\varrho_2',\ldots,\varrho_p'} \\ &\qquad \leqslant (M_{k_1-j})^{n_j} \prod_{2 \leqslant i \leqslant p} \Big\{ (d_{k_1-j,i} + 1)^{n_i} \\ &\qquad\qquad \left((n_j d_{k_1-j,i})! / [(1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i}]^{n_j d_{k_1-j,i}} \right)^{s_i} \Big\} \|\varphi_n\|_{s_2,\ldots,s_p;\varrho_2,\ldots,\varrho_p}. \end{aligned}$$

En appliquant k_1 fois ce type de majoration et en diminuant à chaque fois le rayon ϱ_i de manière à conserver la quantité $(1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i}$, on obtient, pour tout couple de rayons vérifiant

$$0 < (1/k_1)[(1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i}] < 1$$

$$\begin{aligned}&\Big\| \prod_{1\leqslant j\leqslant k_1} (c_{k_1-j})^{n_j}\varphi_n \Big\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2',\dots,\varrho_p'}\\ &\leqslant \prod_{1\leqslant j\leqslant k_1}\Big\{(M_{k_1-j})^{n_j}\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\big\{(d_{k_1-j,i}+1)^{n_j}\\ &\qquad \big((n_jd_{k_1-j,i})!/\big[1/k_1((1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}]^{n_jd_{k_1-j,i}}\big)^{s_i}\big]\big\}\Big\}\|\varphi_n\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2,\dots,\varrho_p}.\end{aligned}$$

Posons $d_i = \sup_{1\leqslant j\leqslant k_1}(d_{k_1-j,i}/j)$ et $M = \sup_{1\leqslant j\leqslant k_1}(M_{k_1-j})^{1/j}$ alors

$$\begin{aligned}&\Big\| \prod_{1\leqslant j\leqslant k_1} (c_{k_1-j})^{n_j}\varphi_n \Big\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2',\dots,\varrho_p'}\\ &\leqslant \prod_{1\leqslant j\leqslant k_1}\Big\{(M)^{jn_j}\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\big\{(d_i+1)^{jn_i}\\ &\qquad \big((jn_jd_i)!\,k_1^{jn_jd_i}/\big[(1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}\big]^{jn_jd_i}\big)^{s_i}\big\}\Big\}\|\varphi_n\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2,\dots,\varrho_p}\\ &\leqslant M^m\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\Big\{(d_i+1)^m\big((md_i)!\,k_1^{md_i}/[(1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}]^{md_i}\big)^{s_i}\Big\}\\ &\qquad\qquad \|\varphi_n\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2,\dots,\varrho_p}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\|{}^*P_{m,k_1}\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2',\dots,\varrho_p'}\\ &\leqslant (k_1M)^m\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\Big\{(d_i+1)^m\big((md_i)!\,k_1^{md_i}/\big[(1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}\big]^{md_i}\big)^{s_i}\Big\}\\ &\qquad\qquad \|\varphi_n\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2,\dots,\varrho_p}\\ &\leqslant (k_1M)^m\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\Big\{(d_i+1)^m(e^{d_i(d_i-1)}/(d_i)^{d_i})^m\\ &\qquad \big(m!\,k_1^m/\big[(1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}\big]^m\big)^{d_is_i}\Big\}\|\varphi_n\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2,\dots,\varrho_p}\end{aligned}$$

Faisons maintenant sur s l'hypothèse $\sum_{2\leqslant i\leqslant p} d_is_i \leq s_1$ et posons $\varrho' = (\varrho_1, \varrho_2', \dots, \varrho_p')$

$$\begin{aligned}\|Q(\varphi)\|_{s,\varrho'} &\leqslant \sum_{n\geqslant k_1,\,0\leqslant m\leqslant n-k_1}((n-k_1-m)!)^{s_1}(\varrho_1)^{n-k_1-m}(m!)^{s_1}\\ &\qquad \Big({}^*M/\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\big[(1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}\big]^{d_is_i}\Big)^m\|\varphi_n\|_{s_2,\dots,s_p;\,\varrho_2,\dots,\varrho_p}\end{aligned}$$

où ${}^*M = (k_1)^{1+s_1}M\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\{(d_i+1)e^{d_i(d_i-1)}/(d_i)^{d_i}\}$.
La série qui majore $\|Q(\varphi)\|_{s,\varrho'}$ converge dès que

$$\varrho_1 > {}^*M\Big/\prod_{2\leqslant i\leqslant p}\big[(1/\varrho_i')^{1/s_i}-(1/\varrho_i)^{1/s_i}\big]^{d_is_i}$$

et on a

$$\| Q(\varphi) \|_{s,\varrho'} \leqslant (1/(k_1!)^{s_1} (\varrho_1)^{k_1}) \\ \left(1/1 - {}^*M/\varrho_1 \prod_{2\leqslant i\leqslant p} [(1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i}]^{d_i s_i}\right) \|\varphi\|_{s,\varrho}$$

b) Montrons que Q vérifie l'égalité

$$Q \circ \left(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j(x_2,\dots,x_p)(x_1)^j\right) = 1$$

Soit $\varphi(x) = \sum_{m\geqslant 0}(x_1)^m \varphi_m(x_2,\dots,x_p)$ dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$.

$$\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j(x_2,\dots,x_p)(x_1)^j\right)\varphi(x) = \\ \sum_{n\geqslant 0}(x_1)^n \sum_{0\leqslant j\leqslant \inf(n,k_1)} (c_j\varphi_{n-j})(x_2,\dots,x_p)$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\left[Q \circ \left(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_1-1} c_j(x_2,\dots,x_p)(x_1)^j\right)\right](\varphi)(x) \\
&= \sum_{n\geqslant k_1} \sum_{0\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m} {}^*P_{m,k_1} \sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j \varphi_{n-j} \\
&= \sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j \sum_{n\geqslant k_1, 0\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m} {}^*P_{m,k}\varphi_{n-j} + \\
&\qquad \sum_{n\geqslant k_1, 0\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m} \varphi_{n-k_1} {}^*P_{m,k_1} \\
&= \sum_{0\leqslant j\leqslant k_1-1, n\geqslant k_1, 0\leqslant m\leqslant n-k_1} c_j (x_1)^{n-k_1-m} {}^*P_{m,k_1}\varphi_{n-j} + \sum_{n\geqslant k_1} (x_1)^{n-k_1}\varphi_{n-k_1} + \\
&\qquad \sum_{n\geqslant k_1, 1\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m} \varphi_{n-k_1} {}^*P_{m,k_1}
\end{aligned}$$

or pour $m \geqslant 1$

$${}^*P_{m,k_1} = -\sum_{1\leqslant j\leqslant \inf(k_1,m)} c_{k_1-j} {}^*P_{m-j,k_1}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left[Q \circ \left(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j(x_2,\dots,x_p)(x_1)^j\right)\right](\varphi) \\
&= \varphi + \sum_{0\leqslant j\leqslant k_1-1, n\geqslant k_1, 0\leqslant m\leqslant n-k_1} c_j (x_1)^{n-k_1-m} {}^*P_{m,k_1}\varphi_{n-j} - \\
&\qquad \sum_{n\geqslant k_1, 1\leqslant m\leqslant n-k_1, 1\leqslant j\leqslant \inf(k_1,m)} (x_1)^{n-k_1-m} \varphi_{n-k_1} c_{k_1-j} {}^*P_{m-j,k_1} \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

Rappelons les conditions suffisantes pour que Q envoie de façon continue $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{\varrho_1,\dots,\varrho_p})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\varrho_1,\varrho_2',\dots,\varrho_p'})$:

$$0 < ((1/k_1)[(1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i}] < 1 \quad \text{pour } i = 2,\dots,p$$

$$\varrho_1 > {}^*M \,/\, \prod_{2\leqslant i\leqslant p}[(1/\varrho_i')^{1/s_i} - (1/\varrho_i)^{1/s_i}]^{d_i s_i}$$
$$\sum_{2\leqslant i\leqslant p} d_i s_i \leqslant s_1$$

où ${}^*M$, d_i, k_1 sont des constantes réelles liées au polynôme donné $\sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j(x_2,\ldots,x_p)(x_1)^j$.

Remarque 8. 8. Dans la démonstration on a supposé implicitement que les s_i étaient non nuls puisque apparaissent les exposants $1/s_i$; le cas où certains s_i sont nuls est cependant plus simple car on peut prendre alors $\varrho_i = \varrho_i'$ mais le résultat est plus faible. Par contre on peut établir alors la proposition qui précède sans la restriction $c_{k_1}(x_2,\ldots,x_p) = 1$.

Proposition 8. 9. *Soit $\sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_j(x_2,\ldots,x_p)(x_1)^n$ un polynôme à p variables et à coefficients complexes. Il existe un opérateur linéaire analytique Q tel que*

a) $Q \circ \left(\sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_j(x_2,\ldots,x_p)(x_1)^n\right) = 1$

b) *Q envoie $\mathcal{B}_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}$ dans lui même de façon continue dès que les ϱ_i sont assez grands.*

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur le nombre des variables.

Le cas $p = 1$.

Puisque les coefficients du polynôme $\sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_n(x_1)^n$ sont des nombres complexes on peut supposer $c_{k_1} = 1$ et on pose pour toute fonction $\varphi(x_1) = \sum_{n\geqslant 0} \varphi_n(x_1)^n$ holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$:

$$Q(\varphi)(x_1) = \sum_{n\geqslant k_1} \sum_{0\leqslant l\leqslant n-k_1} (x_1)^{l\,*}P_{n-k_1-l,k_1}\varphi_n$$

où ${}^*P_{m,k_1} = p_{m,k_1}(-c_{k_1-1}, c_{k_1-2},\ldots,(-1)^{k_1}c_0)$ les polynômes p_{m,k_1} étant ceux déja utilisés dans la démonstration de la proposition précédente. Pour montrer la continuité de Q, on peut remarquer que Q est le produit $\prod_{1\leqslant i\leqslant k_1} Q_i$ d'opérateurs Q_i qui commutent entre eux deux à deux et sont définis par:

$$Q_i(\varphi)(x_1) = (\varphi(x_1) - \varphi(\gamma_i))/(x_1 - \gamma_i) = \sum_{n\geqslant 1} \sum_{0\leqslant l\leqslant n-1} (x_1)^l (\gamma_i)^{n-1-l}\varphi_n$$

où les nombres complexes $\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_{k_1}$ sont tels que

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_n(x_1)^n = \prod_{1\leqslant i\leqslant k_1} (x_1 - \gamma_i).$$

Alors

$$\| Q_i(\varphi) \|_{\varrho_1} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \sum_{0\leqslant l\leqslant n-1} (\varrho_1)^l\, |\gamma_i|^{n-1-l} |\varphi_n|$$

$$\leqslant \left[\sum\nolimits_{n\geqslant 0} |\varphi_n|(\varrho_1)^n - \sum\nolimits_{n\geqslant 0} |\varphi_n|\,|\gamma_i|^n\right] / (\varrho_1 - |\gamma_i|)$$
$$\leqslant (1/(\varrho_1 - |\gamma_i|)) \|\varphi\|_{\varrho_1} \quad \text{dès que} \quad \varrho_1 > |\gamma_i|$$

Supposons la proposition vraie pour p variables et montrons la pour $p+1$ variables. Considérons le polynôme $\sum_{0\leqslant n\leqslant k_1} c_n(x_2,\dots,x_{p+1})(x_1)^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un opérateur linéaire analytique D tel que:

$$D \circ c_{k_1} = 1$$

D envoie $\mathcal{B}_{\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}}$ de facon continue dans lui même dès que $\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}$ sont assez grands.
Posons ${}^{**}P_{m,k_1} = p_{m,k_1}(-c_{k_1-1}, c_{k_1}c_{k_1-2},\dots,(-1)^{k_1}(c_{k_1})^{k_1-1}c_0)$.
On a la relation de récurrence

$${}^{**}P_{m,k_1} = -\sum\nolimits_{1\leqslant j\leqslant \inf(k_1,m)} c_{k_1}^{j-1} c_{k_1-j}\, {}^{**}P_{m-j,k_1}.$$

Pour toute fonction $\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0}(x_1)^n \varphi_n(x_2,\dots,x_{p+1})$ dans $\mathcal{B}_{\varrho_1,\dots,\varrho_{p+1}}$ on pose:

$$Q(\varphi)(x) = \sum\nolimits_{n\geqslant k_1} \sum\nolimits_{0\leqslant l\leqslant n-k_1} (x_1)^l (D^{n-k_1-l+1} \circ {}^{**}P_{n-k_1-l,k_1})(\varphi_n)$$
$$= \sum\nolimits_{n\geqslant k_1} \sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m} (D^{m+1} \circ {}^{**}P_{m,k_1})(\varphi_n).$$

Montrons la convergence normale de cette série.
Posons $M = \max_{1\leqslant j\leqslant k_1} \|c_j\|_{\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}}$, $d = \|D\|_{\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}}$
alors

$$\|{}^{**}P_{m,k_1}\varphi_n\|_{\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}} \leqslant (k_1)^m M^m \|\varphi_n\|_{\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}}$$

ce qui entraine

$$\|Q(\varphi)\|_\varrho \leqslant d \sum\nolimits_{n\geqslant k_1} \sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant n-k_1} (\varrho_1)^{n-k_1-m} (dk_1M)^m \|\varphi_n\|_{\varrho_2,\dots,\varrho_{p+1}}$$
$$\leqslant \left[d/(\varrho_1)^{k_1-1}(\varrho_1 - dk_1M)\right] \|\varphi\|_\varrho.$$

Il reste à montrer l'égalité

$$Q \circ \left(\sum\nolimits_{1\leqslant n\leqslant k_1} c_n(x_2,\dots,x_{p+1})(x_1)^n\right) = 1$$

ce que l'on fait de la même manière que dans la proposition précédente.

§9. Applications aux équations différentielles à coefficiens constants.

Soit l'équation

$$(e): \qquad \sum\nolimits_{0\leqslant n_i\leqslant k_i,1\leqslant i\leqslant p} a_{n_1,\ldots,n_p}\partial^{n_1+\cdots+n_p}y/\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_p^{n_p}=0$$

où $p\in\mathbb{N}-\{0\}, k_i\in\mathbb{N}$ pour $1\leqslant i\leqslant p$, $k_1\neq 0$, $n_i\in\mathbb{N}$ pour $1\leqslant i\leqslant p$, $a_{n_1,\ldots,n_p}\in\mathbb{C}$ pour $n_i\leqslant k_i$ $(1\leqslant i\leqslant p)$, $a_{k_1,0,\ldots,0}\neq 0$.

Définition 9. 1. On appelle conditions intiales analytiques (resp. analytiques exponentielles) relatives à x_1 pour une solution y de l'équation (e) la donnée de k_1 opérateurs linéaires analytiques (resp. analytiques exponentiels) $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{k_1-1}$, constants par rapport à x_1 c'est à dire vérifiant $Q_i=\delta_{(x_1,0,\ldots,0)}\star Q_i$, tels que:

$$\delta_{(x_1,0\ldots,0)}\star\partial^i y/\partial x_1^i=Q_i \quad \text{pour tout } i \;\; 0\leqslant i\leqslant k_1-1$$

Remarque 9. 2. On peut aussi exprimer ces conditions en utilisant le produit de convolution partiel par rapport à x_1, puisque, pour tout opérateur linéaire analytique Q, on a:

$$\delta_{(x_1,0,\ldots,0)}\star Q=1\overset{x_1}{\star}Q.$$

Désignons par (e. f.) l'équation

$$\sum\nolimits_{0\leqslant n_i\leqslant k_i,1\leqslant i\leqslant p} a_{n_1,\ldots,n_p}\partial^{n_1+\cdots+n_p}y/\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_p^{n_p}=\delta_{(0,\ldots,0)}.$$

Lemme 9. 3.

a) *Il existe un opérateur linéaire analytique exponentiel d'ordre inverse* $(1,1)$ *de conditions initiales nulles, solutions de* (e. f.).

b) *Si les coefficients du premier membre de l'équation vérifient la condition* $a_{k_1,n_2,\ldots,n_p}=0$ *si* $(n_2,\ldots,n_p)\neq(0,\ldots,0)$, *il existe un p-uple de nombres réels* $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_p)$ *tels que* $0\leqslant\sigma_i<1$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ *et un opérateur linéaire analytique exponentiel* E *d'ordre inverse* (σ,σ), *de conditons initiales nulles, solution de* (e. f.).

<u>Démonstration.</u>

D'après les deux propositions précédentes, il existe un opérateur linéaire analytique exponentiel Q, tel que

$$Q\circ\Big(\sum\nolimits_{0\leqslant n_i\leqslant k_i,1\leqslant i\leqslant p}(ix_1)^{n_1}\cdots(ix_p)^{n_p}a_{n_1,n_2,\ldots,n_p}\Big)=1.$$

On pose $E = {}^*\Im(Q)$.
Dans le cas a), Q est d'ordre $(0,0)$ donc E d'ordre $(1,1)$.
Dans le cas b), Q est d'ordre $(s_1, \ldots, s_p)$ avec $0 < s_i \leqslant 1$, donc E est d'ordre $(1-s_1, \ldots, 1-s_p)$.
Montrons la nullité des conditions initiales pour E:

$$\delta_{(x_1,0,\ldots,0)} \star \partial^i E / \partial x_1^i = 0 \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant i \leqslant k_1 - 1$$

éqiuvaut à

$$Q \circ (x_1)^i \circ \delta_{(0,x_2,\ldots,x_p)} = 0 \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant i \leqslant k_1 - 1$$

ce qui est évident d'après la définition de Q.

Remarque 9. 4. L'opérateur E du lemme qui précède est défini sur $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{B}_\varrho)$ où ϱ est aussi petit que l'on veut. En effet on peut trouver $\varrho' = (\varrho_1', \ldots, \varrho_p')$ et $\varrho'' = (\varrho_1', \varrho_2'', \ldots, \varrho_p'')$ aussi grands que l'on veut tels que:

$$|(\Im(E))_{k,j}| \leqslant M \left[(j!)^{1-\sigma}/(k!)^{1-\sigma}\right] \left[\varrho'^j/\varrho''^k\right]$$

donc

$$|(E)_{k,j}| \leqslant M\,[(j!)^\sigma/(k!)^\sigma] \prod\nolimits_{1 \leqslant i \leqslant p} (\varrho_i'')^{\sup(0,k_i-j_i)} (\varrho_i')^{\inf(0,k_i-j_i)} (1 + \varrho_i'/\varrho_i'')^{\sup(k_i,j_i)},$$

d'aprés lemme 8. 5 b (démonstration)

Définition 9. 5. On appelle solution fondamentale opérateur une solution analytique exponentielle de l'équation (e. f.) dont les conditions initiales sont nulles (on verra plus loin qu'elle est unique sous la condition $a_{k_1,n_2,\ldots,n_p} = 0$, pour tout $(n_2, \ldots, n_p) \neq 0$).

Remarque 9. 6. On a probablement un résultat plus général que celui obtenu dans le lemme (partie b)).
Considérons en effet le cas de deux variables ($p = 2$) et un polynôme $\sum_{0 \leqslant j \leqslant k_1} c_j(x_2)(x_1)^j$ où l'on suppose cette fois-ci, au lieu de l'hypothèse $c_{k_1}(x_2) = 1$:

$$d^\circ(c_{k_1}(x_2)) \geqslant d^\circ(c_j(x_2)) \text{ pour tout } j \text{ tel que } 0 \leqslant j \leqslant k_1 - 1.$$

La proposition 8. 7 est alors vraie pour ce polynôme avec (s_1, s_2) quelconques tels que $0 \leqslant s_i \leqslant 1$ (onn'a plus la condition de petitesse de s_2 par rapport à s_1).
En effet, soit D un inverse à gauche de $c_{k_1}(x_2)$, construit comme dans la proposition.
Si $p(x_2)$ et $q(x_2)$ sont des polynômes en x_2 dont le degré est inférieur ou égal à celui de c_{k_1}, on a:

$$[Dp, Dq] = 0$$

pour tout réel s_2 tel que $0 \leqslant s_2 \leqslant 1$ et tout rayon ϱ assez grand, la norme de $Dp : \mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{\varrho_2}) \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{B}_{\varrho_2})$ est majorée par une fonction $v(p, s_2, \varrho_2)$ du type suivant $v(p, s_2, \varrho_2) = \sum_{i,finie} \alpha_i \prod_{j,fini} 1/(\varrho_2 - \lambda_j^i)^{n_i}$ où α_i, λ_j^i sont des réels positifs dépendant de p et D, n_i des entiers positifs.

On définit, comme on l'avait fait précédemment, un inverse à gauche Q pour $\sum_{0\leqslant j\leqslant k_1} c_j(x_2)$ $(x_1)^j$ par la formule:

$$Q(\varphi)(x) = \sum\nolimits_{n\geqslant k_1} \sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m}(D^{m+1} \circ {}^{**}P_{m,k_1})(\varphi_n)$$

$$(\text{ oú } {}^{**}P_{m,k} = p_{m,k}(-c_{k_1-1}, c_{k_1}c_{k_1-2}, \ldots, (-1)^{k_1}(c_{k_1})^{k_1-1}c_0))$$

Mais Q s'écrit aussi:

$$Q(\varphi)(x) = \sum\nolimits_{n\geqslant k_1} \sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant n-k_1} (x_1)^{n-k_1-m} q_{m,k_1}(\varphi_n)$$

où

$$\begin{aligned} q_{m,k_1} &= \left[p_{m,k_1}(-Dc_{k_1-1}, Dc_{k_1-2}, \ldots, (-1)^{k_1}Dc_0)\right] \circ D \\ &= D \circ \left[p_{m,k_1}(-c_{k_1-1}D, c_{k_1-2}D, \ldots, (-1)^{k_1}c_0D)\right]. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on majore facilement la norme de q_{m,k_1}.

Désignons par $v_i(\varrho_2, s_2)$ la norme de

$$D \circ c_i \ : \ \mathcal{L}_{s_2}(\mathcal{B}_{\varrho_2}) \longrightarrow \mathcal{L}_{s_2}(\mathcal{B}_{\varrho_2})$$

et par $v(\varrho_2, s_2) = \max_{1\leqslant i\leqslant k_1}(v_{k_1-i}(\varrho_2, s_2))^{1/i}$

$$\|q_{m,k_1}(\varphi_n)\|_{s_2,\varrho_2} \leqslant (k_1)^m(v(\varrho_2, s_2))^m\|\varphi_n\|_{s_2,\varrho_2}$$

donc

$$\begin{aligned} &\|Q(\varphi)\|_{s_1,s_2,\varrho_1,\varrho_2} \\ &\quad\leqslant \sum\nolimits_{n\geqslant k_1} \sum\nolimits_{0\leqslant m\leqslant n-k_1} ((n-k_1-m)!)^{s_1}(\varrho_1)^{n-k_1-m}[k_1 v(\varrho_2, s_2)]^m \|\varphi_n\|_{\varrho_2,s_2} \\ &\quad\leqslant \left[1/(\varrho_1)^{k_1-1}(\varrho_1 - k_1 v(\varrho_2, s_2))\right] \|\varphi\|_{s_1,s_2,\varrho_1,\varrho_2}. \end{aligned}$$

Théorème 9. 7. *Sous l'hypothèse $a_{k_1,n_2,\ldots,n_p} = 0$ pour tout $(n_2, \ldots, n_p) \neq (0, \ldots, 0)$, il existe un p-uple de réels $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ où $0 < \sigma_i \leqslant 1$ tel que toute solution y de l'équation (e), de conditions initiales analytiques exponentielles d'ordre inverse $(\sigma, \sigma)(Q_i)_{0\leqslant i\leqslant k_1-1}$ s'écrive* *de manière unique sous la forme:*

$$y = \sum\nolimits_{0 \leqslant i \leqslant k_1 - 1} (\partial/\partial x_1 \circ \partial^i E/\partial x_1^i) \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda_i$$

où E est la solution fondamentale opérateur et $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{k_1-1}$ des opérateurs linéaires analytiques constants par rapport à x_1, s'exprimant en fonction des polynômes $\sum_{0 \leqslant n_j \leqslant k_j, 2 \leqslant j \leqslant p} a_{n_1,n_2,\dots,n_p} (ix_2)^{n_2} \dots (ix_p)^{n_p}$ et en fonction linéaire des conditions initiales.

Démonstration. On ne fera intervenir l'hypothèse $a_{k_1,n_2,\dots,n_p} = 0$ pour tout $(n_2, \dots, n_p) \neq (0, \dots, 0)$ que le plus tard possible. Démontrons d'abord le lemme:

Lemme 9. 8. *Si M et Λ sont deux opérateurs linéaires analytiques exponentiels et si Λ est constant par rapport à x_1, alors*

$$1 \overset{x_1}{\star} \big(M \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda\big) = (1 \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} M) \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda$$

Preuve. Pour simplifier l'écriture on remplace les $p-1$ variables $x_2, \dots, x_p$ par x_2.
Λ vérifie $\Lambda = 1 \overset{x_1}{\star} \Lambda$, donc si φ est une fonction dans un $\mathcal{L}_s(\mathcal{B}_\varrho)$ convenable:

$$(1 \overset{x_1}{\star} \Lambda)(\varphi)(x) = \Lambda(v \longrightarrow \varphi(x_1 + v_1, v_2))(0, x_2) = \Lambda(\varphi)(x)$$
$$(M \overset{x_2}{\star} \Lambda)\varphi(x) = M(u \longrightarrow \Lambda(v \longrightarrow \varphi(v_1, u_2 + v_2))(u_1, x_2 - u_2))(x)$$

donc

$$\begin{aligned}(1 \overset{x_1}{\star} (M \overset{x_2}{\star} \Lambda))(\varphi)(x) &= (M \overset{x_2}{\star} \Lambda)(y \to \varphi(x_1 + y_1, y_2)(0, x_2) \\ &= M(u \to \Lambda(v \to \varphi(x_1 + v_1, u_2 + v_2))(u_1, x_2 - u_2))(0, x_2) \\ &= M(u \to \Lambda(v \to \varphi(x_1 + u_1 + v_1, u_2 + v_2))(0, x_2 - u_2))(0, x_2).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}(1 \overset{x_1}{\star} M) \overset{x_2}{\star} \Lambda))(\varphi)(x) &= (1 \overset{x_1}{\star} M)(u \to \Lambda(v \to \varphi(v_1, u_2 + v_2))(u_1, x_2 - u_2))(x) \\ &= M(u \to \Lambda(v \to \varphi(v_1, u_2 + v_2))(x_1 + u_1, x_2 - u_2))(0, x_2) \\ &= M(u \to \Lambda(v \to \varphi(v_1 + x_1 + u_1, u_2 + v_2))(0, x_2 - u_2))(0, x_2)\end{aligned}$$

d'où le lemme.
Si $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{k_1-1}$ sont des opérateurs linéaires analytiques exponentiels d'ordre inverse (σ, σ) constants par rapport à x_1 alors

$$y = \sum\nolimits_{0 \leqslant i \leqslant k_1 - 1} \big(\partial/\partial x_1 \circ \partial^i E/\partial x_1^i\big) \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda_i$$

est solution de (e).
Supposons que la solution de conditions initiales $(Q_i)_{0\leqslant i\leqslant k_1-1}$ s'écrive sous cette forme.
Dire que y est de conditions initiales $(Q_i)_{0\leqslant i\leqslant k_1-1}$ est équivalent à

$$1 \overset{x_1}{\star} \left\{ \sum_{0\leqslant i\leqslant k_1-1} \left(\partial/\partial x_1 \circ \partial^{i+j} E/\partial x_1^{i+j}\right) \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda_j \right\} = Q \qquad (0 \leqslant j \leqslant k_1 - 1)$$

c'est à dire

$$\left(1 \overset{x_1}{\star} \sum_{0\leqslant i\leqslant k_1-1} \left(\partial/\partial x_1 \circ \partial^{i+j} E/\partial x_1^{i+j}\right)\right) \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda_j = Q \qquad (0 \leqslant j \leqslant k_1 - 1)$$

donc

$$(1 \overset{x_1}{\star} \mathcal{E}) \overset{(x_2,\dots,x_p)}{\star} \Lambda = Q$$

où Λ est le vecteur colonne ${}^t(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{k_1-1})$, Q le vecteur colonne ${}^t(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k_1-1})$, $(1 \overset{x_1}{\star} \mathcal{E})$ la matrice carrée d'ordre k_1 dont l'élément situé á la $h^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne est:

$$\begin{aligned}
E_{h,j} &= 1 \overset{x_1}{\star} \left(\partial/\partial x_1 \circ \partial^{h+j-2} E/\partial x_1^{h+j-2}\right)\\
\Im(E_{h,j}) &= \Im\left(\delta_{(x_1,0,\dots,0)} \star (\partial/\partial x_1 \circ \partial^{h+j-2} E/\partial x_1^{h+j-2})\right)\\
&= \Im\left(\partial/\partial x_1 \circ \partial^{h+j-2} E/\partial x_1^{h+j-2}\right) \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}\\
&= \left[\{\Im(E) \circ (ix_1)^{h+j-2}\} \star (-ix_1 \delta_{(0,\dots,0)}\right] \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}\\
&= -i^{h+j-1} \left[x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{h+j-2}\right] \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}.
\end{aligned}$$

Posons
$b_l(x_2, \dots, x_p) = \sum_{0\leqslant n_j\leqslant k_j, 2\leqslant j\leqslant p} a_{l,n_2,\dots,n_p} (ix_2)^{n_2} \cdots (ix_p)^{n_p} \quad 0 \leqslant l \leqslant k_1$

Lemme 9.9. *La matrice $(E_{h,j})_{1\leqslant h,j\leqslant k_1}$, Où*

$$E_{h,j} = 1 \overset{x_1}{\star} \left(\partial/\partial x_1 \circ \partial^{h+j-2}/\partial x_1^{h+j-2}\right)$$

vérifie

$$\begin{cases} E_{h,j} = 0 \quad si \quad h + j \leqslant k_1 \\ {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}\left((b_{k_1})^{h+j-k_1}\right) \overset{x_2,\dots,x_p}{\star} E_{h,j} = {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_{h+j-k_1}) \quad si \quad h + j \geqslant k_1 + 1 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -b_{k_1-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_p = -\sum_{0\leqslant j\leqslant p-1} (b_{k_1})^j b_{k_1-1-j} b_{p-1-j} \qquad (0 \leqslant p \leqslant k_1 - 1). \end{cases}$$

Démonstration.

On a

$$^{*}\Im^{x_2,\dots,x_p}\left((b_{k_1})^{h+j-k_1}\right) = {}^{*}\Im\left((b_{k_1})^{h+j-k_1} \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}&\Im\left({}^{*}\Im^{x_2,\dots,x_p}\left((b_{k_1})^{h+j-k_1}\right) \overset{x_2,\dots,x_p}{\star} E_{h,j}\right)\\ &\qquad = \Im\left(E_{h,j} \underset{r}{\overset{x_1}{\star}} \left((b_{k_1})^{h+j-k_1} \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}\right)\right)\\ &\qquad = \Im(E_{h,j}) \circ (b_{k_1})^{h+j-k_1}\end{aligned}$$

La formule à montrer équivaut donc à:

$$\begin{cases} \Im(E_{h,j}) = 0 & \text{si} \quad h+j \leqslant k_1 \\ \Im(E_{h,j}) \circ (b_{k_1})^{h+j-k_1} = a_{h+j-1-k_1}\delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} & \text{si} \quad h+j \geqslant k_1+1 \end{cases}$$

c'est à dire à

$$\begin{cases} [x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{h+j-2}] \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} = 0 \quad \text{si} \quad h+j \leqslant k_1 \\ [x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{h+j-2}] \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} \circ (b_{k_1})^{h+j-k_1} = \\ \qquad\qquad -(-i)^{h+j-1} a_{h+j-1-k_1}\delta(0,x_2,\dots,x_p) \quad \text{si} \quad h+j \geqslant k_1+1. \end{cases}$$

Le résultat est immédiat pour $h+j \leqslant k_1$ puisque les conditions initiales de E sont nulles. Si $h+j > k_1$, on montre, par récurrence sur $l = h+j-k_1-1$, la formule:

$$[x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{l+k_1-1}] \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} \circ (b_{k_1})^{l+1} = -(-i)^{l+k_1} a_l \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}$$

si $l = 0$, c'est une conséquence de:

$$\Im(E) \circ \left(\sum\nolimits_{0 \leqslant j \leqslant k_1} (ix_1)^j b_j(x_2,\dots,x_p)\right) = 1$$

Supposons la formule vraie pour l et montrons la pour $l+1$.

$$\begin{aligned} &[x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{l+k_1}] \circ (b_{k_1})^{l+2} \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} = \\ &\qquad\qquad [x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{k_1} b_{k_1} \circ (x_1)^l] \circ (b_{k_1})^{l+1} \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} \\ &= \left[x_1, (-i)^{k_1}\left(1 - \sum\nolimits_{0 \leqslant j \leqslant k_1-1} \Im(E) \circ (ix_1)^j b_j\right)(x_1)^l\right] \circ (b_{k_1})^{l+1} \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} \\ &= -(-i)^{k_1} \sum\nolimits_{0 \leqslant j \leqslant k_1-1} \\ &\qquad\qquad \left\{[x_1, \Im(E) \circ (x_1)^{j+l}] \circ (b_{k_1})^{j+l+2-k_1} \circ \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)}\right\} \circ (i)^j b_j (b_{k_1})^{k_1-1-j} \\ &= (-i)^{l+k_1+1} \sum\nolimits_{0 \leqslant j \leqslant l} (b_{k_1})^j b_{k_1-1-j} a_{l-j} \\ &= -(-i)^{l+k_1+1} a_{l+1} \delta_{(0,x_2,\dots,x_p)} \end{aligned}$$

où $a_{l+1} = -\sum_{0\leqslant j\leqslant l}(b_{k_1})^j b_{k_1-1-j}a_{l-j}$ d'où le lemme.

Utilisons à partir de maintenant l'hypothèse $a_{k_1,n_2,\dots,n_p} = 0$ pour $(n_2,\dots,n_p) \neq (0,\dots,0)$ c'est à dire $b_{k_1} = 1$; sinon il existe des opérateurs linéaires analytiques exponentiels non nuls Q tels que $Q \circ b_{k_1} = 0$.

La matrice $1 \overset{x_1}{\star} \mathcal{E}$ est la suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_0) \\ \dots & \dots & {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_0) & {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_0) & {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_1) & \dots & {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_{k_1-1}) \end{pmatrix}$$

On peut maintenant résoudre la sytème $(1 \overset{x_1}{\star} \mathcal{E}) \overset{x_2,\dots,x_p}{\star} \Lambda = Q$ qui équivaut à:

$$\Lambda_{k_1-i} = -\sum_{1\leqslant q\leqslant i-1} {}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}(a_q) \overset{x_2,\dots,x_p}{\star} \Lambda_{k_1-i+q} + Q_{k_1-i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant k_1.$$

On le résoud de proche en proche en commençant par $i = 1$.

Il reste à vérifier que les produits de convolution qui interviennent sont bien définis, ce qui ne pose pas de problème puisque, d'une part, les a_q sont des polynômes et l'on a:

$${}^*\Im^{x_2,\dots,x_p}((x_2)^{j_2}\cdots(x_p)^{j_p}) = \varphi \longrightarrow (i)^{j_2+\dots j_p}(\partial^{j_2+\dots j_p}\varphi/\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_p^{j_p})(x_1,0)$$

d'autrer part la solution fondamentale E est définie sur $\mathcal{L}_\sigma(B_\varrho)$ avec ϱ aussi petit que l'on veut.

Résolution de l'équation avec second membre.

On considère l'équation

$$(\mathrm{e}_1): \qquad \sum_{0\leqslant n_i\leqslant k_i, 1\leqslant i\leqslant p} a_{n_1,n_2,\dots,n_p}\partial^{n_1+\dots n_p}y/\partial x_1^{n_1}\dots\partial x_p^{n_p} = R$$

où l'on fait toujours l'hypothése $a_{k_1,n_2,\dots,n_p} = 0$ pour $(n_2,\dots,n_p) \neq (0,\dots,0)$ et où R est un opérateur linéaire analytique exponentiel du même ordre inverse (σ,σ) que la solution fondamentale E associée à (e_1).

Lemme 9.10. *$E\star R$ est la solution de l'équation* (e_1) *dont les conditions initiales sont nulles.*

Démonstration.

Il suffit de calculer les conditions initiales de $E\star R$

$$\begin{aligned} 1 \overset{x_1}{\star} \partial^i(E\star R)/\partial x_1^i &= \delta_{(x_1,0,\dots,0)} \star \partial^i(E\star R)/\partial x_1^i \\ &= \delta_{(x_1,0,\dots,0)} \star (\partial^i E/\partial x_1^i \star R) \\ &= \left(\delta_{(x_1,0,\dots,0)} \star \partial^i E/\partial x_1^i\right) \star R = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant k_1 - 1. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat.

Références

[1] **H. Charrière,** *Une équations aux dérivées partielles avec petits dénominateurs,* (C. R. A. S. Paris T. **297** (1983)).

[2] **H. Charrière,** *Une équations aux dérivées partielles avec petits dénominateurs,* Colloque Franco-Japponais (1985), Vol. iii. p. 35–72. I. R. M. A. Strasbourg.

[3] **G. Bengel et R. Gérard,** *Formal and convergent solutions of sigula partial differential equations,* Manuscripta Math. **28**, 343–373 (1982).

[4] **J. Moser,** Ann. of Math. Studies, **77**, Priceton Univ. Press, 1973, p. 145.

[5] **R. Dautray et J. L. Lions,** *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techhiques,* T. I Masson.

[6] **H. Charrière,** *Transformé de Fourier et produit de convolution de bons opérateurs,* Proc. Japan Acad., **62** Ser. A (1986).

[7] **H. Charrière,** *Existence de bases opérateurs pour l'espace des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coéfficient constants,* Proc. Japan Acad. **63**A, (1987), 311–314 et ii, Proc. Japan Acad. **63**A, No. 9 (1987), 360–361.

I.R.M.A
10 rue du Général Zimmer
67080 Strasbourg (Alsace)
France.