

Seesaw dual pair とテータリフト

大阪市立大学大学院理学研究科 山名俊介

本稿は三章からなる。一章では, seesaw dual pair の定義, 例, その基本等式を解説する。Weil 表現や Howe 予想については, 松本久義先生の原稿でも解説されるけれど, 本稿でも記述した。二章では, seesaw dual pair の基本等式が Siegel-Weil 公式, L 函数の積分表示の理論, ダイコトミー現象などとともにどのように応用されるか基本的なアイデア解説した。三章では三つの例, 即ち, Rallis 内積公式, トーラス周期と L 函数の中心値, 三重積 L 函数の中心値に関する Jacquet 予想に二章の議論が応用され, 周期と L 函数の特殊値が関係するメカニズムが解説される。これら以外の様々な seesaw dual pair の基本等式に関しては, Kudla の論説 [19] などを参照されたい。最後に, 筆者に講演の機会を与えて下さった軍司圭一先生と成田宏秋先生に感謝を述べます。成田先生には本稿に目を通していただき, 多くの助言と訂正をいただきました。

1 Seesaw dual pair と seesaw 等式

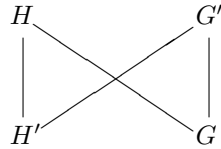
1.1 Seesaw dual pair の定義

F を局所体もしくは大域体とする。簡単のため, F の標数は 0 であるとする。シンプレクティック群 $\mathbb{G} = Sp_N$ の部分群の組 (G, H) は, G の \mathbb{G} での中心化群が H であり, H の \mathbb{G} での中心化群が G であるとき, dual pair と呼ぶのであった。

定義 1.1. \mathbb{G} の dual pair の組 $(G, H), (G', H')$ は $G' \supset G$ かつ $H \supset H'$ であるとき, seesaw dual pair と呼ばれる。

注意 1.2. (1) 定義 1.1 及び本章の議論は, dual pair を係数制限して得られる部分群の組 (weakly dual pair) に拡張できる。詳細は, Kudla の論説 [19] を参照。

(2) 良く知られているように, 名称の由来は下記の図式にある:



1.2 Seesaw dual pair の例

例 1 (直和分解型). $\langle , \rangle : W \times W \rightarrow F$ を F 上のベクトル空間 W 上の非退化交代形式, $(,) : V \times V \rightarrow F$ を F 上のベクトル空間 V 上の非退化対称形式とし, $O(V)$ を対応する直交群とする. テンソル積 $\llbracket , \rrbracket = (,) \otimes \langle , \rangle$ は, ベクトル空間 $\mathbb{W} = V \otimes_F W$ 上の交代形式を与え, $(Sp(W), O(V))$ は $Sp(\mathbb{W})$ の dual pair になる. W が互いに直交するシンプレクティック部分空間による分解 $W = W_1 + W_2$ を持てば, 下記の seesaw pair が得られる:

$$\begin{array}{ccc} Sp(W) & & O(V) \times O(V) \\ | & \searrow & | \\ Sp(W_1) \times Sp(W_2) & & O(V) \end{array}$$

一方, $V = V_1 + V_2$ を V の直交分解とすれば, 下記の seesaw pair が得られる:

$$\begin{array}{ccc} Sp(W) \times Sp(W) & & O(V) \\ | & \searrow & | \\ Sp(W) & & O(V_1) \times O(V_2) \end{array}$$

一般の分解 $W = W_1 + \dots + W_r$, $V = V_1 + \dots + V_s$ についても同様である. 二章で扱われる seesaw pair は全て直和分解型である.

例 2. K/F を二次拡大とし, σ を Galois 群 $\text{Gal}(E/F)$ の生成元とする. $(W^*, \langle , \rangle^*)$ を K 上の歪エルミート空間とし, $(V^*, (,)^*)$ を K 上のエルミート空間, $U(W^*)$ と $U(V^*)$ をそれぞれのユニタリ群とする. $\llbracket , \rrbracket^* = \text{Tr}_{K/F}((,)^* \otimes \langle , \rangle^*)$ は, ベクトル空間 $\mathbb{W}^* = V^* \otimes_K W^*$ 上の交代形式を与え, $(U(W^*), U(V^*))$ は $Sp(\mathbb{W}^*)$ の dual pair になる. F 上の二次形式付き空間 $(V, (,))$ が存在して, V^* がその σ -エルミートな拡張, すなわち,

$$V^* \simeq V \otimes_F K, \quad (x \otimes \alpha, y \otimes \beta)^* = \alpha^\sigma(x, y)\beta, \quad (x, y \in V, \alpha, \beta \in K)$$

であると仮定する. さらに $R = R_{K/F}$ を F への係数制限とし, F 上のシンプレクティックベクトル空間 $(R_{K/F}W^*, \text{Tr}_{K/F}\langle , \rangle^*)$ を考える. このとき, \mathbb{W}^* は $V \otimes_F R_{K/F}W^*$ とシンプレクティックベクトル空間として同型であるから, 以下の seesaw pair が得られる:

$$\begin{array}{ccc} U(V^*) & & Sp(R_{K/F}W^*) \\ | & \searrow & | \\ O(V) & & U(W^*) \end{array}$$

例 3. U_1 と U_2 を F 上のベクトル空間とし, U_1^* と U_2^* をそれぞれの双対空間とする. 自然なペアリング $U_1 \otimes U_2^* \times U_1^* \otimes U_2 \rightarrow F$ を $\widetilde{W} = U_1 \otimes U_2^* + U_1^* \otimes U_2$ の交代形式に拡張すれば, $(GL(U_1), GL(U_2))$ は $Sp(\widetilde{W})$ の dual pair になる. 例 1 のシ

シンプレクティックベクトル空間 $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の polarization を選べば, 同型 $V \simeq V^*$, $W' \simeq (W'')^*$ がそれぞれ $(\cdot, \cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle$ により定まり,

$$\mathbb{W} \simeq V \otimes W' + V \otimes W'' \simeq V \otimes (W'')^* + V^* \otimes W''$$

であるから, 以下の seesaw pair が得られる:

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & & Sp(W) \\ | & \searrow & | \\ O(V) & & GL(W'') \end{array}$$

1.3 局所テータ対応

F を局所体とし, 自明でない F の指標 ψ を固定する. G が \mathbb{G} の部分群であるとき, \tilde{G} は \mathbb{G} のメタプレクティック被覆 $\tilde{\mathbb{G}} = \text{Mp}_N$ での G の逆像を表すことにする. (G, H) が \mathbb{G} の dual pair であるとき, Weil 表現 ω_ψ の $\tilde{G} \times \tilde{H}$ に引き戻しを考える. \tilde{G} の (genuine) 既約許容表現 π に対して, $\omega_\psi[\pi] = \omega_\psi / \cap_f \ker f$ とおく. ここで, f は全ての 0 でない G 同変写像 $\omega_\psi \rightarrow \pi$ を渡る. \tilde{G} と \tilde{H} は可換であるから, \tilde{H} の滑らか (genuine) 表現 $\Theta_\psi(\pi)$ が存在して, $\omega_\psi[\pi] \simeq \pi \boxtimes \Theta_\psi(\pi)$ となる. 以下では, ψ はしばしば省略される.

予想 1.3 (局所 Howe 予想). $\Theta(\pi)$ は, もし 0 でなければ, 唯一つの既約商 $\theta_\psi(\pi)$ を持つ.

対応 $\pi \mapsto \theta_\psi(\pi)$ はテータ対応と呼ばれる.

注意 1.4. (1) 局所 Howe 予想はほとんど全ての場合に証明されている. 剰余標数が 2 でない非アルキメデス体の場合の証明は [37] を参照. F がアルキメデス体の場合の証明は [12] を参照. 本稿では簡単のために, 局所 Howe 予想をしばしば仮定する.

(2) (G, H) がシンプレクティック群と奇数次直交群の dual pair でなければ, 被覆 $\text{Mp}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ は G と H 上分裂することが知られている (証明は [25, 20] 参照). $\text{Mp}(W)$ は奇数次直交群上分裂するが, シンプレクティック群上は分裂しない. 一般に分裂は一意的ではない. 分裂の具体的構成が Kudla [20] に与えられている.

簡単のため以下では, 分裂 $G \times H \rightarrow \text{Mp}(W)$ があるとする. 適当な分裂を固定し, \tilde{G} (もしくは \tilde{H}) の genuine な表現と G (もしくは H) の表現を同一視すれば, Howe 対応は G の表現と H の表現の間の対応を与える.

命題 1.5 (局所 seesaw 等式). $(G, H), (G', H')$ を seesaw dual pair, π を G の既約表現, σ を H' の既約表現とすると, 以下の同型が成り立つ:

$$\text{Hom}_G(\Theta(\sigma), \pi) \simeq \text{Hom}_{H'}(\Theta(\pi), \sigma).$$

Proof.

$$\mathrm{Hom}_{G \times H'}(\omega, \pi \boxtimes \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{G \times H'}(\pi \boxtimes \Theta(\pi), \pi \boxtimes \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{H'}(\Theta(\pi), \sigma).$$

同様に,

$$\mathrm{Hom}_{G \times H'}(\omega, \pi \boxtimes \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_G(\Theta(\sigma), \pi)$$

も成り立つ. □

1.4 大域テータ対応

F を代数体, \mathbb{A} をそのアデルル, ψ を \mathbb{A}/F の非自明な指標とする. $\tilde{G}_{\mathbb{A}}$ を $G = Sp(\mathbb{W})$ アデルル群 $G(\mathbb{A})$ のメタプレクティブ被覆とし, (ω_{ψ}, S) を $\tilde{G}_{\mathbb{A}}$ の Weil 表現とする. (G, H) を G の dual pair とする. (π, V_{π}) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現であるとする. π_v と $\theta_{\psi_v}(\pi_v)$ は殆ど全ての素点で不分岐であり, 制限テンソル積 $\otimes_v \theta_{\psi_v}(\pi_v)$ を考えることができる.

予想 1.6 (大域 Howe 予想). $\otimes_v \theta_{\psi_v}(\pi_v)$ は $H(\mathbb{A})$ の保型表現である.

この予想には微妙な反例が早くから知られているし, 正確な予想を定式化できるだけの研究結果もまだない. \mathbb{W} の polarization $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ を固定すれば, Schwartz 空間 $S(\mathbb{X}(F_v))$ 上に Weil 表現は実現でき, Weil 表現の Schrödinger 模型と呼ばれる. K_v を $G(F_v)$ の適当な極大コンパクト部分群とし, K'_v を $H(F_v)$ の極大コンパクト部分群とする. v がアルキメデス素点であるとき, \mathfrak{g}_v を $G(F_v)$ のリー環の複素化とし, \mathfrak{h}_v を $H(F_v)$ のリー環の複素化とすると, Schwartz 空間 $S(\mathbb{X}(F_v))$ の $K_v \times K'_v$ の作用に関して有限元からなる部分空間 $S(\mathbb{X}(F_v))$ は $(\mathfrak{g}_v, K_v) \times (\mathfrak{h}_v, K'_v)$ -加群である (実は適当な Fock 空間と一致する). v が非アルキメデス素点であるとき, $S(\mathbb{X}(F_v)) = S(\mathbb{X}(F_v))$ とおき, $S(\mathbb{X}(\mathbb{A})) = \otimes_v S(\mathbb{X}(F_v))$ とする. 被覆 $\tilde{G}_{\mathbb{A}} \rightarrow G(\mathbb{A})$ は唯一の分裂 $G(F) \rightarrow \tilde{G}_{\mathbb{A}}$ を持ち, 任意の Schwartz 関数 $\phi \in S(\mathbb{X}(\mathbb{A}))$ に対して, テータ函数

$$\Theta(\phi)(g) = \sum_{x \in \mathbb{X}(F)} (\omega_{\psi}(g)\phi)(x)$$

は任意の $g \in \tilde{G}_{\mathbb{A}}$ 及び $\gamma \in G(F)$ に対して, $\Theta(\phi)(\gamma g) = \Theta(\phi)(g)$ を満足する (むしろ分裂はこの性質から決定される). 任意の $\xi \in V_{\pi}$ に対して

$$\theta_{\phi}(\xi)(h) = \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} \overline{\xi(g)} \Theta(\phi)(g, h) dg$$

は $H(\mathbb{A})$ 上の保型形式になる. $H(\mathbb{A})$ の作用で不変なベクトル空間

$$\theta_{\psi}(\pi) = \{\theta_{\phi}(\xi) \mid \phi \in S(X(\mathbb{A})), \xi \in V_{\pi}\}$$

を保型表現 π の群 H へのテータリフトと呼ぶ. $\theta_{\psi}(\pi)$ は, 0 でないとき, $\otimes_v \theta_{\psi_v}(\pi_v)$ を (少なくとも既約商として) 実現し, 大域 Howe 予想を確かめることができる. しかし, $\theta_{\psi}(\pi)$ の非消滅の判定は微妙な問題である.

ξ_1, ξ_2 が $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式であり、少なくとも一方が尖点形式であるとき、内積 $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G$ を以下のように定義する。

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G = \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} \xi_1(g) \overline{\xi_2(g)} dg.$$

次の等式は単なる積分の順序交換から得られる。

命題 1.7 (大域 seesaw 等式). $(G, H), (G', H')$ を *seesaw dual pair*, (π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現, (σ, V_σ) を $H'(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とすると、尖点形式の組 $(\xi, \xi') \in V_\pi \times V_\sigma$ と $\phi \in S(\mathbb{X}(\mathbb{A}))$ に対して、以下の等式が成り立つ:

$$\langle \theta_\phi(\xi), \xi' \rangle_{H'} = \langle \theta_\phi(\xi'), \xi \rangle_G.$$

注意 1.8. (1) $\theta_\phi(\xi)$ と $\theta_\phi(\xi')$ はそれぞれ $H'(\mathbb{A})$ と $G(\mathbb{A})$ に制限されている。核関数 $\Theta(\phi)(g, h)$ と $\Theta(\phi)(g', h')$ は共通の制限 $\Theta(\phi)(g, h')$ を持つけれども、関数 $\Theta(\phi)(g', h)$ は存在しない。この事実が、形式的に導かれる命題 1.7 の等式から様々な興味深い等式が得られる理由と考えられる。

(2) 応用上は、命題 1.7 を ξ あるいは ξ' が尖点的でない保型形式である場合に適用しなければならないことが多い。詳しくは、三章の例を参照。

2 seesaw machine

2.1 Siegel-Weil 公式

Siegel-Weil 公式とは、テータ函数のある種の積分と Eisenstein 級数の間の等式であり、両辺が絶対収束する領域で、Siegel [36] により証明され、Weil [39] により全ての古典群に一般化された。この等式は絶対収束域の外に、Kudla と Rallis[22] により拡張され、regularized Siegel-Weil 公式と呼ばれている。本稿で扱う seesaw 等式は全て、この regularized Siegel-Weil 公式と結びつけて応用されるので、その解説を手短にする。詳しくは、[22] や [40, 41] を参照。

$G = Sp_{2n}, H = O(V), m = \dim V$ が偶数の場合を考える。まず F を局所体とする。 (G, H) を \mathbb{G} の dual pair とする。適当に固定した分裂 $G \times H \rightarrow \mathrm{Mp}(W)$ により \mathbb{G} の Weil 表現 ω を引き戻して、 $G \times H$ の表現が得られる。 $\mathbb{X} = V^n$ とすると、Schrödinger 模型 $S(V^n)$ への $O(V)$ の作用は、線形作用 $\omega(h)\phi(x) = \phi(h^{-1}x)$ により定められる。 V の判別式から定まる F の二次指標を χ_V と書く。 G のジージェル放物型部分群 P の作用は

$$\begin{aligned} \omega\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}_t a^{-1} \end{pmatrix}\right)\Phi(x) &= \chi_V(\det a) |\det a|^{m/2} \Phi(xa), & a \in \mathrm{GL}_n(F), \\ \omega\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(x) &= \psi(\mathrm{tr}(b(x, x))/2)\Phi(x), & b \in \mathrm{Sym}_n(F) \end{aligned}$$

により与えられる。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in V^n$ に対して、 $(x, x) = \frac{1}{2}((x_i, x_j)) \in \mathrm{Sym}_n(F)$ と書いた。

$$\begin{aligned} I(s) &= \mathrm{Ind}_P^G((\chi_V | \cdot|^s) \circ \det) \\ &= \left\{ f^{(s)} : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f^{(s)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & {}_t a^{-1} \end{pmatrix} g\right) = \chi_V(\det a) |\det a|^{s+(n+1)/2} f^{(s)}(g) \right\}, \end{aligned}$$

$s_0 = (m - n - 1)/2$ とおけば, G -同変, H -不変な写像

$$S(V^n) \rightarrow I(s_0), \quad \Phi \mapsto f_\Phi^{(s_0)}(g) = (\omega(g)\Phi)(0)$$

が得られる. Rallis の定理 [30, 25] より, この写像の像は, H の自明表現の G へのテータリフト $\Theta_\psi(\mathbb{1})$ と同一視できる. $G = O(n, n)$, $H = Sp_{2j}$ のときにも, 同様の写像と退化主系列表現 $I(s)$ の部分表現が得られる.

以下, F を代数体, V を F 上の二次形式付き空間とする. 上の議論により $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, $G(\mathbb{A})$ の誘導表現 $I(s)$ の切断 $f_\Phi^{(s)}$ が $f_\Phi^{(s_0)} = \otimes_v f_{\Phi_v}^{(s_0)}$ を拡張して得られる. 任意の $I(s)$ の切断 $f^{(s)}$ に対して, アイゼンシュタイン級数

$$E(f^{(s)})(g) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} f^{(s)}(\gamma g)$$

が構成される. Langlands の理論 (cf. [2]) より, $E(f^{(s)})$ は全平面に有理型に解析接続され, 函数等式 $E(f^{(s)}) = E(M(s)f^{(s)})$ を満たす. ここで, 絡作用素 $M(s) : I(s) \rightarrow I(-s)$ は, N を P のべき単根基, $w \in G(F)$ を適当な Weyl 元として, 積分

$$M(s)f^{(s)}(g) = \int_{N(F) \backslash N(\mathbb{A})} f^{(s)}(wug) du$$

により定義される. 一方, テータ函数の積分

$$\theta_\phi(1)(g) = \int_{H(F) \backslash H(\mathbb{A})} \Theta(\phi)(g, h) dh$$

は H の自明表現 $\mathbb{1}$ のテータリフトと考えられる. $\mathbb{1}$ は一般に尖点的ではないので, この積分が収束する保証はない (後で扱う全ての例で発散する).

定理 2.1 (Siegel-Weil 公式). 適当な条件の下, 任意の $\phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して

$$E(f_\phi^{(s)})|_{s=s_0} = \theta_\phi(1).$$

注意 2.2. (1) 左辺はアイゼンシュタイン級数の有理型解析接続であり, 適切な条件下で臨界点 s_0 で正則である. 右辺のテータ積分は Weil の収束条件 [39, Proposition 8] が満たされない場合は, regularize する必要がある.

(2) 他の古典群の場合の類似の等式については, [14, 40, 41] を参照.

練習問題 2.3. (1) $F = \mathbb{Q}$, $(,)$ が正定値, $L \subset V(F)$ を極大偶整数格子でユニモジュラー (従って, m は 8 の倍数) であるとす. $\{L_j\}$ を L の種の中の類の代表系, $\epsilon(L_j) = \#O(V) \cap \text{GL}(L_j)$,

$$\theta_{L_j}(Z) = \sum_{x \in L_j^n} e^{\pi \sqrt{-1} \text{tr}((x, x)Z)}, \quad Z \in \text{Sym}_n(\mathbb{C}), \quad \Im Z > 0$$

とするとき,

$$E_{m/2}(Z) = \frac{\sum_j \epsilon(L_j)^{-1} \theta_{L_j}(Z)}{\sum_j \epsilon(L_j)^{-1}}$$

を定理 2.1 から導け (ヒント: $\phi_\infty = e^{-\pi \text{tr}((x,x)}$, ϕ^∞ を $L \otimes \hat{Z}$ の定義関数, $\phi = \phi_\infty \otimes \phi^\infty$ において, 定理 2.1 の等式の両辺を計算すればよい).

- (2) (1) の両辺の Fourier 係数を計算して (軍司先生原稿あるいは [34, 35] 参照), Siegel 公式を導け.

2.2 仮定 1: 基本等式

H' が H の部分群であるとき, $H(\mathbb{A})$ の保型形式 f の H' 周期を

$$\mathcal{P}_{H'}(f) = \int_{H'(F) \backslash H'(\mathbb{A})} f(h) dh$$

により定義する. f が 0 でないことを証明する一つの方法は, $\mathcal{P}_{H'}(f) \neq 0$ を証明することである. $H(\mathbb{A})$ の保型表現 (π, V_π) は, ある $f \in V_\pi$ が存在して $\mathcal{P}_{H'}(f) \neq 0$ であるとき, H' により区別されると言い, $\mathcal{P}_{H'}(\pi) \neq 0$ と書く. 特別なクラスの H と H' に対して, H' 周期が保型 L 函数の特殊値と密接に関係することがある. 本章では, seesaw pair の観点からそのような現象をやや公理的に議論してみたい. 後の具体例に適用できるように詳しい設定は明かさず, 収束などの問題も論じない.

(π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現, (π^\vee, V_{π^\vee}) を π の反傾表現とする. $V_{\pi^\vee} = \overline{V_\pi}$ と取ることができることに注意する. 以下の seesaw 図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \theta_\phi(\xi) & H & G' \theta_\phi(1) = E(f_\phi^{(s)})|_{s=s_0} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{1} & H' & G \xi \in V_\pi \end{array}$$

大域 seesaw 等式を適用すれば, Siegel-Weil 公式より

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{H'}(\theta_\phi(\xi)) &= \langle \theta_\phi(\xi), 1 \rangle_{H'} \\ &= \overline{\langle \xi, E(f_\phi^{(s)}) \rangle_G |_{s=s_0}} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} \overline{\xi(g)} E(f_\phi^{(s)})(g) dg \end{aligned}$$

が得られる. π のテータリフトの周期の研究は, Rankin-Selberg 型のゼータ積分

$$Z(\xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} \xi^\vee(g) E(f^{(s)})(g) dg \quad (\xi^\vee \in V_{\pi^\vee}, f^{(s)} \in I(s))$$

の特殊値の研究に帰着される.

2.3 仮定 2: 積分表示の理論

Eisenstein 級数の理論より, ゼータ積分 $Z(\xi^\vee, f^{(s)})$ は $E(f^{(s)})$ が正則である開部分集合上収束し, 全平面上の有理型函数を定め, 函数等式

$$Z(\xi^\vee, f^{(s)}) = Z(\xi^\vee, M(s)f^{(s)})$$

を満たす. 更に以下を仮定する.

(1) 純テンソル $\xi = \otimes_v \xi_v$ と $f^{(s)} = \otimes_v f_v^{(s)}$ に対して, 以下の Euler 積を持つ:

$$Z(\xi^\vee, f^{(s)}) = \prod_v Z_v(\xi_v^\vee, f_v^{(s)}).$$

(2) 不分岐データ $\xi_{0,v}^\vee, f_{0,v}^{(s)}$ のゼータ積分は, ある L 群の表現 $r : {}^L G \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ に対して, π_v の Langlands の L 因子を与える:

$$Z_v(\xi_{0,v}^\vee, f_{0,v}^{(s)}) = L(s + 1/2, \pi_v, r).$$

(3) 任意の F の素点 v , 任意の $G(F_v)$ の既約許容表現 π_v に対して, 局所ゼータ積分は全平面に有理型解析接続を持ち, ある有理型函数 $\Gamma(s, \pi_v, \psi_v)$ が存在して, 局所函数等式

$$Z_v(\xi_v^\vee, f^{(s)}) = \Gamma(s + \frac{1}{2}, \pi_v, \psi_v) Z_v(\xi_v^\vee, M_v(s) f^{(s)}) \quad (\xi_v^\vee \in \pi_v^\vee, f_v^{(s)} \in I_v(s))$$

を満たす. ここで, $M_v(s) : I_v(s) \rightarrow I_v(-s)$ は $M(s)$ と類似の絡作用素.

通常は簡単な Euler 因子による修正項が (2) に混入するが, 以下では省く. 以上の仮定により, 悪い素点の集合 S に関して,

$$Z(\xi, f^{(s)}) = L^S(s + \frac{1}{2}, \pi, r) \prod_v Z_v(\xi_v, f_v^{(s)})$$

が成り立つ ($Z(\xi, f^{(s)})$ の函数等式は s と $-s$ を結び付けるが, $L^S(s, \pi, r)$ の函数等式は s と $1-s$ を結びつけることに注意する). ゼータ積分の解析を L 函数の解析に帰着させるには, 悪い素点でのゼータ積分を制御する必要がある. このためには, 部分 L 函数では上手くいかないのが, 悪い素点での L 因子を定義して, 完全 L 函数を考える必要がある.

2.4 仮定 3: L 因子, ε 因子, γ 因子

暫く F の素点 v を固定し, subscript v を省く. すなわち, $F = F_v, G = G(F_v), I(s) = I_v(s), \pi$ を G の既約許容表現とする. 絡作用素 $M(s)$ の正規化 $M^\dagger(s)$ を適当に定義し, γ 因子を函数等式の比例因子として定義する. すなわち,

$$Z(\xi^\vee, M^\dagger(s) f^{(s)}) = \gamma(s + \frac{1}{2}, \pi, \psi) Z(\xi^\vee, f^{(s)}).$$

γ 因子の特徴付けは比較的容易である (正規化を上手く定義して, 必要な条件を全て満たすことを証明するのは容易ではないが). 例えば, π が誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の部分表現である時の関係式 $\gamma(s, \pi, \psi) = \gamma(s, \sigma, \psi)$ などのいくつかの性質により一意に決定される (Shahidi の理論 [33] や Lapid と Rallis [24] の “Ten commandments” を参照). しかし, L 因子と ε 因子を定義する問題はより微妙である. K -有限な函数 $f^{(s)} : G' \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は s に関して正則かつ任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $f^{(s)} \in I(s)$ であるとき, $I(s)$ の正則切断と呼ばれる. $I(s)$ の切断 $f^{(s)}$ は正則切断 $f_1^{(s)}$ と $f_2^{(s)}$ が存在して, $f^{(s)} = f_1^{(s)} + M^\dagger(-s) f_2^{(-s)}$ と書けるとき, 良い切断と呼ばれる. 以下の良い切断の特徴付けも知られている:

命題 2.4 ([11, 42]). 以下の条件は同値.

- $f^{(s)}$ は良い切断.
- $f^{(s)}$ は $\Re s \geq 0$ で正則かつ $M^\dagger(s)f^{(s)}$ は $\Re s < 0$ で正則.

Tate の L 因子の積を局所 Euler 因子と呼ぶことにして, 以下を仮定する:

- (1) π が既約であるとき, 局所 Euler 因子 $L(s, \pi)$ と単函数 $\varepsilon(s, \pi, \psi)$ が存在して, 以下の性質を満たす.
 - 任意の $\xi^\vee \in \pi^\vee$ と任意の良い切断 $f^{(s)}$ に対して, $Z(\xi^\vee, f^{(s)})/L(s + 1/2, \pi)$ は整函数.
 - 任意の $s' \in \mathbb{C}$ に対して, ある $\xi^\vee \in \pi^\vee$ とある良い切断 $f^{(s')}$ が存在して, $Z(\xi^\vee, f^{(s')})/L(s + 1/2, \pi)|_{s=s'} \neq 0$.
 - 任意の $\xi^\vee \in \pi^\vee$ と切断 $f^{(s)}$ に対して次の函数等式が成り立つ:

$$\frac{Z(\xi^\vee, M^\dagger(s)f^{(s)})}{L(\frac{1}{2} - s, \pi^\vee)} = \varepsilon(s + \frac{1}{2}, \pi, \psi) \frac{Z(\xi^\vee, f^{(s)})}{L(s + \frac{1}{2}, \pi)}.$$

- (2) π が不分岐であるとき, $L(s, \pi) = L(s, \pi, r)$. さらに ψ も不分岐ならば, $\varepsilon(s, \pi) = 1$.
- (3) 正規化されたゼータ積分を次のように定義する:

$$Z^*(\xi^\vee, f^{(s)}) = Z(\xi^\vee, f^{(s)})/L(s + 1/2, \pi).$$

任意の実部が非負の複素数 s' に対して, 射 $Z^*(s') : (\xi^\vee, f^{(s')}) \mapsto Z^*(\xi^\vee, f^{(s')})$ は 0 でない

$$\text{Hom}_G(\pi^\vee \otimes I(s'), \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}_G(I(s'), \pi)$$

の 0 でない元を定める.

注意 2.5. (1) 次の関係式は基本的である:

$$\varepsilon(s, \pi, \psi) = \gamma(s, \pi, \psi) \frac{L(s, \pi)}{L(1 - s, \pi^\vee)}.$$

- (2) 仮定 3(2) を帰結するには仮定 2(2) だけでは不十分であることに注意する.
- (3) 定義より局所ゼータ積分の族と L 因子の解析的性質は一致する. 従って, 保型 L 函数の解析的性質の解析がゼータ積分の解析に帰着される.
- (4) 稠密な s に関して, $\dim \text{Hom}_G(\pi^\vee \otimes I(s'), \mathbb{C}) \leq 1$ を証明すれば, 仮定 2(3) が導かれる. 詳しくは, [27] の Part B, §12 の Bernstein の原理を参照.
再び F を代数体, π を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, L 函数と ε 函数を

$$L(s, \pi) = \prod_v L(s, \pi_v), \quad \varepsilon(s, \pi) = \prod_v \varepsilon(s, \pi_v, \psi_v)$$

により定義する. s の実部が十分大きいとき, 無限積 $L(s, \pi)$ は絶対収束する. $\varepsilon(s, \pi)$ は実質的に有限積であり, ψ の取り方によらない. さらに, 仮定より $L(s, \pi)$ は全平面上の有理型函数に解析接続され, 函数等式 $L(s, \pi) = \varepsilon(s, \pi)L(1 - s, \pi)$ を満たし, $L(s, \pi)$ の極の集合は $E(f^{(s)})$ の極の集合に含まれる.

2.5 仮定 4: ダイコトミー

簡単のために以下では, $s_0 = 0$ とする. 今までの議論より, $\xi^\vee = \otimes_v \xi_v^\vee \in \pi^\vee$ と $\phi = \otimes_v \phi_v \in S(\mathbb{X}(\mathbb{A}))$ に対して,

$$\mathcal{P}_{H'}(\theta_\phi(\xi)) = L(1/2, \pi) \prod_v Z_v^*(\xi_v^\vee, f_{\phi_v}^{(0)}).$$

$\theta(\pi)$ が H' により区別されるためには, 以下の二条件が必要かつ十分である:

- (大域的条件) $L(1/2, \pi) \neq 0$;
- (局所的条件) 任意の v に対して, $Z_v^*(0)|_{\Theta_v(\mathbf{1})} \neq 0$.

有用な判定条件を得るためには, 局所的条件を上手く解釈する必要がある. 局所 seesaw 等式より

$$Z_v^*(0)|_{\Theta_v(\mathbf{1})} \in \text{Hom}_G(\Theta_v(\mathbf{1}), \pi_v) \simeq \text{Hom}_{H'}(\Theta_v(\pi_v), \mathbb{C}),$$

であるから, 局所的条件より $\text{Hom}_{H'}(\Theta_v(\pi_v), \mathbb{C}) \neq 0$ が従うことが分かる. この逆が成り立つ場合を見るために, 次の二つの図式の存在を仮定する:

$$\begin{array}{ccc} H_+ & & G' \\ | & \searrow & | \\ H'_+ & & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_- & & G' \\ | & \searrow & | \\ H'_- & & G \end{array}$$

(H'_+, H_+) と (H'_-, H_-) は内部形式である. $\epsilon = \pm$ に対して, $H'_\epsilon(F_v)$ の表現 π の $G'(F_v)$ へのテータリフトを $\Theta_v^\epsilon(\pi)$ と書くと, 多くの場合に

$$I_v(0) = \Theta_v^+(\mathbf{1}) \oplus \Theta_v^-(\mathbf{1}) \tag{2.1}$$

が成り立つ. 故に

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_G(I_v(0), \pi) &= \dim \text{Hom}_G(\Theta_v^+(\mathbf{1}), \pi) + \dim \text{Hom}_G(\Theta_v^-(\mathbf{1}), \pi) \\ &= \dim \text{Hom}_{H'_+}(\Theta_v^+(\pi), \mathbb{C}) + \dim \text{Hom}_{H'_-}(\Theta_v^-(\pi), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

$\text{Hom}_{H'_+}(\Theta_v^+(\pi), \mathbb{C})$ か $\text{Hom}_{H'_-}(\Theta_v^-(\pi), \mathbb{C})$ のどちらか一方だけが 0 でないとき, このような現象はダイコトミーと呼ばれる.

2.6 Gross-Prasad 的結論

以上の仮定の下, 次の結果が証明される:

定理 2.6. π を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする.

(1) 以下の条件は同値である:

- $\mathcal{P}_{H'}(\theta(\pi)) \neq 0$;

- $L(1/2, \pi) \neq 0$ かつ全ての素点 v で $\text{Hom}_G(\Theta(\pi_v), \mathbb{C}) \neq 0$.

(2) さらに, 以下の条件も同値である:

- ある内部形式 H_0 と H'_0 が存在して, π の H_0 へのテータリフトは H'_0 により区別される;
- $L(1/2, \pi) \neq 0$.

Proof. $Z_v^*(0)|_{\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})} \in \text{Hom}_{H'_\epsilon}(\Theta_v^\epsilon(\pi))$ より,

$$Z_v^*(0)|_{\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})} \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{H'_\epsilon}(\Theta_v^\epsilon(\pi), \mathbb{C}) \neq 0.$$

一方, (2.1) より $Z_v^*(0)|_{\Theta_v^+(\mathbf{1})} \neq 0$ または $Z_v^*(0)|_{\Theta_v^-(\mathbf{1})} \neq 0$ であるから, ダイコトミーより逆も成立する. 従って, (1) はこれまでの議論より明らかである.

(2.1) より直和分解

$$I(0) = R^+ \oplus R^-, \quad R^\epsilon = \bigoplus_{(\epsilon_v)_v: \prod_v \epsilon_v = \epsilon} \Theta_v^{\epsilon_v}(\mathbf{1}).$$

が成り立つことが分かる. 絡作用素 $M(s)$ は $s = 0$ で R^- に -1 倍で作用するので (cf. 注意 2.7(2)), R^- は Eisenstein 級数の中心値に寄与せず, ゼータ積分の中心値にも寄与しない. H' の F 上の内部形式 H'_i の自明表現の G' へのテータリフトを $\Theta_{H'_i}(\mathbf{1})$ と書くと, Minkowski-Hasse の定理 (或いはその類似) により, $R^+ = \bigoplus_{H'_i} \Theta_{H'_i}(\mathbf{1})$ が成り立つ. L 函数の定義より

$$L(1/2, \pi) = \sum_i Z(\bar{\xi}_i, f_i^{(s)})|_{s=0} = \sum_i Z(\bar{\xi}_i, f_{\phi_i}^{(s)})|_{s=0} = \mathcal{P}_{H'_i}(\theta_{\phi_i}(\xi_i)).$$

従ってある i が存在して $\mathcal{P}_{H'_i}(\theta_{\phi_i}(\xi_i)) \neq 0$. これが証明したいことであった. \square

注意 2.7. (1) $\theta(\pi)$ が H' により区別されるためには, $\text{Hom}_{H'(\mathbb{A})}(\Theta(\pi), \mathbb{C}) \neq 0$ が必要である. 故に全ての F の素点 v で $\text{Hom}_{H'(F_v)}(\Theta_v(\pi_v), \mathbb{C}) \neq 0$ であることが必要である.

- (2) 正規化された絡作用素 $M_v^\dagger(s)$ は $s = 0$ で, $\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})$ に恒等写像もしくは -1 倍で作用し, 次の同値が容易に分かる:

$$\text{Hom}_{H'_\epsilon}(\Theta_v^\epsilon(\pi), \mathbb{C}) \neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon(1/2, \pi, \psi_v) = M^\dagger(0)|_{\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})}.$$

従って, $\text{Hom}_{H'_\epsilon}(\Theta_v^\epsilon(\pi), \mathbb{C}) \neq 0$ を満たす符合 ϵ はルート数 $\varepsilon(1/2, \pi, \psi_v)$ により特定できる. この現象はイプシロンダイコトミーと呼ばれる.

- (3) L 函数の微分には, R^- から来る Eisenstein 級数も寄与する. このような Eisenstein 級数は, 本稿のテータリフトの幾何的な類似物と考えられる算術的テータリフトなどのより深い現象と関わりがある. 興味ある読者は [23] などを参照.

3 seesaw machine の応用

3.1 例 1: doubling seesaw と Rallis 内積公式

doubling 法は全ての古典群に適用可能だが、簡単のために本稿では、奇数次直交群の場合だけを記述する。\$F\$ を代数体、\$(V, (\cdot, \cdot))\$ を \$n\$ 次元二次形式付きベクトル空間とし、

$$V^\square = V \oplus V, \quad V_1 = V \oplus \{0\}, \quad V_2 = \{0\} \oplus V$$

とおく。二次形式 \$(\cdot, \cdot)^\square : V^\square \times V^\square \to F\$ を次のように定義する:

$$(x + y, x' + y')^\square = (x, x') - (y, y') \quad (x, x' \in V_1, y, y' \in V_2).$$

\$G = O(V)\$ と \$G^\square = O(V^\square)\$ をそれぞれ \$V\$ と \$V^\square\$ の直交群とする。

\$G(\mathbb{A})\$ の既約尖点的保型表現 \$\pi\$ の \$Sp_{2j}\$ へのテータリフトを \$\theta_j(\pi)\$ と書く。以下の結果が知られている:

定理 3.1 (Rallis [30]). (1) \$j \geq n\$ ならば、\$\theta_j(\pi) \neq 0\$.

(2) \$\theta_j(\pi) \neq 0\$ ならば、任意の \$j' \geq j\$ に対して、\$\theta_{j'}(\pi) \neq 0\$.

(3) \$j_0\$ を \$\theta_{j_0}(\pi)\$ が消えない最小の非負整数であるとき、\$\theta_{j_0}(\pi)\$ は既約尖点的保型表現である。

以下では、\$j = (n - 1)/2\$ の場合を考え、\$H = Sp_{n-1}\$、\$\tilde{H} = Mp_{n-1}\$、\$\theta(\pi) = \theta_{n-1}(\pi)\$ とおき、次の seesaw 図形を考える。

$$\begin{array}{ccc} Sp(W) \times Sp(W) & & G^\square \\ | & \searrow & | \\ Sp(W) & & G \times G \end{array}$$

Weil 表現 \$\omega_\psi\$ の \$G \times \tilde{H}\$ への標準的な分裂に関する引き戻しを \$\omega_{\psi, V}\$ と書く (これは二次形式 \$(\cdot, \cdot)\$ に依存する)。\$a \in F^\times\$ に対して、\$\psi_a(x) = \psi(ax)\$、\$aV = (V, a(\cdot, \cdot))\$ とおく。\$c_a \in GSp_{2n(n-1)}\$ が similitude 因子 \$a\$ を持つとき、

$$\omega_{\psi_a, V} \simeq \omega_{\psi, aV} \simeq \omega_{\psi, V}^{c_a}$$

である。下記の seesaw machine

$$\begin{array}{ccc} \theta_{\phi_1}(\xi_1) \overline{\theta_{\phi_2}(\xi_2)} Sp(W) \times Sp(W) & & G^\square E(f_{\sigma(\phi_1 \otimes \bar{\phi}_2)}^{(s)})|_{s=0} \\ | & \searrow & | \\ \mathbb{1} Sp(W) & & G \times G \quad \xi_1 \in V_\pi, \bar{\xi}_2 \in \bar{V}_\pi \end{array}$$

から (\$\sigma\$ は適当な部分 Fourier 変換)、内積 \$\langle \theta_\phi(\xi), \theta_\phi(\xi) \rangle_H\$ を形式的に計算すると、

$$\langle \theta_\phi(\xi), \theta_\phi(\xi) \rangle_H = Z(\xi \boxtimes \bar{\xi}, f_{\sigma(\phi \otimes \bar{\phi})}^{(s)})|_{s=0}.$$

ここで, $\xi \in V_\pi, \xi^\vee \in V_{\pi^\vee}, I(s)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, 次の積分を考えた:

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(F) \times G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})} \xi(g) \xi^\vee(g') E((g, g'); f^{(s)}) dg_1 dg_2.$$

以上の議論を正当化するためには, 積分の順序の入れ替えやジーゲル・ヴェイユ公式の Eisenstein 級数の収束域の外への拡張をする必要がある. 興味ある読者は, Kudla と Rallis による論文 [22], Wee Teck Gan と武田氏の論文 [6] あるいは筆者の論文 [40, 41] を参照されたい. 直交群の場合には, 以下のように Wee Teck Gan と武田氏により全ての場合に内積公式が拡張されている (他の群では, ある種の場合にはジーゲル・ヴェイユ公式の拡張は知られていない):

V の特殊直交群の L 群は, n が奇数のとき, $Sp(n-1, \mathbb{C}) \times \text{Gal}(\overline{F}/F)$, n が偶数のとき, $SO(n, \mathbb{C}) \rtimes \text{Gal}(\overline{F}/F)$ である. n が偶数かつ V の判別式体 E が F と異なるとき, $\epsilon = \text{diag}[1, 1, \dots, 1, -1] \in O(n, \mathbb{C}) \setminus SO(n, \mathbb{C})$ とすれば, ガロア群の作用は $\text{Gal}(E/F)$ を経由して, $g \mapsto \epsilon g \epsilon^{-1}$ により与えられる. それ以外の場合の作用は自明である. n が奇数のとき, $N = n-1$, n が偶数のとき, $N = n$ として, $\text{std} : {}^L G \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{C})$ を標準的な準同型として, 標準 L 函数を考える.

注意 3.2. (1) 非連結群 G の L 群は定義されていないことに注意する. Adams [1] によると, G の L 群は n が奇数のとき, $Sp(n-1, \mathbb{C}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Gal}(\overline{F}/F)$, n が偶数のとき, $O(n, \mathbb{C}) \rtimes \text{Gal}(\overline{F}/F)$ とするのが良いそうである.

(2) 同様の構成が $(,) = 0, G = GL(V)$ の場合にも適用できるが, 得られる L 函数は Godement-Jacquet の L 函数 (定義は [7] 参照) と異なる.

$P = \{g \in G^\square \mid V^\Delta g = V^\Delta\}$ を G^\square のジーゲル放物型部分群とする. 有限 coset 分解 $G^\square(F) = \prod_i P(F) \gamma_i(G(F) \times G(F))$ を使うと, 上の積分が

$$\int_{G(F) \times G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})} \xi(g) \xi^\vee(g') \sum_{\gamma \in P(F) \backslash P(F) \gamma_i(G(F) \times G(F))} f^{(s)}(\gamma(g, g')) dg dg'$$

の和に等しいことが分かる. main orbit の $P(F) \backslash G(F) \times G(F) = G(F) \times e$ 以外の項は 0 になることが分かるので, 結局

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(\mathbb{A})} \langle \pi(g) \xi, \xi^\vee \rangle_G f^{(s)}((g, e)) dg$$

となる (詳しくは, [27] を参照). 同型 $\pi \simeq \otimes_v \pi_v, \pi^\vee \simeq \otimes_v \pi_v^\vee, I(s) \simeq \otimes_v I_v(s)$ を適当に固定する. $\xi_v \in \pi_v, \xi_v^\vee \in \pi_v^\vee, f_v^{(s)} \in I_v(s)$ に対して,

$$Z(\xi_v \boxtimes \xi_v^\vee, f_v^{(s)}) = \int_{G(F_v)} \langle \pi_v(g) \xi_v, \xi_v^\vee \rangle f_v^{(s)}((g, e)) dg$$

とおく. π_v が不分岐のとき不分岐データ $\xi_{v,0}, \xi_{v,0}^\vee, f_{v,0}^{(s)}$ に対して,

$$Z(\xi_{v,0} \boxtimes \xi_{v,0}^\vee, f_{v,0}^{(s)}) = L(s, \pi_v, \text{std}) \langle \xi_{v,0}, \xi_{v,0}^\vee \rangle b_v(s)^{-1},$$

$$b_v(s) = \prod_{j=1}^{[n/2]} \zeta_v(2s + n + 1 - 2j).$$

となる. 従って, $\xi = \otimes_v \xi_v$, $\xi^\vee = \otimes_v \xi_v^\vee$, $f^{(s)} = \otimes_v f_v^{(s)}$ であるとき, S を悪い素点の集合とすれば,

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \prod_{v \in S} Z(\xi_v \boxtimes \xi_v^\vee, f_v^{(s)}) \cdot L^S(s, \pi, \text{std})/b^S(s).$$

γ 因子の理論は [24] を参照. L 因子と ε 因子に関しては [26, 11, 42] を参照.

以上により, L 函数 $L(s, \pi)$ の解析的性質 (有理型解析接続, 函数等式, 極の位置) を Eisenstein 級数の解析的性質から知ることができる.

命題 3.3 ([21, 42]). 無限積 $L(s, \pi)$ は右半平面 $\Re s > \frac{n}{2}$ で絶対収束し, 全平面上の有理型函数に解析接続される. $L(s, \pi)$ は有限集合 $\mathfrak{X} = \{1 - \frac{n}{2}, 2 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}\} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ に高々一位の極を持ち, 函数等式 $L(s, \pi) = \varepsilon(s, \pi)L(1 - s, \pi)$ を満たす.

注意 3.4. GL_N の標準 L 函数と異なり, この L 函数には極が存在する. 極の存在理由はテータリフトの理論から説明することができる. 詳細は [22, 6, 42]などを参照.

局所 seesaw 等式より, 大域的なテータリフトが 0 でないための局所的条件は

$$\text{Hom}_{\text{MP}_{n-1}}(\Theta(\pi_v) \boxtimes \overline{\Theta(\pi_v)}, \mathbb{C}) \neq 0$$

であり, これは π_v の局所テータリフトが 0 でないことと同値である. 各素点 v に対して, $\text{sgn}_v : O(V_v) \rightarrow \mu_2$ を直交群の determinant 指標とする. 素点の有限集合 T に対して, $\text{sgn}_T = \prod_{v \in T} \text{sgn}_v$ とする. T の位数が偶数であれば, sgn_T は保型的指標である. 任意の素点 v に対して,

$$L(s, \pi_v \otimes \text{sgn}_v) = L(s, \pi_v), \quad \varepsilon(s, \pi_v \otimes \text{sgn}_v, \psi_v) = \varepsilon(s, \pi_v, \psi_v)$$

は容易に証明できるので, $\#T$ が偶数なら $L(s, \pi \otimes \text{sgn}_T) = L(s, \pi)$ である.

直交群の場合には, 以下のテータダイコトミーが証明されている.

定理 3.5 (Gan-Savin [5]). F を非アルキメデス体, π を G の既約許容表現とする.

$$\begin{aligned} \Theta^+(\mathbf{1}) &= \Theta(\mathbf{1}), \\ \Theta^-(\mathbf{1}) &= \Theta(\mathbf{1}) \otimes \text{sgn}, \\ \Theta^+(\pi) &= \Theta(\pi), \\ \Theta^-(\pi) &= \Theta(\pi \otimes \text{sgn}) \end{aligned}$$

とおく. このとき, $\Theta^+(\pi)$ か $\Theta^-(\pi \otimes \text{sgn})$ どちらか一方だけが 0 ではない. さらに

$$Z^*(0)|_{\Theta^\epsilon(\mathbf{1})} \neq 0 \Leftrightarrow \Theta^\epsilon(\pi) \neq 0.$$

以上より仮定 1~4 が全て確かめられたので, 以下の結論が従う.

定理 3.6 (cf. [41]). π を $O(V)$ の既約尖点的保型表現とし, $L(s, \pi)$ が整函数であるとする. このとき, 以下の条件は同値である:

- $\theta(\pi) \neq 0$;

- $L(1/2, \pi) \neq 0$ かつ任意の素点 v に対して, $\theta_v(\pi_v) \neq 0$;
- $L(1/2, \pi) \neq 0$ かつ任意の素点 v に対して, $\pi_v(-1) = \varepsilon(V_v)\varepsilon(1/2, \pi_v)$.

$L(1/2, \pi) \neq 0$ ならば, 偶数個の素点の集合 T が存在して, $\theta(\pi \otimes \text{sgn}_T) \neq 0$.

注意 3.7. 仮定の L 関数が正則性から, $\theta(\pi)$ は尖点的であり, Rallis 内積公式が適用できる.

3.2 例 2: トーラス周期と L 関数の中心値

B を代数体 F 上の四元数代数とし, $Z \simeq F^\times$ を B の中心, (π, V_π) を $B^\times(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする. π の中心指標を χ_π で表し, $\chi_\pi = 1$ を仮定する. E を F 上二次元の半単純代数とし, E が B に埋め込まれていると仮定する. すなわち, ある B^\times の元 b が存在して, $B = E \oplus Eb, T = E^\times$ は B^\times の極大トーラスである. Waldspurger [38] は, $f \in V_\pi$ のトーラス周期

$$\mathcal{P}_T(f) = \int_{Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A})} f(t)dt$$

を研究している. $O(B)$ を B のノルム形式の直交群, 次の seesaw 図形

$$\begin{array}{ccc} O(B) & & \text{SL}_2 \times \text{SL}_2 \\ | & \searrow & | \\ O(E) \times O(Eb) & & \text{SL}_2 \end{array}$$

の similitude 版

$$\begin{array}{ccc} \text{GSO}(B) & & (\text{GL}_2 \times \text{GL}_2)^0 \\ | & \searrow & | \\ (\text{GSO}(E) \times \text{GSO}(Eb))^0 & & \text{GL}_2 \end{array}$$

を考える. ここで,

$$(\text{GL}_2 \times \text{GL}_2)^0 = \{(g, g') \in \text{GL}_2 \times \text{GL}_2 \mid \det g = \det g'\}$$

とおいた. $(\text{GSO}(E) \times \text{GSO}(Eb))^0$ も同様に定義する.

π を $\text{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, $\chi_\pi = 1$ とする. $\text{GL}_2(\mathbb{A})$ の別の既約保型表現 π' と $\text{GL}_2(\mathbb{A})$ のある誘導表現 $I(s)$ の中心指標の積が自明であるとき, 次のゼータ積分を考える:

$$Z(f, f'; f^{(s)}) = \int_{Z(\mathbb{A})\text{GL}_2(F)\backslash \text{GL}_2(\mathbb{A})} f(g)f'(g)E(f^{(s)})(g)dg$$

($f \in V_\pi, f' \in V_{\pi'}, f^{(s)} \in I(s)$).

Jacquet [18] より, このゼータ積分はテンソル積 $M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \simeq M_4(\mathbb{C})$ が与える四次元表現 $r : GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_4(\mathbb{C})$ に関する $GL_2 \times GL_2$ の L 函数 $L(s, \pi \times \pi', r)$ を与える.

次の accidental 同型

$$GSO(E) \simeq E^\times, \quad GSO(B) \simeq B^\times \times B^\times / \{(z, z^{-1}) \mid z \in F^\times\}.$$

に関しては成田先生の原稿を参照. Jacquet-Langlands 対応により, π と対応する B^\times の保型表現を π^B により表すとき (π^B が存在しなければ, 形式的に $\pi^B = 0$ とする), 後者の同型を使って,

$$\theta(\pi) \simeq \pi^B \boxtimes (\pi^B)^\vee \simeq \pi^B \boxtimes \pi^B$$

が成り立つ事実は良く知られている. 下記の seesaw machine より, $\xi \in V_\pi$ に対して, ある $\xi_1^B, \xi_2^B \in V_{\pi^B}$ が存在して,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T(\xi_1^B) \mathcal{P}_T(\xi_2^B) &= Z(\bar{\xi}, E(f_\phi^{(s)})|_{s=0}; f_{\phi'}^{(s)})|_{s=0} \\ &= \prod_v Z_v(\bar{\xi}_v, f_{\phi_v}^{(0)}; f_{\phi'_v}^{(s)})|_{s=0} \\ &= L^S(1/2, \pi \times \theta(\mathbb{1}), r) \prod_{v \in S} Z_v(\bar{\xi}_v, f_{\phi_v}^{(0)}; f_{\phi'_v}^{(s)})|_{s=0} \\ &= L(1/2, BC_E(\pi)) \prod_{v \in S} Z_v^*(\bar{\xi}_v, f_{\phi_v}^{(0)}; f_{\phi'_v}^{(s)})|_{s=0} \end{aligned}$$

が成り立つ. $BC_E(\pi)$ は π の $GL_2(E)$ への基底変換を表す.

$$\begin{array}{ccc} GSO(B) & & (GL_2 \times GL_2)^0 E(f_\phi^{(s)}) E(f_{\phi'}^{(s)})|_{s=0} \\ & \searrow & \swarrow \\ \mathbb{1} & (GSO(E) \times GSO(Eb))^0 & GL_2 \quad \xi \in V_\pi \end{array}$$

Weil 表現や Siegel-Weil 公式や基本等式の similitude 群への拡張については, [3] を参照. 以下のダイコトミーが知られている.

定理 3.8 (Tunnel, H. Saito [32]). F を局所体, $GL_2(F)$ の既約許容表現 π の局所 Jacquet-Langlands 対応を π^{JL} (存在しなければ $\pi^{JL} = 0$ とおく) と書くとすると

$$\dim \text{Hom}_{E^\times}(\pi, \mathbb{C}) + \dim \text{Hom}_{E^\times}(\pi^{JL}, \mathbb{C}) = 1.$$

以上の議論により Waldspurger による次の結果が得られる:

定理 3.9 (Waldspurger [38]). π を $GL_2(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, E を F 上二次の半単純な代数とする. 以下の条件は同値である:

- $L(1/2, BC_E(\pi)) \neq 0$;
- ある四元数代数 $B \supset E$ に対して, $f \in V_{\pi^B}$ が存在して $\mathcal{P}_T(f) \neq 0$.

さらに任意の E を含む四元数代数 B に対して, 以下の条件も同値である:

- $\mathcal{P}_T(\pi^B) \neq 0$;
- $L(1/2, \text{BC}_E(\pi)) \neq 0$ かつ全ての素点 v で $\text{Hom}_{E_v^\times}(\pi_v^{B_v}, \mathbb{C}) \neq 0$.

実際の定理では, 周期の平方 $\mathcal{P}_T(f)^2$ の値が明示的に計算されている. [13] や Wee Teck Gan 氏のノート [3] にも詳しい説明があるので, 参照されたい.

3.3 例 3: 三重積 L 函数の中心値に関する Jacquet 予想

(π_i, V_{π_i}) ($i = 1, 2, 3$) を $\text{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, $\chi_{\pi_1}\chi_{\pi_2}\chi_{\pi_3} = 1$ を仮定する. B を代数体 F 上の四元数代数とし, π_i^B を 3.2 節と同様に定める. $f_i^B \in \pi_i^B$ に対して, 三重双線形式

$$I(f_1^B, f_2^B, f_3^B) = \int_{Z(\mathbb{A})B^\times(F)\backslash B^\times(\mathbb{A})} f_1^B(g)f_2^B(g)f_3^B(g)dg$$

を考える. $r : \text{GL}_2(\mathbb{C}) \times \text{GL}_2(\mathbb{C}) \times \text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_8(\mathbb{C})$ をテンソル積により定まる八次元表現とする. 次の結果は Jacquet に予想され, Harris と Kudla [9, 10] が証明した.

定理 3.10 (Jacquet 予想 Harris-Kudla の定理). 上の設定の下, 以下の条件は同値である:

- $L(1/2, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r) \neq 0$;
- ある四元数代数 B に対して, $f_i^B \in V_{\pi_i^B}$ が存在して $I(f_1^B, f_2^B, f_3^B) \neq 0$.

さらに, このような B は, 次の条件により一意的に決まる: 全ての素点 v で

$$\text{Hom}_{B_v^\times}(\pi_{1,v}^{B_v} \otimes \pi_{2,v}^{B_v} \otimes \pi_{3,v}^{B_v}, \mathbb{C}) \neq 0.$$

注意 3.11. (1) 定理 3.6 のように, 定理 3.9 や 3.10 の局所的な条件もルート数により言い換えることができる. 詳しくは, 各文献を参照.

(2) 定理 3.9 と 3.10 は, Gross-Prasad 予想 [8] の特別な場合である. Gross-Prasad 予想は, 市野氏と池田氏 [13] により精密化されている.

三重積 L 函数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r)$ の積分表示は, Garrett [4] により発見され, Piatetski-Shapiro と Rallis [28] や池田保氏 [15, 16, 17], Ramakrishnan [31] により詳しく研究され, L 因子や ε 因子も全ての素点で定義されている.

次のゼータ積分

$$\begin{aligned} Z(f_1, f_2, f_3; f^{(s)}) &= \int_{Z(\mathbb{A})(\text{GL}_2(F)^3)^0 \backslash (\text{GL}_2(\mathbb{A})^3)^0} f_1(g_1)f_2(g_2)f_3(g_3) \\ &\quad \times E(f^{(s)})(g_1, g_2, g_3)dg_1dg_2dg_3 \quad (f_i \in V_{\pi_i}, f^{(s)} \in I(s)) \end{aligned}$$

は 2.3 節と 2.4 節の仮定を全て満たし, 三重積 L 函数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r)$ の積分表示を与える. 次の seesaw machine

$$\begin{array}{ccc}
f_1^B, f_2^B, f_3^B & (GSO(B)^3)^0 & GSp_6 E(f_\phi^{(s)})|_{s=0} \\
& \swarrow & \downarrow \\
\mathbb{1} & GSO(B) & (GL_2^3)^0_{f_1, f_2, f_3}
\end{array}$$

より, $f_i \in V_{\pi_i}$ に対して, ある $f_i^B \in V_{\pi_i^B}$ が存在して,

$$\begin{aligned}
I(f_1^B, f_2^B, f_3^B)^2 &= Z(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3; f_\phi^{(s)})|_{s=0} \\
&= \prod_v Z_v(\bar{f}_{1,v}, \bar{f}_{2,v}, \bar{f}_{3,v}; f_{\phi_v}^{(s)})|_{s=0} \\
&= L(1/2, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r) \prod_{v \in S} Z_v^*(\bar{f}_{1,v}, \bar{f}_{2,v}, \bar{f}_{3,v}; f_{\phi_v}^{(0)})|_{s=0}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より $(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)^\vee \simeq \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ に注意する. Weil 表現や Siegel-Weil 公式や基本等式の similitude 群への拡張については, [9] を参照. 次のダイコトミーは Prasad [29] により証明されている.

定理 3.12 (D. Prasad [29]). F を局所体, B を F 上の四元数体, 任意の $GL_2(F)$ の既約許容表現の三つ組 (π_1, π_2, π_3) に対して

$$\dim \text{Hom}_{GL_2(F)}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, \mathbb{C}) + \dim \text{Hom}_{B \times (\pi_1^B \otimes \pi_2^B \otimes \pi_3^B)}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, \mathbb{C}) = 1.$$

以上を組み合わせれば, 定理 3.10 が得られる.

References

- [1] J. Adams, L -functoriality for dual pairs, *Astérisque* **171-172** (1989) 85–129.
- [2] J. Arthur, Eisenstein series and the trace formula, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** (1979) part 1, 253–274.
- [3] W. T. Gan, The Shimura correspondence a lá Waldspurger, preprint.
- [4] P. Garrett, Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products, *Ann. of Math.* **125** (1987) 209–235.
- [5] W. T. Gan and G. Savin, Representations of metaplectic groups I: epsilon dichotomy and local Langlands correspondence, preprint.
- [6] W. T. Gan and S. Takeda, The regularized Siegel-Weil formula: the second term identity and non-vanishing of theta lifts from orthogonal groups, *J. Reine Angew. Math.* **659** (2011) 175–244.
- [7] R. Godement and H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, *Springer Lec. notes in Math.*, vol. **260**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [8] B. H. Gross and D. Prasad, On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1} , *Canad. J. Math.* **44** (1992) 974–1002.
- [9] M. Harris and S. Kudla, The central critical value of a triple product L -function, *Ann. of Math.* (2) **133** (1991) 605–672.

- [10] M. Harris and S. Kudla, On a conjecture of Jacquet, in Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory (Baltimore, 2002), Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 2004, 355–371.
- [11] M. Harris, S. Kudla and W. J. Sweet Jr., Theta dichotomy for unitary groups, J. Am. Math. Soc., **9** (1996) 941–1004.
- [12] R. Howe, Transcending classical invariant theory, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 535–552.
- [13] A. Ichino and T. Ikeda, On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture, Geom. Funct. Anal. **19** (2010) 1378–1425.
- [14] A. Ichino, A regularized Siegel-Weil formula for unitary groups, Math. Z. **247** (2004) 241–277.
- [15] T. Ikeda, On the functional equations of triple L -functions, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989) 175–219.
- [16] T. Ikeda, On the location of poles of the triple L -functions, Compos. Math. **83** (1992) 187–237.
- [17] T. Ikeda, On the gamma factor of the triple L -function I, Duke Math. J. **97** (1999) 301–318.
- [18] H. Jacquet, Automorphic forms on $GL(2)$ Part II, Springer Lec. notes in Math. **278**, 1972.
- [19] S. Kudla, Seesaw dual reductive pairs, Automorphic forms of several variables. Prog. Math. vol. **46**, pp. 244–268. Boston, MA: Birkhäuser 1984.
- [20] S. Kudla, Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs, Isr. J. Math. **84** (1994) 361–401.
- [21] S. Kudla and S. Rallis, Poles of Eisenstein series and L -functions, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II, 81–110, Israel Math. Conf. Proc. **3**, Weizmann, Jerusalem, 1990.
- [22] S. Kudla and S. Rallis, A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity, Ann. Math. **140** (1994) 1–80.
- [23] S. Kudla, M. Rapoport and T. Yang, Modular forms and special cycles on Shimura curves, Annals of Math. Studies **161**, Princeton Univ. Press, 2006.
- [24] E. Lapid and S. Rallis, On the local factors of representations of classical groups, Automorphic representations, L -functions and applications: progress and prospects, Berlin: de Gruyter (2005) 309–359.
- [25] C. Moeglin, M.-F. Vignera and C.-L. Waldspurger, Correspondence de Howe sur un corps p -adique, Springer Lec. notes in Math. **1291**, 1987.
- [26] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, ε factor of representations of classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83** (1986) 4589–4593.
- [27] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, L -functions for classical groups, in Springer Lec. notes in Math., vol. **1254** (1987) 1–52.
- [28] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, Rankin triple L -functions, Compos. Math. **64** (1987) 31–115.

- [29] D. Prasad, Trilinear forms for representations of $GL(2)$ and local epsilon factors, *Compos. Math.* **75** (1990) 1–46.
- [30] S. Rallis, On the Howe duality conjecture, *Compos. Math.* **51** (1984) 333–399.
- [31] D. Ramakrishnan, Modularity of the Rankin-Selberg L -series, and multiplicity one for $SL(2)$, *Ann. of Math. (2)* **152** (2000) 45–111.
- [32] H. Saito, On Tunnell’s formula for characters of $GL(2)$, *Compos. Math.* **85** (1993) 99–108.
- [33] F. Shahidi, A proof of Langlands’ conjecture on Plancherel measures; complementary series for p -adic groups, *Ann. of Math. (2)* **132** (1990) 273–330.
- [34] G. Shimura, On Eisenstein series, *Duke Math. J.* **50** (1983) 417–476.
- [35] G. Shimura, The number of representations of an integer by a quadratic form, *Duke Math. J.* **100** (1999) 59–92.
- [36] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I, *Math. Ann.* **124** (1951) 17–54; II, (1952) 364–387.
- [37] J.-L. Waldspurger, Démonstration d’une conjecture de dualité de Howe dans le cas p -adique, $p \neq 2$, *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Pt. I: Papers in representation theory, Pap. Workshop L -Functions, Number Theory, Harmonic Anal., Tel-Aviv/Isr. 1989, Isr. Math. Conf. Proc. 2, 267–324, Weizmann, Jerusalem 1990.*
- [38] J.-L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, *Compos. Math.* **54** (1985) 173–242.
- [39] A. Weil, Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *Acta Math.* **113** (1965) 1–87.
- [40] S. Yamana, On the Siegel-Weil formula: The case of singular forms, *Compos. Math.* **147** (2011) 1003–1021.
- [41] S. Yamana, On the Siegel-Weil formula for quaternionic unitary groups, *Am. J. Math.* (to appear)
- [42] S. Yamana, L -functions and theta correspondence for classical groups, (preprint)