

GL_2 上の保型形式と表現論

軍司圭一

1 はじめに

本稿では上半平面上の関数として定義される保型形式を，実 Lie 群 $SL(2, \mathbb{R})$ 上の関数やアデール群 $GL(2, \mathbb{A})$ 上の関数として持ち上げ，表現論の言葉でどのように理解されるかについて解説する．サマースクールの目的の一つに，リフティングの理論的背景を理解するというのがあるが，背景のほとんどは表現論の言葉で記述される．本稿を通して「保型形式とは表現のことである」との感覚を少しでも持っていただければ嬉しい．

参考文献は数多く存在する．本稿は基本的には Gelbart の教科書 [Ge] の 1 から 3 章を抜粋したものである．これはコンパクトにまとまっていてとっつきやすいが，細かな間違いや説明不足も多く，すべてを読むには自分で補う力が要求される．[Ge] の最終目標は Jacquet-Langlands 理論の解説であるが，本格的に勉強したいならばはじめから原書 [JL] を読んでよいと思う．

他には，大部になるが Bump の教科書 [Bu] はしっかり書かれていて読みやすい．アデール上の話は全く書いていないが，Borel ([Bo]) も評判の良い本である．また本稿の内容は過去のサマースクールでも解説されており，今野 ([Ko])，森山 ([Mo]) などが参考になると思う．特に [Mo] は，ほぼ同じ内容がより表現論に近い立場から解説されている．

2 保型形式の復習

2.1 定義

保型形式の定義を復習する．記号の準備として， $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ を上半空間とし， $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$ を合同部分群とする．すなわち Γ はある N に対するレベル N の主合同部分群

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma = 1_2 \pmod{N}\}$$

を含むと仮定する． $g \in SL(2, \mathbb{R})$ と \mathbb{H} 上の関数 f に対して，

$$f|_k g(z) = j(g, z)^{-k} f(g(z)), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad j(g, z) = cz + d, \quad g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

と定める． $j(g_1 g_2, z) = j(g_1, g_2(z)) j(g_2, z)$ より $(f, g) \mapsto f|_k g$ は G の \mathbb{H} 上の関数のなす空間への作用を定める．

定義 2.1 \mathbb{H} 上の関数 f が次の 3 条件を満たすとき, $SL(2, \mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対する重さ k の保型形式であるという.

- (1) f は \mathbb{H} 上正則である.
- (2) $\gamma \in \Gamma$ に対して $f|_k \gamma = f$ が成り立つ.
- (3) f は $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ の各 cusp で正則. すなわち任意の $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して $f|_k \gamma$ は

$$f|_k \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\gamma}(n) e^{2\pi i n z / N}$$

の形の Fourier 展開を持つ.

さらに条件 (3) において, すべての $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して $a_{\gamma}(0) = 0$ であるとき f を cusp 形式という. 保型形式全体のなす空間を $M_k(\Gamma)$, cusp 形式全体のなす空間を $S_k(\Gamma)$ と書く. これらは有限次元ベクトル空間である.

命題 2.1 $f \in M_k(\Gamma)$ が cusp 形式であることの必要十分条件は, ある定数 M が存在して

$$y^{k/2} |f(z)| < M$$

が成り立つことである.

保型形式は, Γ に関する保型性という非常に高い対称性を持っているため, その Fourier 係数には大きな制約がかかる. Hecke による「自明評価」, すなわち「 $f \in S_k(\Gamma)$ に対して $|a(n)| = O(n^{k/2})$ 」などはその顕著な例である. 一方で保型形式の例として Eisenstein 級数や theta 級数があげられるが, その Fourier 係数はそれぞれ「約数のべき乗和」や「二次形式の解の個数」といった数論的情報を含んでいる. 保型形式が整数論に応用される一つの例である.

以下 Γ として

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

を考える. ψ を N を法とした Dirichlet 指標 (原始的とは限らない) とすると, ψ は $\Gamma_0(N)$ の指標に

$$\psi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \psi(d)$$

で拡張される. レベルが N である指標付きの保型形式の空間を

$$M_k(\Gamma_0(N), \psi) = \{f \in M_k(\Gamma_0(N)) \mid f|_k \gamma = \psi(\gamma)f, \forall \gamma \in \Gamma_0(N)\}$$

で定義する.

保型形式の Fourier 係数から自然に得られる Dirichlet 級数を用いて L 関数が定義できる.

定義 2.2 (L 関数の定義その 1) $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ とする . $s \in \mathbb{C}$ と Fourier 展開 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz}$ に対して

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

とおき , f に付随する L 関数と呼ぶ . これは上記の自明評価により $\operatorname{Re}(s)$ が十分大きいところで収束する

保型 L 関数は Mellin 変換を用いて ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(iy)y^{s-1} dy &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-2\pi ny}y^{s-1} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)(2\pi n)^{1-s} \int_0^{\infty} e^{-2\pi ny}(2\pi ny)^{s-1} dy \\ &= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, f) \end{aligned} \quad (2.1)$$

表すことができる . この積分表示から以下の定理は容易に導かれる .

定理 2.2 (1) $L(s, f)$ は全複素 s 平面に正則に解析接続される .

(2) $\Lambda(s, f) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, f)$ は関数等式

$$\Lambda(s, f) = i^k \Lambda(k-s, \tilde{f})$$

を満たす . ここに $\tilde{f}(z) = (\sqrt{N}z)^{-k} f(-(Nz)^{-1})$ である .

(3) $\Lambda(s, f)$ は任意の $C > 0$ に対する帯状領域 $V(C) = \{s \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(s)| < C\}$ で有界 .

2.2 Hecke 理論

保型形式の Fourier 係数は整数論的に非常に重要な意味をもつものであるが , さらに Hecke 作用素を用いることで各係数の間の関係性などが見えてくる . Hecke 作用素 T_p は , 両側剰余類 $\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$ を $\Gamma_0(N)$ で左から割った集合の代表系の作用として書かれるが , Fourier 係数への作用をみると以下のように記述される .

定義 2.3 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz} \in S_k(\Gamma^0(N), \psi)$ に対して , $T_p f(z)$ を以下で定める .

i) $(p, N) = 1$ のとき

$$T_p f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(np) + \psi(p)p^{k-1} a\left(\frac{n}{p}\right) \right) e^{2\pi inz}, \quad (\text{ただし } p \nmid n \text{ のときは } a\left(\frac{n}{p}\right) = 0)$$

ii) $p|N$ のとき

$$T_p f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(np) e^{2\pi i n z}.$$

このとき、いずれの場合も $T_p f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ が成り立つ。

注 Atkin-Lehner [AL] では ii) を U_p -作用素と呼んで区別している。

このとき各 T_p -作用素たちは可換であり、かつ $(p, N) = 1$ なる p に対しては、 T_p は Petersson 内積に関する双対作用素と可換である。よって $S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ の基底として、すべての T_p ($p \nmid N$) の同時固有関数からなるものをとることができる。Atkin-Lehner により定義された “new form の空間” $S_k^{\text{new}}(\Gamma_0(N), \psi)$ に空間を制限すれば $p|N$ なる p も含めたすべての T_p の同時固有関数からなる基底をとることができる。

定義 2.4 (L 関数の定義その 2) f をすべての T_p の同時固有関数とする。 T_p の固有値を λ_p とするとき

$$L(s, f) = a(1) \prod_p (1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s})^{-1}$$

とおく。ただし $a(1)$ は f の Fourier 展開の $e^{2\pi i z}$ の係数である。右辺は $\text{Re}(s) \gg 0$ で収束する。

定理 2.3 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ をすべての T_p -作用素に関する同時固有関数とする。このとき定義 2.2 と定義 2.4 は同じ関数を与える。さらに 2.2 で定義された L 関数が定義 2.4 の形の Euler 積表示を持つのは、 f が同時固有関数であるときに限る。

通常は L 関数の定義を 2.2 で与え、“ f が同時固有関数であれば 2.4 の形の Euler 積表示を持つ”と説明されることが多い。しかし多変数の保型形式を考える場合、むしろ 2.4 が「正しい」 L 関数の定義であり、たまたま “ SL_2 の場合はその Dirichlet 級数の係数が Fourier 係数と一致している” と見る方がよい。なお Siegel 保型形式の場合、2.2 に対応する Dirichlet 級数は Koecher-Maass 級数と呼ばれ、別の数学的対象として研究されている。

定義 2.2 と 2.4 の表示を見比べて、容易に次が分かる。

系 2.4 (重複度 1 定理) 二つの関数 $f, g \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ がすべての T_p に対して同じ固有値の固有関数であれば、 f と g は定数倍を除いて一致する。

3 $SL_2(\mathbb{R})$ の表現論と保型形式

3.1 群への持ち上げ

$\Gamma = \Gamma_0(N)$ とする。この節では $f \in M_k(\Gamma)$ を $G = SL_2(\mathbb{R})$ 上の関数に持ち上げることを考える。 $K = SO(2) \subset G$ とおく。 f は \mathbb{H} 上の関数であり、自然な同型 $G/K \simeq \mathbb{H}$, $g \mapsto g(i)$ があるのでこの写像を通して f は G 上の関数とすることができる。しかし実際には「保型因子」分を考慮して持ち上げた方が都合がよいため、そのような持ち上げを考えることにする。

定義 3.1 $f \in S_k(\Gamma)$ に対して, G 上の関数 φ_f を次で定義する.

$$\varphi_f(g) = j(g, i)^{-k} f(g(i))$$

このとき $\varphi_f \in C^\infty(G)$ であるが, さらに次が成り立つ.

命題 3.1 φ_f は次の性質を満たす.

- (1) φ_f は左 Γ -不変. すなわち $\gamma \in \Gamma$ に対して $\varphi_f(\gamma g) = \varphi_f(g)$
- (2) $K \ni r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ に対して, $\varphi_f(g r_\theta) = e^{ik\theta} \varphi_f(g)$
- (3) φ_f は緩増大である. すなわちある定数 C と M が存在して $|\varphi_f(g)| < C \|g\|^M$ (ただし $\|g\| = \text{Tr}({}^t g g)$ と定める) を満たす.
- (4) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の元 $X_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ の作用によって, $X_- \cdot \varphi_f = 0$ となる. ($X_- \cdot \varphi_f$ の定義は後述)

さらに f が cusp 形式であるときは次が成り立つ.

- (5) $\delta \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して $\Gamma^\delta = \delta^{-1} \Gamma \delta$ とおく. すべての $\delta \in SL(2, \mathbb{Z})$ と $g \in G$ に対して

$$\int_{N \cap \Gamma^\delta \backslash N} \varphi_f(\delta n g) \, dn = 0.$$

ここで $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ とおいた.

(4) の意味は後ほど解説するが, これは定義 2.1 の (1) 「 f が正則」から従う性質である. X_- の作用は Cauchy-Riemann の微分作用に他ならない. (1) は f の保型性, (2) は K が i の固定部分群であること, (3) は定義 2.1 の (3) 「 f の cusp での正則性」に対応している.

証明) (1), (2) は直接計算すればよい. 興味のある読者には自分で確かめることをお勧めする.

(3) については, 任意の $g \in G$ はある $z = x + yi \in \mathbb{H}$ ($|x| \leq 1/2, |z| > 1$) に対して

$$g = \delta g_z r_\theta, \quad \delta \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad g_z = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

と表せることに注意すると, $\varphi_f(g) = y^{k/2} e^{-ik\theta} f|_k \delta(z)$ が成り立つ. よって緩増大は $y < C \|g\|^M$ となること及び, $f|_k \delta$ の Fourier 展開が $n \geq 0$ から始まるという性質より従う. (4) は後ほど説明するので, (5) を証明しよう.

$$N \cap \Gamma^\delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & hm \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

となる h をとる . このとき $z = g(i) \in \mathbb{H}$ と書くと

$$\begin{aligned}
\int_{N \cap \Gamma^\delta \backslash N} \varphi_f(\delta n g) \, dn &= \int_0^1 \varphi_f \left(\delta \begin{pmatrix} 1 & hn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \, dn \\
&= \int_0^1 f \left(\delta \begin{pmatrix} 1 & hn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g(i) \right) j \left(\delta \begin{pmatrix} 1 & hn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g, i \right)^{-k} \, dn \\
&= \int_0^1 f(\delta(z + hn)) j(\delta, z + hn)^{-k} j(g, i)^{-k} \, dn \\
&= j(g, i)^{-k} \int_0^1 (f|_k \delta)(z + hn) \, dn
\end{aligned}$$

であり, 最後の積分は $f|_k \delta$ のフーリエ係数の定数項に他ならない . よって f が cusp 形式であることと, この積分が消えることは同値である . \square

この命題の意味することを考えてみよう . まず (1) より φ_f は $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ の元と見なせる . この空間には G が右正則表現として作用している . すなわち $g \in G$ と $\psi \in C^\infty(\Gamma \backslash G)$ に対して, $g\psi(h) = \psi(hg)$ で $g\psi \in C^\infty(\Gamma \backslash G)$ が定まる . (2) の条件は φ_f が K の作用で定数倍にしかならないこと, 言い換えれば $\mathbb{C}\varphi_f$ という 1 次元空間が K の作用で閉じていることを意味している . また (4) は G のリー環の複素化の作用をあらわしている .

3.2 表現論を用いた解釈

上で説明したことから, 保型形式の理論は表現論を用いてとらえられそうだとことが見えてくる . そこで, 表現論の立場からの準備をしよう .

G を Lie 群とし, 以下 G の表現といったら Hilbert 表現を考えることにする . G の表現そのもの, すなわち G -加群を考えるのが最も自然に見えるが, 実はこれは余り扱いやすい対象ではない . 以下に説明する (\mathfrak{g}, K) -加群を考えることで, 表現の代数的取り扱いが可能になり, より扱いやすくなる .

Lie 群 G の表現を考える際に, まず表現を極大コンパクト部分群 K に制限して K -表現として分解しておく . コンパクト群の表現は完全可約であり, 既約表現はすべて有限次元表現であるから (Peter-Weyl の定理) 扱いやすい . G -表現 (π, H) を K -表現で分解したとき

$$H = \bigoplus_{\delta \in \hat{K}} m(\delta) H_\delta, \quad m(\delta) < \infty$$

となる, すなわち K -表現で分解したときの重複度が有限であるとき, この表現は許容的 (admissible) であるという .

今の場合 $K = SO(2)$ はアーベル群であり, すべての既約表現は 1 次元である . 既約指標は $m \in \mathbb{Z}$ を用いて $K \ni r_\theta \mapsto e^{im\theta}$ の形で与えられる . これにより $SO(2)$ の既約表現の同値類全体を \mathbb{Z} と同一視する .

さらに G の表現よりもその Lie 環 \mathfrak{g}_0 の表現のほうが扱いやすいという事情がある． G は一般には非可換な群であり，例えば生成元などを求めるのも簡単ではないが，ベクトル空間である \mathfrak{g}_0 ならば基底を書くのも容易である．

G の Hilbert 表現 (π, H) に対して， $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie}(G)$ は H のすべての元には作用しない． $v \in H$ をとったとき， $X \in \mathfrak{g}_0$ に対して

$$\left. \frac{d}{dt} \pi(\exp(tX))v \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(\exp(tX))v - v}{t} \quad (3.1)$$

が存在するとき， v を H の微分可能な元という．無限回微分可能な元全体を H^∞ で表すとき， \mathfrak{g}_0 は H^∞ に Lie 環として作用している．この作用を自然に $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の作用に拡張する．

まとめると， G の表現 (π, H) を考える際， G -作用すべてを考えるのではなく，代わりに \mathfrak{g} -作用と K -作用 (K は G の極大コンパクト部分群) の組を考える方が扱いやすい．この表現空間は H^∞ でもよいが，さらに少しだけ小さくして K -有限なベクトルの空間

$$H_K = \{v \in H \mid \dim(\pi(K)v) < \infty\}$$

を考えた方がよい．例えば H が許容的のとき， K 表現で分解して $H = \hat{\bigoplus}_\delta m(\delta)H_\delta$ と表わされるならば， $H_K = \bigoplus_\delta m(\delta)H_\delta$ である． $H_K \subset H^\infty$ かつ， H_K は H の中で dense であることが示される．

このようにして与えられる \mathfrak{g} と K の作用の入ったベクトル空間 H_K を一般に (\mathfrak{g}, K) -加群と呼ぶ． H が G -表現として既約であることと H_K が (\mathfrak{g}, K) -加群として既約であることは同値である．なお抽象的な (\mathfrak{g}, K) -加群の定義は [Ma] を参照のこと．

以上の表現論的な準備を踏まえて， $f \in M_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して $X_- \cdot \varphi_f = 0$ が成り立つことを証明してみよう． $X_- \in \mathfrak{g}$ の作用は (3.1) で与えられている． $z = x + yi \in \mathbb{H}$ に対して， $g_z = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$ とおくと $g_z(i) = z$ である．岩澤分解から任意の $g \in G$ は $g = g_z r_\theta$ と書けるが， φ_f に K が指標で作用すること及び $r_\theta X_- r_\theta^{-1} = e^{-2i\theta} X_-$ に注意すると，結局 $g = g_z$ について調べれば十分であることが分かる．

$$X_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と分解して，各行列を簡単のため A, B, C で表す．このとき

$$\begin{aligned} A \cdot \varphi_f(g) &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_f \left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{kt} y^{k/2} f(x + iye^{2t})) \\ &= \frac{k}{2} y^{k/2} f(z) + y^{k/2+1} \frac{\partial}{\partial y} f(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \cdot \varphi_f(g) &= \frac{i}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_f \left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{i}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} y^{k/2} f(x - ty + iy) \\
&= -\frac{iy^{k/2+1}}{2} \frac{\partial}{\partial x} f(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C \cdot \varphi_f(g) &= \frac{i}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_f \left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{i}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (-ti + 1)^{-k} y^{k/2} f \left(x - \frac{ty}{t^2 + 1} + i \frac{y}{t^2 + 1} \right) \\
&= -\frac{k}{2} y^{k/2} f(z) - \frac{iy^{k/2+1}}{2} \frac{\partial}{\partial x} f(z)
\end{aligned}$$

である．よって f の正則性より

$$X_- \cdot \varphi_f(g) = -iy^{k/2+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z) = 0$$

が成り立つ． □

3.3 表現論からみた保型形式の空間

$f \in S_k(\Gamma_0(N))$ とすると，命題 2.1 から $\varphi_f \in L^2(\Gamma \backslash G)$ であることが分かる．すでに述べたように G は Hilbert 空間 $L^2(\Gamma \backslash G)$ に右正則表現として作用しているから，その K -有限部分空間 $L^2(\Gamma \backslash G)_K$ は (\mathfrak{g}, K) -加群になっている．では， φ_f によって生成される (\mathfrak{g}, K) -加群は，一体どのようなものであろうか？ 実は以下のようにして与えられるような，既約 (\mathfrak{g}, K) -加群が存在する．

正則離散系列

$$H = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad X_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

とおく．これは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底であるが，さらにいわゆる SL_2 -triple の関係式

$$[X_+, X_-] = H \quad [H, X_+] = 2X_+ \quad [H, X_-] = -2X_-$$

を満たす． $\exp(i\theta H) = r_\theta \in K$ に注意すると， (\mathfrak{g}, K) -加群 V の元 v がウェイト m の固有ベクトル，つまり $r_\theta v = e^{im\theta} v$ を満たすならば， $Hv = mv$ であり， X_+v, X_-v はそれぞれウェイトが $m+2, m-2$ のベクトルになっていることが分かる．

整数 $k \geq 1$ に対して，次の性質を満たす無限次元既約ユニタリ (\mathfrak{g}, K) -加群が存在する：

- 表現空間は $V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{C}v_{k+2m}$ であり, 各 v_n は $r_{\theta}v_n = e^{in\theta}v_n$, よって $Hv_n = nv_n$ を満たす.
- $X_+v_n \in \mathbb{C}v_{n+2}$ かつ $X_-v_n \in \mathbb{C}v_{n-2}$, 特に $X_-v_k = 0$ である.

この表現を \mathcal{D}_k^+ であらわし, $k \geq 2$ のとき正則離散系列(holomorphic discrete series), $k = 1$ のときは離散系列の極限(limit of discrete series)と呼ぶ. 離散系列かそうでないかの違いは, $L^2(G)_K$ の部分表現 ($L^2(G)$ の K -有限部分) として実現できるかできないかの違いである. ウェイトが最小となるベクトル v_k を lowest weight vector と呼ぶ.

\mathcal{D}_k^+ のより詳細な説明や表現の実現などについては, 例えば [Kn, Chapter II, §5-6] を参照のこと.

注 この表現の X_+ と X_- の役割を取り替えたような表現も存在し, 表現空間は $V = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}v_{-k-2m}$ となる. これを反正則離散系列(anti-holomorphic discrete series) といい \mathcal{D}_k^- であらわす.

注 \mathcal{D}_k^+ と同様な $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の作用を持ち, lowest weight k が $k \leq 0$ となるような既約表現を構成しようとするとう有限次元表現になってしまう. 有限次元表現は自明表現を除いてユニタリにならない.

さて, $f \in S_k(\Gamma)$ に対して $\varphi_f \in L^2(\Gamma \backslash G)$ を考えると, 命題 3.1 より φ_f は \mathcal{D}_k^+ の lowest weight vector になっていることが分かる. 以上をまとめて次を得る.

定理 3.2 次の同型射がある.

$$S_k(\Gamma) \simeq \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\mathcal{D}_k, L^2(\Gamma \backslash G))$$

この同型射は, $f \in S_k(\Gamma)$ に対し \mathcal{D}_k の lowest weight vector を φ_f に写すような (\mathfrak{g}, K) -準同型として与えられる.

これで保型形式と $L^2(\Gamma \backslash G)$ の既約部分表現との間に対応ができたが, G の既約表現は正則離散系列だけではなく, 主系列表現と呼ばれるものなど他にもある. それらを扱うために, “保型形式” の概念を少し拡張することにする.

そのために, 命題 3.1 の性質のうち $X_- \cdot \varphi_f = 0$ を別な表し方にしておくと都合がよい. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ で \mathfrak{g} の普遍包絡環を表すとき, $\Delta \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を

$$\Delta = -\frac{1}{4}(H^2 + 2X_+X_- + 2X_-X_+)$$

で定める (行列演算ではなく $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の中での演算であることに注意). この Δ は Casimir 元と呼ばれ, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ とおくと $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\Delta]$ であることが知られている. さてこのとき $f \in M_k(\Gamma)$ に対して

$$\left(\Delta - \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \right) \varphi_f = 0$$

が成り立つ.

注 $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\Delta]$ であるから, Schur の補題より Δ は既約表現に対しては常に定数倍で作用している. X_- の作用を見るよりも Δ の作用を見るほうが, 表現論的にはより正統的な考え方であるといえる.

上記結果を踏まえたうえで, G 上の保型形式を次のように定義する.

定義 3.2 G 上の関数 f が保型形式であるとは次の性質を満たすことである.

(1) f は左 Γ -不変. すなわち $\gamma \in \Gamma, g \in G$ に対して $f(\gamma g) = f(g)$.

(2) f は右 K -有限. すなわち各 $g \in G$ に対して

$$\dim \langle f(gk) \mid k \in K \rangle_{\mathbb{C}} < \infty$$

(3) f は $Z(\mathfrak{g})$ -有限. すなわちある 0 でない多項式 $p(x)$ が存在して, $p(\Delta)f = 0$.

(4) f は緩増大. すなわちある定数 C, M が存在して

$$|f(g)| < C \|g\|^M.$$

この空間を $\mathcal{A}(\Gamma, K)$ で表す. さらに f が cuspidal 条件

$$\int_N f(ng) = 0 \quad \text{a. a. } g,$$

を満たすとき, f を cusp 形式という. cusp 形式の元全体を $\mathcal{A}_0(\Gamma, K)$ で表す.

注 (3) の条件は f が微分可能でないと定義されないように見えるが, 実際には超関数と見ることので, $U(\mathfrak{g})$ の作用はより一般の関数に拡張される. (2), (3) の条件から f が通常の意味で smooth であることが示される (cf. [Bo, Theorem 2.13]).

以下, 表現論の立場から得られる事実をまとめるため, いくつか用語を定義する. $\psi \in L^2(\Gamma \backslash G)$ が命題 3.1 の (5) の性質

$$\int_N \psi(ng) \, dn = 0$$

を満たすとき ψ は cuspidal であるといい, cuspidal な元全体を $L_{\text{cusp}}^2(\Gamma \backslash G)$ で表す. これは G の作用で閉じた空間である. 次に $L^2(\Gamma \backslash G)_K$ の部分表現の直和を $L_{\text{disc}}^2(\Gamma \backslash G)_K$ で表す. すなわち

$$L_{\text{disc}}^2(\Gamma \backslash G)_K = \bigoplus_{\substack{V \subset L^2(\Gamma \backslash G)_K \\ V: \text{既約}}} V$$

である. $L^2(\Gamma \backslash G)$ は一般に完全可約な表現ではないので, $L_{\text{disc}}^2(\Gamma \backslash G)_K \neq L^2(\Gamma \backslash G)_K$ である.

定理 3.3 (1) $L_0^2(\Gamma \backslash G)$ は (\mathfrak{g}, K) -加群に重複度有限で既約分解される．すなわち

$$L_0^2(\Gamma \backslash G)_K = \bigoplus_{\pi: \text{既約}} m(\pi) V_\pi, \quad m(\pi) < \infty$$

である．

(2) (\mathfrak{g}, K) -加群の直和分解

$$L_{\text{disc}}^2(\Gamma \backslash G)_K = L_0^2(\Gamma \backslash G)_K \oplus H_{\text{res}}$$

が成り立つ．ここで H_{res} は Eisenstein 級数の residue から決まる部分空間であり，自明表現といくつかの補系列表現との直和で表される．特に $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ のときは自明表現 \mathbb{C} と一致する．

後半の主張は例えば [Bo, Theorem 16.6] 参照．

4 アデール上の保型形式

4.1 アデール上への持ち上げ

前節で保型形式を $SL(2, \mathbb{R})$ 上の関数に持ち上げて解析をしたが，Hecke 理論， L -関数などを取り扱うためにはさらにこれをアデール上に持ち上げると便利である．Hecke 作用素は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ の形の行列を取り扱うため， $SL(2)$ よりも $GL(2)$ の方が都合がよい．

以下前節までと記号を変えて， $G = GL(2)$ とし， $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ を \mathbb{Q} 上のアデール環， $\mathbb{A}_f = \prod'_{p < \infty} \mathbb{Q}_p$ ， $G_{\mathbb{Q}} = GL(2, \mathbb{Q})$ とおく．また， $G_{\infty} = GL(2, \mathbb{R})$ ， $G_{\infty}^+ = GL^+(2, \mathbb{R}) := \{\gamma \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det \gamma > 0\}$ とし， $G_{\mathbb{A}_f}$ で $G_{\mathbb{A}}$ の G_{∞} -成分が 1 であるものを表す．

K_0 を $G_{\mathbb{A}_f}$ の開コンパクト部分群で， $\det : K_f \rightarrow \mathbb{A}^{\times}$ が全射であるものとする．このとき，以下の分解が成り立つ (強近似定理) ．

$$G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{Q}} G_{\infty}^+ K_0 \tag{4.1}$$

この分解がアデール上での理論を展開する一つの大きなキーポイントである．

命題 4.1 上記の仮定の下で $\Gamma' = K_0 \cap SL(2, \mathbb{Q})$ を数論的部分群とすると，解析的同相

$$\Gamma' \backslash \mathbb{H} \simeq G_{\mathbb{Q}} R_+^{\times} \backslash G_{\mathbb{A}} / K_0$$

が成り立つ．

ここまで見てきたとおり，アデール上で理論を展開する場合，実リー群上での話と大きく違ってくるのが離散部分群の取り扱いである．リー群上では $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ という空間上での関数を考察したが， $G_{\mathbb{A}}$ の離散部分群は $G_{\mathbb{Q}}$ であり，レベル構造はここからは見えてこない．アデール上ではコンパクト部分群が大きな役割を果たし，レベル構造を考えることは「どのようなコンパクト群の表現で分解するか」という問題に帰着される．別の言い方をすれば，多くの離散群の場合を統一的に扱えるのがアデール上での理論ということができる．

Example 4.2 N を自然数とし ,

$$K_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \widehat{\mathbb{Z}}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\} = \prod_{p \nmid N} GL_2(\mathbb{Z}_p) \times \prod_{p|N} K'_p$$

(ただし $K'_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}_p) \mid c \equiv 0 \pmod{p} \right\}$) とする . このとき

$$\Gamma' = K_0(N) \cap SL(2, \mathbb{Q}) = \Gamma_0(N)$$

となる .

上記の同相写像を用いて , 古典的な保型形式をアデル上の関数として持ち上げることができる .

状況をはっきりさせるため , 以下では指標付きの保型形式を扱う . すなわち ψ を $\text{mod} N$ の Dirichlet 指標として , $f \in M_k(\Gamma_0(N), \psi)$ を考える . このとき ψ は \mathbb{A}^\times 上の指標 ω_ψ を

$$\omega_\psi: \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{A}^\times / \mathbb{Q}^\times \mathbb{R}_+^\times = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \prod_{p|N} \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}_1^\times$$

のようにして引き起こす . ω_ψ はまた $K_0(N)$ の指標

$$\omega_\psi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \omega_\psi(d) \in \mathbb{C}_1^\times$$

に拡張される .

命題 4.3 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して $G_\mathbb{A}$ 上の関数 Φ_f を以下のように定める . (4.1) の分解に従い $G_\mathbb{A} \ni g = \gamma g_\infty k_0$ と書くとき

$$\Phi_f(g) = f(g_\infty(i)) j(g_\infty, i)^{-k} \omega_\psi(k_0)^{-1}$$

と定める . これは well-defined であり , さらに次の性質を満たす .

- (i) $\gamma \in G_\mathbb{Q}$ に対して $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ (左 $G_\mathbb{Q}$ -不変)
- (ii) $k_0 \in K_0(N)$ に対して $\Phi_f(g k_0) = \Phi(g) \omega_\psi(k_0)^{-1}$
- (iii) $\Phi_f(g r_\theta) = e^{ik\theta} \Phi_f(g)$
- (iv) Φ_f は G_∞^+ 上の関数と見なすと smooth であり

$$\Delta \Phi_f = \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \Phi_f$$

が成り立つ .

(v) $z \in Z_{\mathbb{A}} \simeq \mathbb{A}^\times$ に対して $\Phi_f(zg) = \omega_\psi(z)^{-1}\Phi(g)$

(vi) Φ_f は以下の意味で緩増大．すなわち任意の $c > 0$ と $G_{\mathbb{A}}$ のコンパクト集合 Ω に対してある C と N が存在し, $g \in \Omega$ 及び $|a| > c$ なる $a \in \mathbb{A}^\times$ に対して

$$\Phi_f \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \leq C|a|^N$$

が成り立つ．

(vii) $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ であるならば,

$$\int_{\mathbb{Q}/\mathbb{A}} \Phi_f \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0 \quad \text{a.a. } g$$

が成り立つ．

上記の命題で, (ii), (iii) を $K = K_\infty K_0(1)$ -有限, (vi) を $Z(\mathfrak{g})$ -有限という条件に置き換えれば, より一般の保型形式の定義が得られる．

上の命題から次が分かる． ω を Hecke 指標 $\omega: \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{C}_\times^1$ とするとき $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ を以下の条件を満たす $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数のなす空間とする．

1. $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$
2. $z \in Z_{\mathbb{A}}$ に対して $\Phi(zg) = \omega(z)\Phi(g)$
3. $\int_{Z_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}} |\Phi(g)|^2 dg < \infty$

すると, $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して $\Phi_f \in L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega_\psi^{-1})$

4.2 $G_{\mathbb{A}}$ の表現と Hecke 作用素

上の議論から, 表現論的に保型形式を捉えるためには, $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ という空間への $G_{\mathbb{A}}$ の右移動による表現を考えればよいことが分かる．ごく大雑把に言うと $G_{\mathbb{A}}$ の適切な表現は, $G_\infty = GL(2, \mathbb{R})$ の表現と $G_p = GL(2, \mathbb{Q}_p)$ との表現の無限個のテンソル積で表示することができる．このうち G_∞ の表現については命題 4.3 の (iii), (iv) などから分かる通り, 第 2 節で見てきた理論がほぼそのまま使える．よって G_p の表現がどうなるかを考えよう．

G_p の表現についても, (\mathfrak{g}, K) -加群で考えたのと同様に「許容的」という概念がある．すなわち G_p の表現 (π, V) を $K_p = GL(2, \mathbb{Z}_p)$ の表現で分解したとき

$$V = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}_p} V(\sigma), \quad \dim V(\sigma) < \infty$$

の形に表わされるとき, V を許容的であるという (最初から代数的直和を考えていることに注意). このときコンパクト台を持つ両側 K -不変な局所定数関数 f をとると (このような f 全体に畳み込みで積を入れたものを G_p の Hecke 環と呼ぶ) と

$$\pi(f)v = \int_{G_p} f(g)\pi(g)v dg$$

は実質有限和となり意味を持つ. 特に (π, V) として $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ を考えると $\pi(f)\Phi$ は $\widehat{f}(g) = f(g^{-1})$ と Φ の畳み込みになることに注意する.

次の命題により, G_p の表現は Hecke 環の作用に対応していることが分かる.

命題 4.4 $\Phi \in L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}})$ に対して (中心指標 ω は自明であるとする) $\widetilde{T}(p)\Phi$ を Φ と $H_p = K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p$ の特性関数との畳み込みをとったものとする. すなわち

$$\widetilde{T}(p)\Phi = \int_{H_p} \Phi(gh) dh \quad (4.2)$$

このとき $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ に対して

$$p^{k/2-1}\widetilde{T}(p)\Phi_f = \Phi_{T_p f}$$

が成り立つ.

証明) $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ に対して (4.2) の積分を計算する. $g \in G_{\mathbb{A}}$ を (4.1) に従い $g = \gamma g_{\infty} k$ ($\gamma \in G_{\mathbb{Q}}, g_{\infty} \in G_{\infty}, k \in K_0(N)$) と分解する. Φ_f は左 $G_{\mathbb{Q}}$ 不変より $\gamma = 1_2$ としてよい. また, h を適当に変数変換すれば, k の p -成分ははじめから 1_2 であると仮定してよい. $p \nmid N$ とする ($p|N$ の場合も同様). H_p を左から K_p で分解すると

$$H_p = \prod_{b=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p \Pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K_p$$

となる. 中心指標 $\omega = \omega_p^{-1}$ が自明であるから, (4.2) の積分は

$$\widetilde{T}(p)\Phi_f(g) = \sum_{b=0}^{p-1} \Phi_f \left(g \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \Phi_f \left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

となる. ここで K_p 上の Haar 測度は $\text{vol}(K_p) = 1$ となるようにとっている. 関数 Φ_f を f を使って書きなおすため, 中身を $G_{\mathbb{Q}}G_{\infty}K_0(N)$ の形で記述したい. $\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は p -成分のみこの形であり, 他の成分は 1_2 であるような $G_{\mathbb{A}}$ の元であることに注意. $g \in G_{\mathbb{A}}$ の p -成分は 1_2 であると仮定したから, $\gamma = \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{Q}}$ ととればよい. よって

$$g \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{\infty} k_p \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} p^{-1} & bp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\infty} g_{\infty} k'_0 k_0$$

となる．ただし k'_0 は p -成分が 1_2 , その他の成分が $\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ となるような $K_0(N)$ の元である．これより

$$\Phi_f \left(g \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = p^{k/2-1} f \left(\frac{z+b}{p} \right)$$

が成り立つ (ただし $g_\infty(i) = z$ とおいた) . 同様にして

$$\Phi_f \left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \right) = p^{k/2} f(pz)$$

も成り立つので命題を得る . □

注 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して上記の命題を考えるには , 少し修正がある . $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega_\psi^{-1})$ への $G_{\mathbb{A}}$ の右移動による表現を R と書き , H_p 上に台を持つ関数 h を

$$h \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \omega_\psi(d)$$

で定義したとき , $R(h)\Phi_f$ がスカラー倍のずれを除いて Hecke 作用素になっていることが分かる .

最後に第 1 節の系 2.4 に対応するものを述べておこう . $L^2_0(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ で $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ の cuspidal な関数全体を表す . これの $G_{\mathbb{A}}$ への右移動による表現を R_ω^0 で表すことにする .

定理 4.5 (重複度 1 定理) $G_{\mathbb{A}}$ の表現 $(R_\omega^0, L^2_0(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega))$ は既約表現の直和に分解され , 各既約表現の重複度は高々 1 である .

この証明は , Φ の Fourier 展開の係数が Whittaker 関数になること , 及び Whittaker 模型の一意性を示すという方針で行われる . 詳しくは [Ko] などを参考にされたい . なお Whittaker 模型の一意性に関して , 実素点上ではこれは , 本質的に微分方程式の緩増大な解の一意性の問題に帰着される .

参考文献

- [AL] A.O.L. Atkin and J. Lehner “Hecke operators on $\Gamma_0(m)$ ”, Math. Ann. **185** (1970), p134-160.
- [Bo] A. Borel, “Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$ ”, Cambridge Tracts in Mathematics, **130**. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [Bu] D. Bump, “Automorphic forms and representations”, Cambridge University Press, (1997).

- [Ge] S.S.Gelbart. “Automorphic forms on adèle groups”, Annals of Math.Studies. Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, N.J., **83**, 1975.
- [JL] H. Jacquet, and R.P. Langlands, “Automorphic forms on $GL(2)$ ”, Lecture notes in Mathematics 114, (1970) Springer Verlag.
- [Kn] A.W. Knap, “Representation theory of semisimple groups”, An overview based on examples. Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.
- [Ko] 今野拓也, 「 GL_2 上の保型形式とその標準 L 関数」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), p37-136.
- [Ma] 松本久義, 「Weil 表現と Howe duality」, 本報告集 .
- [Mo] 森山知則, 「保型形式の空間と Hecke 作用素」, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバー跡公式入門」報告集 (2010), p1-20.