

On v -adic periods of t -motives

三柴 善範 (九州大学大学院数理学府 博士課程 1 年)*

函数体上の t モチーフ M と有限素点 v に対して, M の v 進周期に関する超越次数と M から得られる代数群の次元とが等しいという結果を紹介しします. 本稿は, 第 19 回 (2011 年度) 整数論サマースクール「保型形式のリフティング」での院生・ポスドクの時間において講演した内容をまとめたものです. 素晴らしい勉強会を企画・運営して下さったオーガナイザーの皆様, 聴講して下さった参加者の皆様に感謝致します.

1 はじめに

Riemann ゼータ函数の特殊値の間に \mathbb{Q} 上のような代数的関係があるかはまだほとんど知られていないが, この正標数類似である Carlitz ゼータ函数の特殊値については, 完全に知られている. その証明では, 函数体上の t モチーフという対象の Betti 実現 (∞ 進的对象) による周期に関する超越次数を決定する Papanikolas の結果が重要となっている. 一方で有限素点 v に対して, v 進ゼータ函数や v 進実現が考えられる. 本稿では, t モチーフの v 進実現に対する Papanikolas の結果の類似を解説する.

まずは標数 0 の場合を述べる. Riemann ゼータ函数の特殊値について, 次のような予想がある.

予想 1. n を 2 以上の整数とすると,

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\pi, \zeta(2), \dots, \zeta(n)) = n - \lfloor n/2 \rfloor$$

が成り立つ. ここで, π は円周率であり, 実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数を表す.

よく知られているように, 偶数点においては $\zeta(2n)/\pi^{2n} \in \mathbb{Q}$ となる. 従って予想 1 は, π とゼータ函数の特殊値の間には, 他に \mathbb{Q} 上の代数的な関係がないだろうということを述べている. 予想 1 については, まだほとんど何も分かっていない. しかし, この正標数類似である Carlitz ゼータ函数については, 同様の主張が既に示されている. 以下, このことについて述べる.

\mathbb{F}_q を位数 q の有限体とし, その標数を p とする. $K := \mathbb{F}_q(\theta)$ を \mathbb{F}_q 上の一変数有理函数体とする. 1 以上の整数 n に対して,

$$\zeta_C(n) := \sum_{a \in \mathbb{F}_q[\theta], \text{ モニック}} a^{-n} \in K_{\infty} := \mathbb{F}_q((\theta^{-1}))$$

*e-mail: y-mishiba@math.kyushu-u.ac.jp

を Carlitz ゼータ函数の特殊値という． $\mathbb{F}_q[\theta]$, K , K_∞ をそれぞれ \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} の類似物と見做せば，これは Riemann ゼータ函数の特殊値の類似物と考えることができる．定義から，正の整数 m と n に対して $\zeta_C(p^m n) = \zeta_C(n)^{p^m}$ となることが分かる．次に， π の (正確には $2\pi\sqrt{-1}$) の類似物 $\tilde{\pi}$ を

$$\tilde{\pi} := \theta(-\theta)^{\frac{1}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \theta^{1-q^i})^{-1} \in K_\infty((-\theta)^{\frac{1}{q-1}})$$

と定義する．このとき， $q-1$ の倍数 n に対して $\zeta_C(n)/\tilde{\pi}^n \in K$ となることが Carlitz によって示されている． $\#\mathbb{Z}^\times = 2$, $\#\mathbb{F}_q[\theta]^\times = q-1$ であることを踏まえると，これは Riemann ゼータ函数の偶数点における性質の類似である．実は，正標数のときには K 上の関係式がこれらで全てであることが Chang と Yu によって示されている．

定理 2 ([CY, Corollary 4.6]). n を 1 以上の整数とすると，

$$\text{tr.deg}_K K(\tilde{\pi}, \zeta_C(1), \dots, \zeta_C(n)) = n + 1 - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)]$$

が成り立つ．

この定理の証明には，Papanikolas による t モチーフの周期に関する超越次数についての結果が中心的な役割を果たしている．以下，このことについて述べる． t モチーフについての詳しいことは次の章にまとめる．

$\widehat{K_\infty}$ を K_∞ の代数閉包の ∞ 進完備化とし， $|\cdot|_\infty$ をその上の自然な絶対値とする．また， t を θ とは独立な変数とする．

$$\mathbb{T} := \{f \in \widehat{K_\infty}[[t]] \mid f \text{ は } |t|_\infty \leq 1 \text{ で収束}\}$$

とし， $\mathbb{L} := \text{Frac}(\mathbb{T})$ を \mathbb{T} の分数体とする．このとき， \mathbb{L} には Frobenius 作用 σ が自然に作用し，その固定部分は $\mathbb{F}_q(t)$ となる． M を t モチーフとする． t モチーフは有限生成自由 $K[t]$ 加群に付加構造を入れたものであり，その Betti 実現 $H_B(M) \subset \mathbb{L} \otimes_{K[t]} M$ が定義される． $H_B(M)$ は $\mathbb{F}_q(t)$ ベクトル空間となり，その次元は M の階数以下であることが示せる． $\dim_{\mathbb{F}_q(t)} H_B(M) = \text{rank}_{K[t]} M =: r$ と仮定し， $H_B(M)$ の基底 \mathbf{x} と M の基底 \mathbf{m} を固定すると， $\mathbb{L} \otimes_{K[t]} M$ 内において \mathbf{x} を \mathbf{m} に移す変換行列 $\Psi = (\Psi_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_r(\mathbb{L})$ が得られる．一方でこのような M に対して， M が生成し H_B をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)$ 上のニュートラル淡中圏が得られる． Γ をその基本群とする．定義より， Γ は $\mathbb{F}_q(t)$ 上の代数群となる．このとき，Papanikolas によって次の定理が示されている．

定理 3 ([Pa, Theorem 4.3.1, 4.5.10]). M を $\dim H_B(M) = \text{rank } M$ となる t モチーフとし， Ψ と Γ を上のように定める．このとき，

$$\text{tr.deg}_{\widehat{K}(t)} \widehat{K}(t)(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \dots, \Psi_{rr}) = \dim \Gamma$$

が成り立つ．

有限素点 v に対して M の v 進実現 $V(M)$ が定義され， H_B の代わりに V を用いて変換行列と代数群が同様に得られる．それらに対して定理 3 の類似が成立することを 3 章で述べる．

注意 4. Papanikolas は実際には, “ABP-criterion” と呼ばれるもの ([ABP]) を用いることで,

$$\text{tr.deg}_{\bar{K}} \bar{K}(\Psi_{11}|_{t=\theta}, \Psi_{12}|_{t=\theta}, \dots, \Psi_{rr}|_{t=\theta}) = \dim \Gamma$$

となることまで示している. Anderson と Thakur は [AT] において, ある種の t モチーフ M に対して, $\Psi|_{t=\theta}$ が ζ_C と関係することを示している. そこから得られる代数群 Γ を詳しく調べることで, 定理 2 を得ることができる. 有限素点 v に対して v 進ゼータ函数 $\zeta_{C,v}$ が定義されるが, ABP-criterion の v 進類似がまだなく, Ψ と $\zeta_{C,v}$ の関係も分かっていない. そのため, 定理 3 の v 進類似を $\zeta_{C,v}$ へ応用するにはまだ至っていない.

2 t モチーフ

定理 3 の v 進類似を述べる前に, ここではアーベル t 加群と t モチーフを定義する. 定理を述べるだけなら t モチーフだけで十分だが, その双対概念であるアーベル t 加群はアーベル多様体の類似として捉え易いので, まずはそちらから述べる.

定義 5. K 上のアーベル t 加群とは, K 上の $\mathbb{F}_q[t]$ 加群スキーム E であって, 次の条件を満たすものである:

- ある整数 $d \geq 0$ に対して, K の代数閉包 \bar{K} 上の群スキームとして $E_{\bar{K}} \cong \mathbb{G}_a^d$.
- 十分大きな N に対して, $(t - \theta)^N \text{Lie}(E) = 0$.
- $\text{Hom}_{\text{gr.sch.}/K}(E, \mathbb{G}_a)$ は自然に入る $K[t]$ 加群の構造に関して有限生成.

定義から, アーベル t 加群とはだいたい \mathbb{G}_a^d に $\mathbb{F}_q[t]$ の作用が入ったものであり, アーベル多様体への \mathbb{Z} 作用の類似と考えられる. 正標数の場合には q 乗 Frobenius 等があるので, $\text{End}(\mathbb{G}_a^d)$ が大きくなり, 様々な作用を考えることができる.

例 6 (Carlitz 加群). $C := \mathbb{G}_{a,K}$ とし, $\mathbb{F}_q[t]$ 作用を

$$\mathbb{F}_q[t] \rightarrow \text{End}(C); t \mapsto (x \mapsto \theta x + x^q)$$

で定める. このとき, C はアーベル t 加群になることが分かる. これを Carlitz 加群という.

次に t モチーフについて述べる. Frobenius 作用 σ を

$$\sigma: K[t] \rightarrow K[t]; \sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i a_i^q t^i$$

と定める.

定義 7. K 上の t モチーフとは, $K[t]$ 加群 M と写像 $\varphi: M \rightarrow M$ の組 (M, φ) であって, 次の条件を満たすものである:

- M は有限生成自由 $K[t]$ 加群.
- $\varphi: M \rightarrow M$ は σ 半線型.

- $\det \varphi = c(t - \theta)^n$ ($c \in K^\times, n \geq 0$) .
- M は $K[\varphi]$ 上有限生成 .

ここで, $\det \varphi$ は M の $K[t]$ 基底 \mathbf{m} を取ったときに $\varphi \mathbf{m} = A\mathbf{m}$ となる行列 A の行列式である ($(K[t])^\times = K^\times$ より, $\det \varphi$ が 3 つ目の条件の形であるかどうかは基底の取り方に依らない) . 組 (M, φ) を単に M とも書く .

アーベル t 加群 E に対して, $M_E := \text{Hom}_{\text{gr.sch.}/K}(E, \mathbb{G}_a)$ とおく . E の方の t 作用をそのまま M_E への t 作用とし, \mathbb{G}_a の方の定数倍と q 乗写像を M_E への定数倍と φ 作用とすることで, M_E は K 上の t モチーフになる . この対応は自然に関手になるが, 実は次の命題が成り立つ .

命題 8. E に M_E を対応させる関手は, K 上のアーベル t 加群のなす圏から K 上の t モチーフのなす圏への圏同値を与える .

例 9 (Carlitz t モチーフ). C を例 6 で定義した Carlitz 加群とする . このとき, M_C は $K[t]$ 加群としては $K[t]$ と同型となり, φ 作用は $a \in M_C$ に対して $\varphi(a) = (t - \theta)\sigma(a)$ となる . これを Carlitz t モチーフという .

3 v 進の場合

この章では Papanikolas の結果の v 進類似について述べる . $v \in \mathbb{F}_q[t]$ をモニックな既約多項式とし, K の分離閉包 K^{sep} を固定する . $\mathbb{F}_q(t)_v, K(t)_v, K^{\text{sep}}(t)_v$ をそれぞれ $\mathbb{F}_q(t), K(t), K^{\text{sep}}(t)$ の v 進完備化とする . このとき, σ は $K(t)_v$ と $K^{\text{sep}}(t)_v$ に自然に延長され, その固定部分は $\mathbb{F}_q(t)_v$ となる . K 上の t モチーフ M に対して, その v 進実現を

$$V(M) := (K^{\text{sep}}(t)_v \otimes_{K[t]} M)^{\sigma \otimes \varphi}$$

で定義する . 但し, $(-)^{\sigma \otimes \varphi}$ で作用の固定部分を表す . $V(M)$ は $\mathbb{F}_q(t)_v$ ベクトル空間となり, その次元は常に M の階数と等しいことが分かる . t モチーフのままでは扱いにくいので, v 進実現が経由する次のような圏を考える .

定義 10. $K(t)_v$ 上の φ 加群とは, 有限次元 $K(t)_v$ ベクトル空間 N と σ 半線型写像 $\varphi: N \rightarrow N$ の組のことである . 単に N とも書く . φ 加群の間の射は, $K(t)_v$ 線型写像で各 φ と可換なものである .

N を $K(t)_v$ 上の φ 加群とすると, 自然な写像

$$K^{\text{sep}}(t)_v \otimes_{\mathbb{F}_q(t)_v} V(N) \rightarrow K^{\text{sep}}(t)_v \otimes_{K(t)_v} N$$

が得られる . ここで, $V(N) := (K^{\text{sep}}(t)_v \otimes_{K(t)_v} N)^{\sigma \otimes \varphi}$ である . $K(t)_v$ 上の φ 加群で上の写像が同型となるもののなす圏を \mathcal{C} で表す . このとき, \mathcal{C} は V をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)_v$ 上のニュートラル淡中圏となる . また, M を K 上の t モチーフとすると, $K(t)_v \otimes_{K[t]} M$ が \mathcal{C} の対象となることが分かる .

M を K 上の t モチーフとし, $r := \text{rank}_{K[t]} M$ とする. このとき, 上に述べたことから $r = \dim_{\mathbb{F}_q(t)_v} V(M)$ となる. $V(M)$ の基底 \mathbf{x} と M の基底 \mathbf{m} をそれぞれ固定すると, $K^{\text{sep}}(t)_v \otimes_{K[t]} M$ 内において \mathbf{x} を \mathbf{m} に移す変換行列

$$\Psi = (\Psi_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_r(K^{\text{sep}}(t)_v)$$

が得られる. Ψ は各基底の取り方に依るが, $\text{GL}_r(K[t]) \backslash \text{GL}_r(K^{\text{sep}}(t)_v) / \text{GL}_r(\mathbb{F}_q(t)_v)$ において well-defined である. Ψ の各成分 Ψ_{ij} を, M の v 進周期という. $v = \prod_{l=1}^d (t - \lambda_l)$ と $\overline{\mathbb{F}_q}$ で分解すると,

$$K^{\text{sep}}(t)_v = \prod_l K^{\text{sep}}((t - \lambda_l))$$

となるので, これに合わせて $\Psi_{ij} = (\Psi_{ijl})_l$ と成分表示する. 次に, Γ_v を $K(t)_v \otimes_{K[t]} M$ が \mathcal{C} において生成する部分淡中圏 (有限回の直和, テンソル積, 双対, 部分商を取って得られる対象全体) の基本群とする. 定義から, Γ_v は $\mathbb{F}_q(t)_v$ 上の代数群である. このとき, 以下の定理が成り立つ. これは定理 3 の v 進類似と考えられる.

定理 11 ([Mi, Theorem 4.14, 5.15]). M を K 上の t モチーフとし, Ψ_{ijl}, Γ_v を上のようにとる. このとき, 任意の l に対して

$$\text{tr.deg}_{K(t)_v} K(t)_v(\Psi_{11l}, \Psi_{12l}, \dots, \Psi_{rrl}) = \dim \Gamma_v$$

が成り立つ.

注意 12. \mathcal{C} の対象 N に対して, $V(N)$ には K の絶対 Galois 群 $G_K := \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ が自然に作用する. G_K の $\mathbb{F}_q(t)_v$ 係数連続表現のなす圏を $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q(t)_v}(G_K)$ とすると, V は圏同値

$$\mathcal{C} \simeq \text{Rep}_{\mathbb{F}_q(t)_v}(G_K)$$

を引き起こす. 従って, t モチーフ M に対して Γ_v は $\text{Im}(G_K \rightarrow \text{GL}(V(M)))$ の Zariski 閉包と一致する. この事実は定理 11 の証明にも使われる. また, そこが定理 3 の証明と本質的に違う部分でもある.

例 13. M を例 9 の Carlitz t モチーフとする. このとき, $\Gamma_v = \mathbb{G}_m$ であり, 超越次数は全て 1 である.

参考文献

- [ABP] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special Γ -values in positive characteristic*, Ann. of Math. **160** (2004) 237–313.
- [AT] G. W. Anderson, D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990) 159–191.
- [CY] C.-Y. Chang and J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007) 321–345.
- [Mi] Y. Mishiba, *On v -adic periods of t -motives*, preprint, arXiv:1105.6243.
- [Pa] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008) 123–174.