

# Shimura 対応

坂田 裕 (早稲田大学高等学院)

## 1 導入

Riemann zeta 関数の関数等式に自然に現れる Theta 級数や, 無限積表示から諸分野で重要な働きをする Dedekind  $\eta$  関数などは, 整数ウエイトの保型形式の様な変換法則をみたす. そこで, この様な関数達も保型形式の一部として取り扱うことで, 変換公式を満たす正則関数全体を体系的に理解しようとする発想は極めて自然であるといえよう. ただ, これらのウエイトは一般的に整数にならないために, 保型因子の具体的記述や Hecke 理論の構築など様々な面で大きな困難が生じてしまい, 保型形式の一般論を整数ウエイトの場合の様に展開出来なくさせている.

志村 [14] はこの様な関数を全て Metaplectic 群上の保型形式として捉え直し, それ上で保型形式の一般論を展開することに成功した. さらに, この Metaplectic 群上の保型形式から整数ウエイトの保型形式を具体的に構成してみせたのである (志村対応). この志村対応の発見により, 今日では, Metaplectic 群上の保型形式が整数ウエイトの保型形式を深く理解する上でも必要不可欠なものになってきている.

そこで, 本論説では志村対応について概説していく. なお, 志村対応については, 志村 [14] の他に Koblitz [3] とその邦訳 [4] および第 4, 8 回整数論サマースクール報告集などの詳細な論説が既に数多くあるため, 本稿では証明の細部までには立ち入らず, 大まかな流れが掴める様に簡潔に記述していきたい. そこで, 詳細な証明や具体例, および志村対応の様々な応用についてはこれらの文献を是非参照して頂きたい.

## 2 半整数ウエイトの保型形式

### 2.1 記号の準備

$a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in 2\mathbb{Z} + 1$  ( $b \neq 0$ ) に対して,  $\left(\frac{a}{b}\right)$  は志村によって定義された 2 次剰余記号を表わす;

- (1)  $(a, b) \neq 1$  ならば,  $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ .
- (2)  $b$  が奇素数ならば,  $\left(\frac{a}{b}\right)$  は通常の方剰余記号を表わす.
- (3)  $b > 0$  ならば,  $a \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$  は  $b$  を法とする指標を与える.
- (4)  $a \neq 0$  ならば,  $b \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$  は  $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$  の判別式を導手に持つ指標を与える.
- (5)  $a > 0$  (resp.  $a < 0$ ) のとき  $\left(\frac{-a}{-1}\right) = 1$  (resp.  $-1$ ).
- (6)  $\left(\frac{0}{\pm 1}\right) = 1$ .

なお, 2 次剰余記号の定義同様, 自然数  $N$  を法とする Dirichlet 指標  $\chi$  に対しても,  $(n, N) > 1$  ならば  $\chi(n) = 0$  と定義しておく.

複素数  $z$ ,  $x$  に対して,  $e(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$  かつ  $z^x = \exp(x \log(z))$  とおく. ただし,  $\log(z)$  の分岐は常に  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$  にとるものとする. また,  $\mu(*)$  で Möbius 関数を表わす.

複素上半平面, 複素 1 次元トーラスをそれぞれ  $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ ,  $\mathbb{C}_1^\times = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  で表わす.

$\mathfrak{H}$  上には一般線形群  $GL_2^+(\mathbb{R})$  が次の様に作用する;

$$\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}), \quad z \in \mathfrak{H}.$$

自然数  $N$  に対して, レベル  $N$  の合同部分群, 主合同部分群を

$$\begin{aligned} \Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N) \mid b \equiv 0 \pmod{N} \right\} \end{aligned}$$

でそれぞれ表わし,  $N$  を法とする Dirichlet 指標  $\chi$  の  $\Gamma_0(N)$  での値を

$$\chi(\gamma) = \chi(d), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

で定義する. また,  $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$  とおき, 群指数  $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$  を  $i_N$  とおく.  
本論説を通して中心的な役割を果たす theta 級数を

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z) \quad z \in \mathfrak{H}$$

で定義する.

## 2.2 整数ウエイトの保型形式

$k$  は整数,  $\Gamma$  は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の有限指数部分群,  $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}_1^\times$  は有限位数の指標とする.  $\mathfrak{H}$  上の正則関数  $f$  が次の条件 (1),(2) を共に満たすとき,  $f$  を重さ  $k$ , 指標  $\chi$  の  $\Gamma$  に関する正則保型形式とよぶ;

(1) 任意の  $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  に対して,  $(cz+d)^{-k} f(\alpha(z)) = \chi(\alpha) f$ .

(2)  $f$  は  $\Gamma$  の全ての cusp で正則である.

特に,  $\Gamma$  の全ての cusp で零値をとる正則保型形式を cusp 形式とよぶ. 重さ  $k$ , 指標  $\chi$  の  $\Gamma$  に関する正則保型形式全体や cusp 形式全体のなすベクトル空間をそれぞれ  $M_k(\Gamma, \chi)$ ,  $S_k(\Gamma, \chi)$  で表わす.

## 2.3 Metaplectic 群

整数  $k$  に対して,  $GL_2^+(\mathbb{R})$  の被覆群  $\mathfrak{G}$  を次の様に定義する;

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \mathfrak{G}(k+1/2) \\ &= \left\{ (\alpha, \varphi(z)) \mid \alpha \in GL_2^+(\mathbb{R}), \varphi(z) = t(\det \alpha)^{-k/2-1/4} (cz+d)^{k+1/2} \quad (t \in \mathbb{C}_1^\times) \right\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{G}$  の群演算は  $(\alpha_1, \varphi_1(z)) \cdot (\alpha_2, \varphi_2(z)) = (\alpha_1 \alpha_2, \varphi_1(\alpha_2(z)) \varphi_2(z))$  で与える.  $\mathfrak{G}$  から  $GL_2^+(\mathbb{R})$  への射影  $\text{Pr} : \mathfrak{G} \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  に対して,  $\text{Ker}(\text{Pr}) \cong \mathbb{C}_1^\times$  となることから,  $\mathfrak{G}$  は  $GL_2^+(\mathbb{R})$  の  $\mathbb{C}_1^\times$  による中心拡大になっている.

$\mathfrak{G}$  は  $\mathfrak{H}$  上定義された複素数値関数  $f$  に次の様に作用する ;

$$f|\xi = \varphi(z)^{-1}f(\alpha(z)), \quad \xi = (\alpha, \varphi(z)) \in \mathfrak{G}.$$

$\mathfrak{G}$  の群演算の定義から ,  $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{G}$  に対して常に  $f|(\xi_1\xi_2) = (f|\xi_1)|\xi_2$  が成り立つことに注意する .

**Definition 1.**  $\mathfrak{G}$  の部分群  $\tilde{\Gamma}$  が次の条件 (1),(2),(3) を満たすとき ,  $\tilde{\Gamma}$  を  $\mathfrak{G}$  の Fuchs 群とよぶ ;

- (1)  $\text{Pr}(\tilde{\Gamma})$  は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の有限指数部分群になる .
- (2)  $\text{Pr} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \text{Pr}(\tilde{\Gamma})$  は全単射を与える .
- (3)  $-1 \in \text{Pr}(\tilde{\Gamma})$  ならば ,  $\text{Pr}|_{\tilde{\Gamma}}^{-1}(-1) = \{(-1, 1)\}$ .

**Example 1.**  $4|N$  の仮定の下で ,  $\mathfrak{G}$  上の Fuchs 群を構成する .

$$j(\alpha, z) = \frac{\theta(\alpha(z))}{\theta(z)}, \quad \alpha \in \Gamma_0(4), \quad z \in \mathfrak{H}$$

とおけば , その定義から  $j(\alpha_1\alpha_2, z) = j(\alpha_1, \alpha_2 z)j(\alpha_2, z)$  が成り立ち , さらに *Poisson formula* から

$$j(\alpha, z) = \left(\frac{-1}{d}\right)^{-1/2} \left(\frac{c}{d}\right) (cz + d)^{1/2}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

も得られる .そこで ,  $N$  を法とする *even* な *Dirichlet* 指標  $\chi$  から定まる写像  $\Gamma_0(N) \ni \gamma \mapsto (\gamma, \chi(\gamma)j(\gamma, z)^{2k+1}) \in \mathfrak{G}$  は単射準同型を与えて , かつ  $\chi(-1)j(-1, z)^{2k+1} = 1$  をみたすため ,

$$\tilde{\Gamma}_0(N, \chi) = \left\{ (\alpha, \chi(d)j(\alpha, z)^{2k+1}) \mid \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

は  $\mathfrak{G}$  の Fuchs 群となる .以後 ,  $\alpha \in \Gamma_0(N)$  の  $\mathfrak{G}$  のへの埋め込みを

$$\alpha^* = (\alpha, \chi(d)j(\alpha, z)^{2k+1})$$

とおき ,  $\tilde{\Gamma}_0(N, \chi)$  の主合同部分群を  $\tilde{\Gamma}(N) = \{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma(N)\}$  で定義する .

## 2.4 半整数ウエイトの保型形式

**Definition 2.**  $k$  を整数とし ,  $\tilde{\Gamma}$  を  $\mathfrak{G}$  の Fuchs 群とする .  $\mathfrak{H}$  上の正則関数  $f$  が次の条件 (1),(2) を満たすとき ,  $f$  を重さ  $k + 1/2$  の  $\tilde{\Gamma}$  に関する (正則) 保型形式とよぶ ;

- (1) 任意の  $\xi \in \tilde{\Gamma}$  に対して ,  $f|\xi = f$ .
- (2)  $f$  は  $\text{Pr}(\tilde{\Gamma})$  の全ての cusp で正則である.

特に ,  $\text{Pr}(\tilde{\Gamma})$  の全ての cusp で零値をとる正則保型形式を cusp 形式とよぶ . 重さ  $k + 1/2$  の  $\tilde{\Gamma}$  に関する正則保型形式全体や cusp 形式全体のなすベクトル空間をそれぞれ  $M_{k+1/2}(\tilde{\Gamma})$ ,  $S_{k+1/2}(\tilde{\Gamma})$  で表わす.

また ,  $4|N$  である場合 ,  $M_{k+1/2}(N, \chi) = M_{k+1/2}(\tilde{\Gamma}_0(N, \chi))$ ,  $S_{k+1/2}(N, \chi) = S_{k+1/2}(\tilde{\Gamma}_0(N, \chi))$  とそれぞれおく .

よく知られている様に ,  $S_{k+1/2}(\tilde{\Gamma})$  は Petersson 内積

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{[SL_2(\mathbb{Z}) : \text{Pr}(\tilde{\Gamma})]} \int_{\text{Pr}(\tilde{\Gamma}) \backslash \mathfrak{H}} f(\tau) \overline{g(\tau)} \text{Im} \tau^{k+1/2} \frac{dx dy}{y^2}, \quad f, g \in S_{k+1/2}(\tilde{\Gamma})$$

に関して , 内積空間になる .

**Example 2.**  $\psi$  を  $r$  を法とする原始指標とし,  $\nu$  を  $\psi(-1) = (-1)^\nu$  をみたす 0 か 1 の整数とする. 球関数付き Theta 級数を

$$h(z; \psi) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi(m) m^\nu e(m^2 z)$$

で定義するとき,

$$h(z; \psi) \in M_{\nu+1/2}(4r^2, \psi_\nu), \quad \psi_\nu(d) = \psi(d) \left( \frac{-1}{d} \right)^\nu \text{ は } 4r^2 \text{ を法とする指標}$$

が知られている. 特に,  $\psi = 1$  ならば  $h(z; 1) = \frac{1}{2}\theta(z) \in M_{1/2}(4, 1)$  となり, また  $\psi(m) = \left(\frac{3}{m}\right)$  ならば,

$$h(z; \psi) = \eta(24z) = e(z) \prod_{n \geq 1} (1 - e(24nz)) \in M_{1/2}(4r^2, \psi)$$

となることにも注意したい.

## 2.5 半整数ウエイトの保型形式上の Hecke 理論

$\tilde{\Gamma}$  を  $\mathfrak{G}$  の Fuchs 群とし,  $\text{Pr}(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$  とおく.  $\text{Pr}|_{\tilde{\Gamma}}$  は  $\tilde{\Gamma}$  から  $\Gamma$  の上への群同型写像であるため, この逆同型写像  $\text{Pr}|_{\tilde{\Gamma}}^{-1}$  を  $L: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$  で表わす.

$\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$  を  $\Gamma$  と  $\alpha\Gamma\alpha^{-1}$  が通約可能になるものとし,  $\xi \in \mathfrak{G}$  を  $\text{Pr}(\xi) = \alpha$  を満たすものとする.  $\gamma \in \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$  に対して,  $\text{Pr}(L(\alpha\gamma\alpha^{-1})) = \text{Pr}(\xi L(\gamma)\xi^{-1})$  が成り立つことから,

$$L(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = \xi L(\gamma)\xi^{-1} \cdot (1, t(\gamma)), \quad \gamma \in \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$$

が得られる. ここで,  $\text{Ker}(\text{Pr}) = \{(1, t) \mid t \in \mathbb{C}_1^\times\}$  が  $\mathfrak{G}$  の中心に入るために  $t(\gamma)$  は  $\xi$  の選び方に依らず, 写像  $t: \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha \rightarrow \mathbb{C}_1^\times$  が与えられる.

**Proposition 1.** 上記記号の下で,  $\tilde{\Gamma} \cap \xi^{-1}\tilde{\Gamma}\xi = L(\text{Ker}(t))$  が成り立つ.

従って,  $[\Gamma: \text{Ker}(t)] < \infty$  ならば,  $\tilde{\Gamma}$  と  $\xi\tilde{\Gamma}\xi^{-1}$  は通約可能, すなわち

$$\tilde{\Gamma}\xi\tilde{\Gamma} = \coprod_{\nu: \text{有限直和}} \tilde{\Gamma}\xi_\nu$$

と分解出来る.

さて,  $\alpha$  は上記条件および  $[\Gamma: \text{Ker}(t)] < \infty$  を満たすと仮定する. このとき, 任意の  $f \in M_{k+1/2}(\tilde{\Gamma})$  に対して,

$$f|[\tilde{\Gamma}\xi\tilde{\Gamma}] = \sum_{\nu: \text{有限和}} f|\xi_\nu$$

と定義すれば, この右辺は代表元  $\xi_\nu$  の取り方に依らず,  $M_{k+1/2}(\tilde{\Gamma})$  の元を与えることが分かる.

そこで, この写像をさらに具体的に計算してみる.

(1)  $t$  が非自明な準同型写像の場合.

$$\Gamma = \coprod_{\nu: \text{有限直和}} (\Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha)\gamma_\nu, \quad \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha = \coprod_{\mu: \text{有限直和}} \text{Ker}(t)\delta_\mu$$

と分解出来るため,

$$\tilde{\Gamma} = \prod_{\nu} L(\Gamma \cap \alpha^{-1} \Gamma \alpha) L(\gamma_{\nu}) = \prod_{\nu, \mu} L(\text{Ker}(t)) L(\delta_{\mu} \gamma_{\nu}) = \prod_{\nu, \mu} (\tilde{\Gamma} \cap \xi^{-1} \tilde{\Gamma} \xi) L(\delta_{\mu} \gamma_{\nu}).$$

従って,  $\tilde{\Gamma} \xi \tilde{\Gamma} = \prod_{\nu, \mu} \tilde{\Gamma} \xi \cdot L(\delta_{\mu} \gamma_{\nu})$  を得る. こうして,

$$\begin{aligned} f|[\tilde{\Gamma} \xi \tilde{\Gamma}] &= \sum_{\nu} \left( \sum_{\mu} f|\xi L(\delta_{\mu}) \right) |L(\gamma_{\nu}) \\ &= \left( \sum_{\mu} t(\delta_{\mu}) \right) \left( \sum_{\nu} f|\xi L(\gamma_{\nu}) \right) = 0. \end{aligned}$$

(2)  $t$  が自明な準同型写像の場合.

$L(\alpha \gamma \alpha^{-1}) = \xi L(\gamma) \xi^{-1}$  ( $\gamma \in \Gamma \cap \alpha^{-1} \Gamma \alpha$ ) が成り立つため,  $\text{Pr}$  は  $\tilde{\Gamma} \xi \tilde{\Gamma}$  と  $\Gamma \alpha \Gamma$  の間の全単射を与える. そこで,  $\Gamma \alpha \Gamma = \prod_{\nu} \Gamma \alpha_{\nu}$  と分解出来た場合,  $\tilde{\Gamma} \xi \tilde{\Gamma} = \prod_{\nu} \tilde{\Gamma} \xi_{\nu}$ ,  $\text{Pr}(\xi_{\nu}) = \alpha_{\nu}$  をみたす  $\xi_{\nu} \in \tilde{\Gamma} \xi \tilde{\Gamma}$  が必ずとれる. こうして, 代表系  $\{\xi_{\nu}\}$  を  $\{\alpha_{\nu}\}$  から具体的に構成することで, 写像  $[\tilde{\Gamma} \xi \tilde{\Gamma}]$  を明示することが出来る.

**Example 3.**  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{C}_1^{\times}$ ,  $4|N$  とし,

$$\alpha = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad \xi = \left( \alpha, t \cdot (n/m)^{k/2+1/4} \right) \in \mathfrak{G}$$

とおく. ここで,  $m' = m/(m, n)$ ,  $n' = n/(m, n)$  とおくとき,

$$\xi \gamma^* \xi^{-1} = (\alpha \gamma \alpha^{-1})^* \left( 1, \begin{pmatrix} m' n' \\ d \end{pmatrix} \right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4) \cap \alpha^{-1} \Gamma_0(4) \alpha$$

が成り立つ. そこで,  $m'n'$  が平方数, すなわち  $mn$  が平方数でないならば,  $t(\gamma) = \left( \frac{m'n'}{d} \right)$  は非自明となり,  $f \in M_{k+1/2}(N, \chi)$  に対して,  $f|[\tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \xi \tilde{\Gamma}_0(N, \chi)] = 0$  が得られる. 次に,  $mn$  が平方数である場合,  $t = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = p^2$  ( $p$  は素数) の場合に限って  $f|[\tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \xi \tilde{\Gamma}_0(N, \chi)]$  を計算してみる.

最初に  $\Gamma_0(N) \setminus \Gamma_0(N) \alpha \Gamma_0(N)$  の代表系を具体的に与え, それらの元を個々に被覆群  $\mathfrak{G}$  上に持ち上げることで  $\tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \xi \tilde{\Gamma}_0(N, \chi)$  を分解する;

$$\begin{aligned} & \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \\ = & \begin{cases} \prod_{m \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \right) \prod \left( \prod_{m \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}} \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} p & m \\ 0 & p \end{pmatrix} \right) \right) \prod \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \dots (p, N) = 1 \text{ のとき} \\ \prod_{m \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \right) & \dots p|N \text{ のとき.} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、各代表元の持ち上げは  $\xi = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right)$  を  $\tilde{\Gamma}_0(N, \chi)$  の元でずらして構成する；

$$\begin{aligned} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}} &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right), \\ \widetilde{\begin{pmatrix} p & m \\ 0 & p \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nps & 1 \end{pmatrix}^* \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \begin{pmatrix} p & m \\ -Ns & r \end{pmatrix}^* \quad (pr + Nsm = 1) \\ &= \left( \begin{pmatrix} p & m \\ 0 & p \end{pmatrix}, \bar{\chi}(p) \left( \frac{-1}{p} \right)^{-(k+1/2)} \left( \frac{-m}{p} \right) \right), \\ \widetilde{\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} p^2 & -t \\ N & d \end{pmatrix}^* \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \begin{pmatrix} p^2d & t \\ -N & 1 \end{pmatrix}^* \quad (p^2d + Nt = 1) \\ &= \left( \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p^{-(k+1/2)} \bar{\chi}(p^2) \right). \end{aligned}$$

次に、この片側剰余類分解から、 $f \in M_{k+1/2}(N, \chi)$  に対して、

$$f| \left[ \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \right] = \begin{cases} \sum_{m \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} f| \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) + \sum_{m \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} f| \left( \begin{pmatrix} p & m \\ 0 & p \end{pmatrix}, \bar{\chi}(p) \left( \frac{-1}{p} \right)^{-(k+1/2)} \left( \frac{-m}{p} \right) \right) \\ \quad + f| \left( \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p^{-(k+1/2)} \bar{\chi}(p^2) \right) & \cdots p \nmid N \text{ のとき,} \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} f| \left( \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) & \cdots p|N \text{ のとき,} \end{cases}$$

が得られる。これら各項の Fourier 係数を個別に計算することで、次の Theorem が得られる。

**Theorem 1.** ([Shimura[14]:Theorem 1.7])

$k \in \mathbb{Z}$ ,  $4|N$ , 素数  $p$  に対して、 $M_{k+1/2}(N, \chi)$  上の  $p^2$ -th Hecke 作用素を

$$\tilde{T}(p^2) := p^{k-3/2} \left[ \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \tilde{\Gamma}_0(N, \chi) \right]$$

で定義する。このとき、 $f = \sum_{n \geq 0} a(n)e(nz) \in M_{k+1/2}(N, \chi)$  に対して、 $f|\tilde{T}(p^2) = \sum_{n \geq 0} b(n)e(nz)$  の Fourier 係数  $b(n)$  は次式で与えられる；

$$b(n) = \begin{cases} a(p^2n) + \chi_1(p) \left( \frac{n}{p} \right) p^{k-1} a(n) + \chi(p^2) p^{2k-1} a(n/p^2) & \cdots p \nmid N \text{ のとき,} \\ a(p^2n) & \cdots p|N \text{ のとき,} \end{cases}$$

ただし、 $\chi_1(m) = \chi(m) \left( \frac{-1}{m} \right)^k$  は  $N$  を法とする Dirichlet 指標であり、 $p^2 \nmid n$  の場合、 $a(n/p^2) = 0$  であるとする。

さて,素数  $p$  を動かすとき,  $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}\Gamma_0(N)$  は互いに可換となるため,  $\tilde{\Gamma}_0(N, \chi)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2}\right)\tilde{\Gamma}_0(N, \chi)$ , 即ち  $\tilde{T}(p^2)$  もまた互いに可換となる. 従って, 全ての素数  $p$  に対する  $\tilde{T}(p^2)$  の同時固有関数が  $M_{k+1/2}(N, \chi)$  上に存在する.

**Theorem 2.** ([Shimura[14]:Corollary 1.8]) 任意素数  $p$  に対して,

$$f|\tilde{T}(p^2) = \omega_p f, \quad \omega_p \in \mathbb{C}$$

をみたす保型形式  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)e(nz) \in M_{k+1/2}(N, \chi)$  がとれる. すなわち,  $p|N$  か  $p^2 \nmid t$  という仮定の下で  $(n, p) = 1$  をみたす  $n$  に対して, 漸化式

$$\begin{aligned} \omega_p a(tn^2) &= a(tn^2 p^2) + \chi_1(p) \left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} a(tn^2), \\ \omega_p a(tp^{2m} n^2) &= a(tn^2 p^{2m+2}) + \chi(p^2) p^{2k-1} a(tp^{2m-2} n^2), \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

をみたす  $a(n)$  を Fourier 係数に持つ保型形式  $f$  が存在する. ただし,  $p|N$  でかつ  $\chi$  が自明の場合は,  $\chi(p) = 0$  とする.

Theorem 2 の漸化式から,  $\tilde{T}(p^2)$  ( $p$  は素数) の同時固有関数  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)e(nz) \in M_{k+1/2}(N, \chi)$  と  $(N, t) = 1$  をみたす平方因子を持たない自然数  $t$  から与えられる形式的 Dirichlet 級数  $\sum_{n \geq 1} a(tn^2)n^{-s}$  は Euler 積表示を持つ.

実際, この Dirichlet 級数は, 任意の素数  $p$  に対して

$$\sum_{n \geq 1} a(tn^2)n^{-s} = \sum_{(n, p)=1} \left( \sum_{l \geq 0} a(tn^2 p^{2l}) p^{-sl} \right) n^{-s} = \sum_{(n, p)=1} H_{n, p}(p^{-s}) n^{-s}$$

の様に, 形式的冪級数  $H_{n, p}(x) = \sum_{m \geq 0} a(tp^{2m} n^2) x^m$  を用いて表わされる.

他方, この形式的冪級数は上記漸化式から

$$\begin{aligned} \omega_p x \cdot H_{n, p}(x) &= \omega_p a(tn^2) x + \sum_{m \geq 1} \omega_p a(tp^{2m} n^2) x^{m+1} \\ &= \left( a(tn^2 p^2) + \chi_1(p) \left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} a(tn^2) \right) x \\ &\quad + \sum_{m \geq 1} \left( a(tp^{2m+2} n^2) + \chi(p^2) p^{2k-1} a(tp^{2m-2} n^2) \right) x^{m+1} \\ &= H_{n, p}(x) - a(tn^2) + \chi_1(p) \left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} a(tn^2) x + \chi(p^2) p^{2k-1} x^2 H_{n, p}(x) \end{aligned}$$

すなわち,

$$H_{n, p}(x) \left( 1 - \omega_p x + \chi(p^2) p^{2k-1} x^2 \right) = a(tn^2) \left( 1 - \chi_1(p) \left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} x \right)$$

をみたす.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a(tn^2) n^{-s} &= \left( \sum_{(n, p)=1} a(tn^2) n^{-s} \right) \times \left( 1 - \chi_1(p) \left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1-s} \right) \\ &\quad \times \left( 1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p^2) p^{2k-1-2s} \right)^{-1} \end{aligned}$$

が得られる. 次に,  $\sum_{(n, p)=1} a(tn^2) n^{-s}$  に対して異なる素数毎にこの操作を繰り返していけば, 次の結果が得られる.

**Theorem 3.** ([Shimura[14]:Theorem 1.9])  $t$  は 1 以外の  $N$  と素な平方因子を持たない自然数とする . 任意素数  $p$  に対して ,

$$f|\tilde{T}(p^2) = \omega_p f, \quad \omega_p \in \mathbb{C}$$

をみたす保型形式  $f = \sum_{n \geq 0} a(n)e(nz) \in M_{k+1/2}(N, \chi)$  から得られる形式的 Dirichlet 級数  $\sum_{n \geq 1} a(tn^2)n^{-s}$  は次の Euler 積を持つ ;

$$\sum_{n \geq 1} a(tn^2)n^{-s} = a(t) \prod_{p:\text{素数}} \left( 1 - \chi_1(p) \left( \frac{t}{p} \right) p^{k-1-s} \right) \left( 1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p^2) p^{2k-1-2s} \right)^{-1}.$$

この Euler 積の分母

$$\prod_{p:\text{素数}} \left( 1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p^2) p^{2k-1-2s} \right)^{-1}$$

は  $t$  に依らず , また ,  $M_{2k}(N', \chi^2)$  上の Hecke 固有形式から与えられる Dirichlet 級数の Euler 積表示と同じかたちをしている . この事実気付いた志村は  $f \in S_{k+1/2}(N, \chi)$  の場合におけるこの分母が実際に  $M_{2k}(N', \chi^2)$  上の Hecke 固有形式  $F$  (の Dirichlet 級数) を与えることを証明し ,  $f$  から  $F$  を与える写像 ( Shimura 対応) を具体的に構成したのである .

そこで , この対応について次節で詳しく説明していく .

### 3 Shimura 対応

#### 3.1 Shimura 対応

本節では  $f(z) \in S_{k+1/2}(N, \chi)$  とし ,  $f(z)$  が Theorem 3 と同じ条件をみたすと仮定する . このとき , Theorem 3 から

$$\begin{aligned} a(t) \prod_{p:\text{素数}} \left( 1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p^2) p^{2k-1-2s} \right)^{-1} &= \prod_{p:\text{素数}} \left( 1 - \chi_1(p) \left( \frac{t}{p} \right) p^{k-1-s} \right)^{-1} \sum_{n \geq 1} a(tn^2)n^{-s} \\ &= \left( \sum_{m \geq 1} \chi_1(m) \left( \frac{t}{m} \right) m^{k-1-s} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} a(tn^2)n^{-s} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \chi_1(d) \left( \frac{t}{d} \right) a(tn^2/d^2) d^{k-1} \right) n^{-s} \\ &= \sum_{n \geq 1} A_t(n) n^{-s} \end{aligned}$$

が得られる . そこで , この Dirichlet 級数から与えられる  $F_t(z) = \sum_{n \geq 1} A_t(n)e(nz)$  が  $M_{2k}(N_t, \chi^2)$  (ただし ,  $N_t$  は  $t$  から定まる自然数) の元になることを Weil の逆定理を用いて示してみよう .

#### 3.2 Shimura 対応の証明

最初に Weil の逆定理を準備する (この定理の証明は [10]§4.5 を参照せよ) .



**Theorem 4 (Weil).** 自然数  $M$  を法とする *Dirichlet* 指標  $\varphi$  に対し, *Dirichlet* 級数  $D(s) = \sum_{n \geq 1} a(n)n^{-s}$ , ( $a_n \in \mathbb{C}$ ) が次の 3 条件を全て満たすとき,  $\sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in M_{2k}(M, \varphi)$  が成り立つ.

- (1)  $D(s)$  はある右半平面  $\operatorname{Re}(s) > \sigma$  で絶対収束する.
- (2)  $(a, b) = 1$ ,  $b > 0$  を満たす任意の等差数列  $\{a + bn \mid n \geq 0\}$  と必ず交わりを持つ素数集合  $\mathcal{P}$  をとる.  
 $r \in \{1\} \cup \mathcal{P}$  かつ  $(r, M) = 1$  を満たす任意の  $r$  を法とする原始指標  $\psi$  に対して

$$R(s, \psi) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} \psi(n) a(n) n^{-s}$$

- とおくとき,  $R(s, \psi)$  は全  $s$  平面上に解析接続され, 任意垂直帯状領域  $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$  で有界になる.
- (3) ある右半平面  $\operatorname{Re}(s) > \sigma'$  で絶対収束する *Dirichlet* 級数  $\sum_{n \geq 1} b(n)n^{-s}$  が存在して, (2) で与えた全ての  $\psi$  に対し, 関数等式

$$R(2k - s, \psi) = \left( \frac{\psi(M)\varphi(r)g(\psi)^2}{r} \right) (r^2 M)^{s-k} \sum_{n \geq 1} \bar{\psi}(n) b(n) n^{-s}$$

が成り立つ. ただし,  $g(\psi) = \sum_{i=1}^r \psi(i)e(i/r)$  とする.

**Remark 1.** *Theorem 4* において, *Dirichlet* 級数  $D(s)$  が  $\operatorname{Re}(s) < 2k$  となる  $s$  でも絶対収束するならば,  $\sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in S_{2k}(M, \varphi)$  が成り立つ.

次に, いよいよ Shimura 対応の証明に取り掛かる. ここでは

$$\sum_{n \geq 1} A_t(n) n^{-s} = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \chi_1(d) \left( \frac{t}{d} \right) a(tn^2/d^2) d^{k-1} \right) n^{-s}$$

が *Theorem 4* の 3 条件をそれぞれ満たすことを示すことで  $F_t(z) = \sum_{n \geq 1} A_t(n)e(nz) \in M_{2k}(N_t, \chi^2)$  なることを証明する. なお,  $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in S_{k+1/2}(N, \chi)$  の条件は全て *Theorem 3* と同じとする.

- (1)  $\sum_{n \geq 1} A_t(n) n^{-s}$  の絶対収束性.  $\dots$   $a(n) = O(n^{k/2+1/4})$  に注意すれば,

$$\sum_{n \geq 1} |a(tn^2) n^{-s}| \leq \sum_{n \geq 1} |a(tn^2)| n^{-\operatorname{Re}(s)} \leq \text{const.} \times t^{k/2+1/4} \times \sum_{n \geq 1} n^{(k+1/2)-\operatorname{Re}(s)}.$$

よって,  $\sum_{n \geq 1} a(tn^2) n^{-s}$  は  $\operatorname{Re}(s) > k+3/2$  で絶対収束する. また,  $\sum_{m \geq 1} \chi_1(m) \left( \frac{t}{m} \right) m^{k-1-s}$  も  $\operatorname{Re}(s) > k$  で絶対収束するため,  $\sum_{n \geq 1} A_t(n) n^{-s}$  は右半平面  $\operatorname{Re}(s) > k+3/2$  で絶対収束する.

- (2) 1 または  $N$  を割らない奇素数  $r$  を法とする原始指標  $\psi$  に対して,

$$D_t(s, \psi) = \sum_{n \geq 1} \psi(n) A_t(n) n^{-s}$$

の, 全  $s$  平面への正則関数としての解析接続性および任意の垂直帯状領域上での有界性.  $\dots$

$t$  が一般の場合は  $t = 1$  の場合に帰着させられるため,  $t = 1$  の場合を示せばよい. 形式的な計算から

$$D_1(s, \psi) = \sum_{n \geq 1} \psi(n) A_1(n) n^{-s} = \left( \sum_{m \geq 1} \psi(m) \chi_1(m) m^{k-1-s} \right) \cdot \left( \sum_{m \geq 1} \psi(m) a(m^2) m^{-s} \right)$$

が得られるため，右辺の Dirichlet 級数を Rankin の手法に従って積分表示してみる．

$$\begin{aligned}
& (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{m \geq 1} \psi(m) a(m^2) m^{-s} \\
&= \int_0^\infty \left( \int_0^1 f(z) \bar{h}(z; \bar{\psi}) dx \right) y^{s-1} dy \\
&= \int_{\Gamma_\infty \backslash \mathfrak{H}} f(z) \bar{h}(z; \bar{\psi}) y^{s+1} \frac{dx dy}{y^2} \\
&= \int_{\Gamma_0(Nr^2) \backslash \mathfrak{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(Nr^2)} f(\gamma(z)) \bar{h}(\gamma(z); \bar{\psi}) \text{Im}(\gamma(z))^{s+1} \frac{dx dy}{y^2} \\
&= \int_{\Gamma_0(Nr^2) \backslash \mathfrak{H}} f(z) \bar{h}(z; \bar{\psi}) y^{s+1} \left( \sum_{\substack{(c,d)=1, c \equiv 0 \pmod{Nr^2} \\ c > 0 \text{ if } c \neq 0, d=1 \text{ if } c=0}} \varphi(d) (cz+d)^{k-\nu} |cz+d|^{2\nu-1-2s} \right) \frac{dx dy}{y^2},
\end{aligned}$$

ただし， $\varphi(d) = \chi(d) \psi(d) \left(\frac{-1}{d}\right)^k$ ，と変形出来る．そこで，

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} \psi(n) A_1(n) n^{-(2s-\nu)} \\
&= \int_{\Gamma_0(Nr^2) \backslash \mathfrak{H}} f(z) \bar{h}(z; \bar{\psi}) y^{s+1} \left( \sum_{m \geq 1} \varphi(m) m^{k+\nu-1-2s} \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (Nr^2 m, n)=1}} \varphi(n) (Nr^2 m z + n)^{k-\nu} |Nr^2 m z + n|^{2\nu-1-2s} \right) \frac{dx dy}{y^2} \\
&= \int_{\Gamma_0(Nr^2) \backslash \mathfrak{H}} f(z) \bar{h}(z; \bar{\psi}) y^{s+1} \left( \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0,0)}} \varphi(n) (Nr^2 m z + n)^{k-\nu} |Nr^2 m z + n|^{2\nu-1-2s} \right) \frac{dx dy}{y^2}.
\end{aligned}$$

となる．この積分内の無限級数

$$C(z, s) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0,0)}} \varphi(n) (Nr^2 m z + n)^{k-\nu} |Nr^2 m z + n|^{2\nu-1-2s}$$

は解析的 Eisenstein 級数であり， $\varphi$  が原始指標である場合，その性質が詳しく調べられている；

**Lemma 1.** ([Shimura[14]; Lemma 3.1])  $A$  は正整数とし， $\varphi$  は  $A$  を法とする原始指標とする． $\alpha$  は非負整数とし，さらに  $A=1$  の場合は  $\alpha > 0$  と仮定する．このとき，

$$H_\alpha(s, z, \varphi) = \pi^{-s} \Gamma(s) y^s \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0,0)}} \varphi(n) (Amz + n)^\alpha |Amz + n|^{-2s}$$

は  $\text{Re}(s) > \frac{\alpha}{2} + 1$  で絶対収束し，整関数として全  $s$  平面に解析接続され，関数等式

$$H_\alpha(\alpha + 1 - s, z, \varphi) = (-1)^\alpha \mathfrak{g}(\varphi) A^{3s-\alpha-2} z^\alpha H_\alpha\left(s, -\frac{1}{Az}, \bar{\varphi}\right), \quad \mathfrak{g}(\varphi) = \sum_{k=1}^A \varphi(k) e(k/A)$$

をみたく．また， $\alpha = k - l \geq 0$ ， $4A|B$  と仮定した上で  $f \in S(k + 1/2, \tilde{\Gamma}(B))$ ， $g \in M(l + 1/2, \tilde{\Gamma}(B))$  をとるとき，任意の  $s \in \mathbb{C}$  に対して

$$\int_{\Gamma(B) \setminus \mathfrak{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{l+1/2} H_\alpha(s, z, \varphi) \frac{dx dy}{y^2}$$

は絶対収束し，かつ  $s$  の関数として任意の垂直帯状領域で有界となる．

この Lemma 1 を用いるために  $\varphi$  が誘導する原始指標  $\varphi_0$  を用いて解析的 Eisenstein 級数  $C(z, s)$  を書き直す． $\chi_1(m) = \chi(m) \left(\frac{-1}{m}\right)^k$  の導手を  $M$  とおき， $N = MK$  と分割する．次に  $E = \prod_{\substack{p: \text{素数} \\ p|N, p|M}} p$  とおけば，

$$\begin{aligned} C(z, s) &= \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \left( \sum_{0 < l | (n, E)} \mu(l) \right) \varphi_0(n) (Nr^2 m z + n)^{k-\nu} |Nr^2 m z + n|^{2\nu-1-2s} \\ &= \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \sum_{\substack{0 < l | (n, E) \\ n = l n', K = l l'}} \mu(l) \varphi_0(l) l^{k+\nu-1-2s} \varphi_0(n') (Ml' r^2 m z + n')^{k-\nu} |Ml' r^2 m z + n'|^{2\nu-1-2s} \\ &= \sum_{0 < l | E} \mu(l) \varphi_0(l) l^{k+\nu-1-2s} \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \varphi_0(n) (Ml' r^2 m z + n)^{k-\nu} |Ml' r^2 m z + n|^{2\nu-1-2s}. \end{aligned}$$

従って， $2t = 2s - 2\nu + 1$  とおくことで

$$\begin{aligned} &2 \cdot (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \pi^{-t} \Gamma(t) D_1(2s - \nu, \psi) \\ &= (Kr)^{-t} \sum_{0 < l | E} \mu(l) \varphi_0(l) l^{k-s-1/2} \int_{\Gamma_0(Nr^2) \setminus \mathfrak{H}} f(z) \overline{h(z; \overline{\psi})} y^{\nu+1/2} H_{k-\nu}(t, (K/l)rz, \varphi_0) \frac{dx dy}{y^2} \end{aligned}$$

と変形出来る．こうして，Lemma 1 から  $R_1(s, \psi) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) D_1(s, \psi)$  は全  $s$  平面へ正則関数として解析接続され，任意の垂直帯状領域上での有界となる．

(3) (2) の  $r, \psi$  に対して  $R_t(s, \psi) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) D_t(s, \psi)$  とおくとき，

$$R_t(2k - s, \psi) = \left( \frac{\psi(N_t) \chi^2(r) \mathfrak{g}(\psi)^2}{r} \right) (r^2 N_t)^{s-k} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} \overline{\psi}(n) b_n n^{-s}$$

をみたく自然数  $N_t$  と右半平面で絶対収束する Dirichlet 級数  $D(s) = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}$  の存在性． …

この場合も  $t = 1$  の場合に容易に帰着出来るため， $t = 1$  の場合における概略のみ示す．

変数変換  $s \mapsto k + \nu - s$  を行うとき， $2 \cdot (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \pi^{-t} \Gamma(t) D_1(2s - \nu, \psi)$  の積分項

$$\int_{\Gamma_0(Nr^2) \setminus \mathfrak{H}} f(z) \overline{h(z; \overline{\psi})} y^{\nu+1/2} H_{k-\nu}(t, (K/l)rz, \varphi_0) \frac{dx dy}{y^2} \quad (3.1)$$

が，(ある右半平面で絶対収束する) Dirichlet 級数で表わせればよい．この変数変換により， $t = s - \nu + 1/2 \mapsto -t + (k - \nu) + 1$  となるため，Lemma 1 を用いれば，

$$H_{k-\nu} \left( (k - \nu) + 1 - t, \frac{Krz}{l}, \varphi_0 \right) = (-1)^{k-\nu} \mathfrak{g}(\varphi_0) (Mr)^{3t-(k-\nu)-2} \left( \frac{Krz}{l} \right)^{k-\nu} H_{k-\nu} \left( t, \frac{-l}{Nr^2 z}, \overline{\varphi_0} \right)$$

となる．そこで，(3.1) において変数変換  $z \mapsto -1/Nr^2z$  を行うことを考える．この変換は明らかに Atkin-Lehner 型作用素で表わせるため，

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{-1}{Nr^2z}\right) \bar{h}\left(\frac{-1}{Nr^2z}; \bar{\psi}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{-1}{Nr^2z}\right)^{\nu+1/2} \\ &= \left(N^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}(-\sqrt{-1}r^2z)^{k+\frac{1}{2}}g(r^2z)\right) \overline{(-\sqrt{-1})^\nu r^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{g}(\bar{\psi})\left(\frac{-2rN\sqrt{-1}z}{4}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}h\left(\frac{N}{4}z; \psi\right)\operatorname{Im}\left(\frac{-1}{Nr^2z}\right)^{\nu+1/2}} \\ &= \left(N^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(-\sqrt{-1})^{k+1}r^{2k-\nu}}{2}\overline{\mathfrak{g}(\bar{\psi})}(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\right) z^{k-\nu}g(r^2z)h\left(\frac{N}{4}z; \psi\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ただし， $g(z) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}, N^{k/2+1/4}(-\sqrt{-1}z)^{k+1/2}\right) \in S_{k+1/2}(N, \bar{\chi}\left(\frac{N}{\cdot}\right))$ ，が得られる．こうして，

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\bar{h}(z; \bar{\psi})y^{\nu+1/2}H_{k-\nu}(-t+(k-\nu)+1, (Krz/l), \varphi_0)\frac{dx dy}{y^2} \\ &= (\text{elementary constant factor}) \times \int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} g(r^2z)h\left(\frac{N}{4}z; \psi\right)y^{\nu+\frac{1}{2}}H_{k-\nu}(t, (K/l)rz, \varphi_0)\frac{dx dy}{y^2} \end{aligned}$$

となる．この右辺の積分項は (3.1) と同じかたちをしているため，(2) と全く同じ議論を繰り返すことで，右半平面で絶対収束する Dirichlet 級数を用いて表わすことが出来る (詳細は [14] を参照せよ)．

以上 (1), (2), (3) から  $D_t(s, \psi)$  は十分多くの関数等式を持つ整函数に解析接続されるため，Weil の逆定理から  $F_t(z) = \sum_{n \geq 1} A_t(n)e(nz) \in M_{2k}(N_t, \chi^2)$  が得られる．

**Remark 2.** この証明から分かる様に，Dirichlet 級数  $D_t(s, \psi)$  が全ての素数に関する無限積を持つ必要性は実はない．すなわち， $f \in S_{k+1/2}(N, \chi)$  が， $p \nmid \operatorname{cond}(\chi_t)$  をみたす  $N$  の全ての素因子  $p$  における  $\tilde{T}(p^2)$  の同時固有関数であるならば， $D_t(s, \psi)$  は上記積分表示を持ち，同じ結果が得られる．

以上の結果をまとめ直してみよう．

**Theorem 5.** ([Shimura[14]; Main Theorem])  $k, N \in \mathbb{N}$  で  $4|N$  とし， $\chi$  は  $N$  を法とする (*even* な) Dirichlet 指標とする． $t$  は平方因子を持たない正整数とし， $\chi_t(m) = \chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k\left(\frac{t}{m}\right)$  は法  $tN$  の Dirichlet 指標とする．ここで， $f = \sum_{n \geq 1} a(n)e(nz) \in S_{k+1/2}(N, \chi)$  が， $p|N$ ， $p \nmid \operatorname{cond}(\chi_t)$  をみたす全ての素数  $p$  における  $\tilde{T}(p^2)$  の同時固有関数であるとき，

$$S_{k, N}^{t, \chi}(f) = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \chi_t(d)a(tn^2/d^2)d^{k-1} \right) e(nz)$$

は，ある自然数  $N_t$  をとって  $M_{2k}(N_t, \chi^2)$  上の Hecke 同時固有形式となる．また， $k \geq 2$  である場合， $\sum_{n \geq 1} A_t(n)n^{-s}$  は  $2k > \operatorname{Re}(s) > k + 3/2$  で絶対収束するため， $f$  は  $S_{2k}(N_t, \chi^2)$  上の Hecke 同時固有形式になる．

Theorem 5 で与えられたレベル  $N_t$  を具体的に決定するためには，上記 (3) で示した  $R_t(2k-s, \psi)$  の関数等式の中に現れる定数  $M$  を具体的に求める必要がある． $M$  は，(3) の積分項を通して詳細な計算から求められ (ただし，関数等式の設定から， $M$  は一通りには決まらない)，その中の最小値を  $N_t$  とするとき，これは次式で与えられる；

$\chi_t(m) = \chi(m) \left(\frac{-1}{m}\right)^k \left(\frac{t}{m}\right)$  の導手を  $M_t$ , また  $t_2 = (t, N)$  とおき,  $\chi'(m) = \chi(m) \left(\frac{t_2}{m}\right)$  の導手を  $M'$  とする. ここで,  $\nu(2) = 4, \nu(3) = 2, \nu(p) = 1 (p > 3)$  をみたす数列  $\nu(n)$  に対して, 2つの正整数

$$H = \prod_{p|N, p|M_t} p^{\nu(p)}, \quad K_0 = \prod_{\substack{p|H \\ (f|\tilde{T}(p^2))/f \neq 0}} p$$

を定義する. さらに,  $N^* = [N, H^2, M']$  としたとき,  $N_t = N^*/2K_0$  と取れる.

なお, ここで与えられた  $N_t$  は実は Best possible ではない. そこで, 次節では, 志村対応を別の角度から眺めて  $N_t$  の Best possible を求めていく.

## 4 Shimura 対応の積分表示

### 4.1 Theta Kernel による積分表示

Niwa, Kojima, Cipra によって 志村対応は Theta Kernel を用いた積分で定式化され, その応用として ( $k = 1$  の場合を含む) 全ての場合において,  $N_t$  として  $N/2$  がとれることが示された (ただし,  $S_{k+1/2}(N, \chi)$  を, より小さな部分空間に制限すれば,  $N_t$  としてより小さな整数がとれる場合もある). また,  $k = 1$  の場合では, 志村対応で cusp 形式に移る  $S_{k+1/2}(N, \chi)$  の部分空間も特徴付けられた. この様に 志村対応の積分表示を与えれば, (核関数の性質から)  $N_t$  の Best possible が直接求められる. ただ, 上記一連の論文で与えられた積分表示では, Metaplectic 群の表現と直交群の表現から作られる Theta Kernel 自体は非正則であるために, その挙動 (これが与えられることで志村対応による像の cusp での値が内積表示出来る) や Theta Kernel を用いた積分の正則性などを地道に調べなければならず, 若干見通しが悪い部分がある. 他方, Zagier は Doi-Naganuma 対応の積分表示を与える正則な核関数を構成し, その変数を対角的に制限することで志村対応の積分表示も同時に与えられることに気付いた. そこで, 本節では Zagier の与えた志村対応の積分表示について紹介し, それを基に  $N_t$  がどの様にとれるのかについて説明する.

なお, 現在, 志村対応の積分表示に関する一連の仕事は全て, Symplectic 群上の Weil 表現を既約 unitary 表現の直和に分解したときに, 各既約成分に現れる Metaplectic 群上の既約表現と直交群上の既約表現の pair 同士を対応させる theta lift の理論 (Howe duality の 1 例) の枠組みの中で捉えられ, 整理・再構成されている. 特に, Lion-Vergne[8] では, 表現論を用いて Howe duality を具体的に書き下すことで Zagier の積分表示を別の角度から直接与えており, 表現論サイドで何が起きているのかを理解する上で非常に役立つといえよう ([8] の詳細については原著の他, 荒川 [1], 松本 [9] も併せて是非御一読頂きたい).

また, 本節では  $t = 1$  の場合に限定した  $S_{k,N}^{1,\chi}$  の積分表示についてのみ与えることにする (一般の  $t$  では, 核関数の Fourier 展開が非常に複雑なものとなるため, Kohnen 部分空間上に制限した  $S_{k,N}^{t,\chi}$  でしか Theorem 5 は与えられていない. これについては次々節で詳しく説明する).

以後,  $\mathfrak{H}$  上の変数として  $\tau$  および  $z$  を同時に用いるが, それらの実部と虚部はそれぞれ

$$\tau = \text{Re}(\tau) + i\text{Im}(\tau) = x + iy, \quad z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z) = \rho + i\sigma$$

で表わすことにする.

**Theorem 6.** (Zagier identity[19, 8])  $k > 1, N \in \mathbb{N}$  とし,  $\chi$  は  $4N$  を法とする Dirichlet 指標とする. ここで,

$$\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z}) = (-1)^k \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \\ 4N^2 | a, 4N | b \\ b^2 - 4ac = 16N^2 n}} \chi(c) \overline{(az^2 + bz + c)}^{-k} n^{k-\frac{1}{2}} e(n\tau), \quad (\tau, z) \in \mathfrak{H}^2$$

とおくとき , 任意の  $f \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$  に対して ,

$$S_{k,N}^{1,\chi}(f)(z) = \int_{\Gamma_0(4N) \backslash \mathfrak{H}} f(\tau) \overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z})} (\text{Im}\tau)^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx dy}{y^2}$$

が成り立ち ,  $S_{k,N}^{1,\chi}(f)(z) \in S_{2k}(2N, \chi^2)$  をみたす . 言い換えれば , この場合は  $N_1$  として  $2N$  がとれる .

*Proof.* Riesz の表現定理より ,  $f(\tau) = \sum_{n \geq 1} a(n) e(n\tau) \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$  から  $a(n)$  を取り出す線型写像は ( $n$ -th Poincaré 級数  $P_{k+\frac{1}{2}, 4N, n, \chi}(\tau) \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$  を用いた) 内積表示を持ち , それは

$$\langle f, P_{k+\frac{1}{2}, 4N, n, \chi} \rangle = \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{i_{4N} (4\pi n)^{k-\frac{1}{2}}} a(n)$$

で表わされる . そこで ,

$$\Omega_{k,N,\chi}^*(\tau, z) = \left( \frac{i_{4N} (4\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{1}{2})} \right) \sum_{n \geq 1} n^{k-1} \left( \sum_{d|n} \chi_1(d) (n/d)^k P_{k+\frac{1}{2}, 4N, (n/d)^2, \chi}(\tau) \right) e(nz)$$

とおけば ,  $\Omega_{k,N,\chi}^*(\tau, z)$  は  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$  上で広義一様絶対収束して

$$\begin{aligned} \langle f, \Omega_{k,N,\chi}^*(\tau, -\bar{z}) \rangle &= \frac{i_{4N} (4\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{1}{2})} \sum_{n \geq 1} n^{k-1} \sum_{d|n} \chi_1(d) (n/d)^k \langle f, P_{k+\frac{1}{2}, 4N, (n/d)^2, \chi} \rangle \overline{e(-nz)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \chi_1(d) a(n^2/d^2) d^{k-1} \right) e(nz) \\ &= S_{k, 4N}^{1,\chi}(f) \end{aligned}$$

をみだし , 志村対応の内積表示を得ることが出来る . ここで ,

$$\Omega_{k,N,\chi}^*(\tau, -\bar{z}) = i_{4N} \Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z})$$

とおけば , 上記内積表示は

$$S_{k, 4N}^{1,\chi}(f)(z) = \int_{\Gamma_0(4N) \backslash \mathfrak{H}} f(\tau) \overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z})} (\text{Im}\tau)^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx dy}{y^2}$$

と積分表示出来る . 次に , この核関数  $\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z})$  の変数  $\tau$  に関する Fourier 展開を Zagier の手法で与えれば (Zagier は Doi-Naganuma 対応の核関数の変数を対角的に制限することでこれを与えた ([13] 参照)) ,

$$\begin{aligned} \Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z}) &= (-1)^k \sum_{n \geq 1} \overline{\omega_k(z; \chi, n)} n^{k-\frac{1}{2}} e(n\tau) , \\ \omega_k(z; \chi, n) &= \sum_{Q \in L_{N,n}} \bar{\chi}(Q) Q(z, 1)^{-k} , \quad Q(z, 1) = (z, 1) Q \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる . ただし ,  $L_{N,n}$  は ,  $\Gamma_0(2N)$  が

$$Q \mapsto Q \circ g = {}^t g Q g, \quad g \in \Gamma_0(2N)$$

で群作用する 2 次形式の空間

$$L_{N,n} = \left\{ Q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \mid 4N^2|a, 4N|b, b^2 - 4ac = 16N^2n \right\}$$

を表わし,  $Q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$  に対して  $\chi(Q) = \chi(c)$  とする. 定義から, 任意の  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2N)$  に対して,

$$\begin{aligned} \omega_k(g(z); \chi, n) &= \sum_{Q \in L_{N,n}} \bar{\chi}(Q)(cz + d)^{2k} \left( (z, 1)^t g Q g \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-k} \\ &= \chi(d)^2 (cz + d)^{2k} \omega_k(z; \chi, n), \end{aligned}$$

が成り立つため, 直ちに  $S_{k,N}^{1,\chi}(f) \in S_{2k}(2N, \chi^2)$  が導かれる.  $\square$

**Remark 3.** 実は [8] では, *Theta Kernel*  $\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z})$  を先に与えた上で, これが *Poincaré* 級数の無限和  $i_{4N}^{-1} \Omega_{k,N,\chi}^*(\tau, -\bar{z})$  に等しいことを証明しており, 上記証明とは流れが異なっている.

**Remark 4.** *Shimura* 対応の積分表示式とその *Fourier* 係数を用いた表示式から, *Shimura* 対応が *Hecke* 作用素と可換になることが直ちに導かれる. すなわち,  $k \geq 2$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , 素数  $p$  に対して

$$\begin{array}{ccc} S_{k+1/2}(4N, \chi) & \xrightarrow{S_{k,N}^{t,\chi}} & S_{2k}(2N, \chi^2) \\ \tilde{T}(p^2) \downarrow & & \downarrow T(p) \\ S_{k+1/2}(4N, \chi) & \xrightarrow{S_{k,N}^{t,\chi}} & S_{2k}(2N, \chi^2) \end{array}$$

が成り立つ.

**Remark 5.**  $f$  は Theorem 5 の条件を満たすとする.  $S_{k,N}^{1,\chi}(f)$  の積分表示式 (Theorem 6) を *Mellin* 変換すれば,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} A_1 n^{-s} &= \int_0^\infty S_{k,N}^{1,\chi}(f)(i\sigma) \sigma^s \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &= \int_{\Gamma_0(4N) \backslash \mathfrak{H}} f(\tau) \left( \int_0^\infty \overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau, i\sigma)} \sigma^s \frac{d\sigma}{\sigma} \right) y^{k+1/2} \frac{dx dy}{y^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

が得られる. 他方,  $t = s + 1/2$  において 3.2 節の議論を繰り返せば,

$$2^{2-s} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} A_1 n^{-s} = \int_{\Gamma_0(4N) \backslash \mathfrak{H}} f(\tau) \left( \overline{h(z; 1) C^*(z, t)} \right) y^{k+1/2} \frac{dx dy}{y^2}, \quad (4.2)$$

も得られる. ただし,  $C^*(z, t)$  は

$$C^*(z, t) = (Kr)^{-t} \sum_{0 < l|E} \mu(l) \varphi_0(l) l^{k-t} y^{-k} H_k(t, (K/l)rz, \varphi_0)$$

で与えられる *Eisenstein* 級数の有限和とする. (4.1), (4.2) から  $f$  の *Shimura* 対応による像の保型  $L$  関数は

$$2^{s-2} \overline{h(z; 1) C^*(z, t)} \quad \text{および} \quad \int_0^\infty \overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau, i\sigma)} \sigma^s \frac{d\sigma}{\sigma}$$

を用いた 2 つの積分表示を持つことが分かる.

## 4.2 Shintani 対応

前節で与えた Shimura 対応  $\mathcal{S}_{k,N}^{1,\chi}$  の積分表示から, Shimura 対応の逆対応 (Shintani 対応) を与えることも出来る (Shintani 対応の詳細については, 原論文 [16] や下記文献の他, 村瀬 [11] も参照されたい).

$k > 1, N \in \mathbb{N}$  とする.  $g(z) = \sum_{n \geq 1} b(n)e(nz) \in S_{2k}(2N, \chi^2)$  に対して,

$$\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi^*}(g)(\tau) = \int_{\Gamma_0(2N) \backslash \mathfrak{H}} g(z) \Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\bar{z}) \text{Im}(z)^{2k} \frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2}$$

とおけば, その定義および Poincaré 級数の性質から直ちに  $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi^*}(g) \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$  が得られ,  $\mathcal{S}_{k,N}^{1,\chi}$  と  $\mathcal{S}_{k,N}^{1,\chi^*}$  は Petersson 内積に関して互いに共役となる. ここで問題となるのは  $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi^*}(g)$  の Fourier 係数の具体的記述であるが, これは次の様にして求められる. 指標と 2 次形式を共に固定する  $\Gamma_1(2N)_Q = \{\gamma \in \Gamma_1(2N) \mid Q \circ \gamma = Q\}$  上で  $\omega_k(z; \chi, n)$  を書き直せば,

$$\omega_k(z; \chi, n) = \sum_{[Q] \in L_{N,n}/\Gamma_1(2N)} \sum_{\gamma \in \Gamma_1(2N)_Q \backslash \Gamma_1(2N)} \bar{\chi}(Q \circ \gamma)(Q \circ \gamma)(z, 1)^{-k}$$

となる. この変形に沿って  $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi^*}$  を書き直せば,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi^*}(g)(\tau) &= i_{N,k} \sum_{n \geq 1} n^{k-1/2} \sum_{[Q] \in L_{N,n}/\Gamma_1(2N)} \left( \int_{\Gamma_1(2N)_Q \backslash \mathfrak{H}} g(z) \chi(Q) \overline{Q(z, 1)}^{-k} \sigma^{2k} \frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2} \right) e(n\tau), \\ i_{N,k} &= (-1)^k [\Gamma_0(2N)/\{\pm 1\} : \{\pm 1\}\Gamma_1(2N)/\{\pm 1\}] \end{aligned}$$

が得られる. 基本的な計算から, この内側の積分は周期積分に帰着される;

$$\int_{\Gamma_1(2N)_Q \backslash \mathfrak{H}} g(z) \chi(Q) \overline{Q(z, 1)}^{-k} \sigma^{2k} \frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2} = 2^{-2k+3} \chi(Q) \pi (16N^2 n)^{\frac{1}{2}-k} \binom{2k-3}{k-1} \int_{C_Q} g(z) Q(z, 1)^{k-1} dz.$$

ここで, 積分経路  $C_Q$  は, 次の様な向きを入れた  $Q(z, 1) = 0$  の根を結ぶ測地線である;

- (1)  $a > 0$  のとき,  $(-b - 4N\sqrt{n})/2a$  から  $(-b + 4N\sqrt{n})/2a$  に向かった半円  $a|z|^2 + b\text{Re}z + c = 0$  の  $\Gamma_1(2N) \backslash \mathfrak{H}$  による像 ( $a < 0$  のときは逆向きにとる),
- (2)  $a = 0, b > 0$  のとき,  $-c/b$  から  $i\infty$  に向かった直線  $b\text{Re}z + c = 0$  の  $\Gamma_1(2N) \backslash \mathfrak{H}$  による像 ( $b < 0$  のときは逆向きにとる.)

この周期積分は  $g$  に付随する保型  $L$  関数の臨界値における値の有限和で表わされるため ([6] 参照), 結果として次の定理が導かれる;

**Theorem 7.** ([Kojima[6] ; Theorem 2])

記号および条件は全て上記に同じとする.  $g(z) = \sum_{n \geq 1} b(n)e(nz) \in S_{2k}(N, \chi^2)$  は全ての Hecke 作用素に関する同時固有関数であるとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi^*}(g)(\tau) &= d_{N,k} \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\text{有限個の指標 } \psi} \sum_{0 \leq j \leq 2k-2} c_j(\psi, g) L(g, j+1, \psi) \right) e(n\tau), \\ d_{N,k} &= (-1)^k 2^{-2k+3} (16N^2)^{\frac{1}{2}-k} \pi \binom{2k-3}{k-1}, \quad L(g, s, \psi) = \sum_{n \geq 1} \psi(n) b(n) n^{-s} \end{aligned}$$

が成り立つ.

**Remark 6.** Oda[12] は, (Niwa, Shintani, Zagier によって与えられた) Shintani 対応に関する諸結果 (積分表示と Zagier identity) を一般化して, 整数の重さを持つ楕円保型形式から符号  $(2, n-2)$  の直交群上の正則 cusp 形式への持ち上げ写像を構成した. これについては菅野 [17] を参照せよ.



### 4.3 Kohnen 空間

Shimura 対応を  $S_{k+1/2}(4N, \chi)$  の部分空間上で制限すれば、像のレベル  $N_t$  を  $N/2$  より小さくとれる例が現れる．そこで、本節では、Shimura 対応  $S_{k,4N}^{t,\chi}$  を適当な部分空間 (Kohnen 空間) 上に制限したものの積分表示を与え、レベル  $N_t$  がより小さくとれることを示す．

$k \geq 2$  は整数、 $N$  は正奇数とし、 $\chi$  を  $N$  を法とする Dirichlet 指標とする． $N_1$  を  $\chi$  の導手とし、 $\chi_{\text{pri}}$  を  $\chi$  から誘導される原始指標とする．また、 $\chi(-1) = \epsilon$ 、 $\chi^* = \left(\frac{4\epsilon}{\cdot}\right) \chi$ 、 $N_2 = N/N_1$  とそれぞれおく．

$\xi_{k+1/2,\epsilon} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \epsilon^{k+1/2} e((2k+1)/8)\right) \in \mathfrak{G}$  に対して、 $Q_{k+1/2,4N,\chi^*} = [\tilde{T}_0(4N, \chi^*) \xi_{k+1/2,\epsilon} \tilde{T}_0(4N, \chi^*)]$  とおくと、 $Q_{k+1/2,N,\chi}$  は  $S_{k+1/2}(4N, \chi^*)$  上で hermitian な作用素になる．そこで  $Q_{k+1/2,N,\chi^*}$  に関する  $S_{k+1/2}(4N, \chi^*)$  の固有空間のうち、固有値が  $\alpha = (-1)^{[(k+1)/2]} 2\sqrt{2}\epsilon$  になるものを、 $S_{k+1/2}^+(N, \chi)$  とおき、Kohnen 空間とよぶ．Kohnen 空間は

$$S_{k+1/2}^+(N, \chi) = \left\{ f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) e(nz) \in S_{k+1/2}(4N, \chi^*) \mid a(n) = 0 \text{ if } \epsilon(-1)^k n \equiv 2, 3(4) \right\}$$

で特徴付けられる．ここで、 $\epsilon(-1)^k D > 0$ 、 $(N, D) = 1$  をみたす基本判別式  $D$  に対する  $S_{k+1/2}^+(N, \chi)$  上の Shimura 対応  $S_{k,4N}^{D,\chi}$  の内積表示は、 $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$  上で広義一様絶対収束する核関数  $\Omega_{k,N,\chi}^+(\tau, z)$  を用いて次の様に表わされる；

$$\begin{aligned} S_{k,4N}^{D,\chi}(f)(z) &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) \chi(d) a(|D|n^2/d^2) d^{k-1} \right) e(nz) \\ &= \langle f(\tau), \Omega_{k,N,\chi}^+(\tau, -\bar{z}) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{k,N,\chi}^+(\tau, z) &= \left( \frac{i_{4N} (4\pi|D|)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})} \right) 2 \cdot \sum_{n \geq 1} n^{k-1} \left( \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) \bar{\chi}(d) (n/d)^k \text{Pr}(P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau)) \right) e(nz) \\ &= \left( \frac{i_N (4\pi|D|)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})} \right) 3 \cdot \sum_{n \geq 1} n^{k-1} \left( \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) \bar{\chi}(d) (n/d)^k \text{Pr}(P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau)) \right) e(nz). \end{aligned}$$

ここで、 $\text{Pr}$  は  $S_{k+1/2}(4N, \left(\frac{4\epsilon}{\cdot}\right) \chi)$  から  $S_{k+1/2}^+(N, \chi)$  への射影

$$\text{Pr} = \frac{1}{\alpha - \beta} (Q_{k+1/2,N,\chi^*} - \beta), \quad \beta = -\frac{\alpha}{2}$$

を表わす．問題はこの核関数の  $\tau$  に関する Fourier 展開であるが、これは Zagier の方針に従って Poincaré 級数の Fourier 係数から計算出来るものの、かなり大変な作業になる．

**Proposition 2.** ([Kohnen[5] ; Theorem 1], [Kojima-Tokuno[7] ; Theorem 2.2])

$k \geq 2$  に対して、

$$\Omega_{k,N,\chi}^+(\tau, z) = i_N C_{k,D,\chi_{\text{pri}}}^{-1} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \epsilon(-1)^k n \equiv 0,1(4)}} n^{k-\frac{1}{2}} \left( \sum_{t|N_2} \mu(t) \left(\frac{D}{t}\right) \bar{\chi}_{\text{pri}}(t) t^{k-1} \omega_{k,N_1^2,N_2/t}(tz; D, \epsilon(-1)^k n, \chi_{\text{pri}}) \right) e(n\tau).$$

ただし,  $C_{k,D,\chi_{\text{pri}}}$  は  $\chi_{\text{pri}}$  の Gauss 和  $W(\chi_{\text{pri}})$  に付随する定数とし,  $\omega_{k,N_1^2,N_2/t}$  は 4.1 節で与えた Zagier identity に現れる級数  $\omega_k(z; \chi, n)$  を次の様に一般化したものである;

$$C_{k,D,\chi_{\text{pri}}} = (-1)^{[k/2]} |D|^{-k+1/2} \pi \binom{2k-2}{k-1} 2^{-3k+2} \left(\frac{D}{N_1}\right) \chi_{\text{pri}}(-D) W(\chi_{\text{pri}}) \epsilon^{1/2} N_1^{-k},$$

$$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z; D, \epsilon(-1)^k n, \chi_{\text{pri}}) = \sum_{\substack{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \\ b^2 - 4ac = \epsilon(-1)^k N_1^2 D n \\ (N_1^2 N_2/t) | a}} \omega_D(a, b, c) \chi_{\text{pri}}(c) (az^2 + bz + c)^{-k}.$$

この中に現れる  $\omega_D(a, b, c)$  は,  $\Omega_{k,N,\chi}^+(\tau, z)$  の  $\tau$  での Fourier 展開の際に  $(\frac{D}{r})$  から派生する 2 次形式上の指標である;  $D$  は基本判別式とし,  $[a, b, c](X, Y)$  は  $D|(b^2 - 4ac)$  をみたく 2 次形式とする. このとき,

$$\omega_D(a, b, c) = \begin{cases} \left(\frac{D}{r}\right) & \cdots (a, b, c, D) = 1 \text{ のとき. ただし } r \text{ は } [a, b, c](X, Y) \text{ で表わされる整数,} \\ 0 & \cdots (a, b, c, D) > 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

$\omega_D(a, b, c)$  は  $\Gamma_0(1)$  の作用で不変であり,  $r$  の取り方に依らない. この Proposition 2 から, 指標で捻った Poincaré 級数の和の ( $\tau$  に関する) Fourier 係数  $\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z; D, \epsilon(-1)^k n, \chi_{\text{pri}})$  に現れる  $\omega_D(a, b, c) \chi_{\text{pri}}(c) (az^2 + bz + c)^{-k}$  は,  $D$  と  $N$  (および  $\chi$ ) によってコントロールされた primitive な 2 次形式  $[a, b, c]$  と, それらから持ち上げられた 2 次形式  $[at^2, bt, c]$  ( $t|N_2$ ) だけで与えられており,  $\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z; D, \epsilon(-1)^k n, \chi_{\text{pri}})$  における 2 の寄与は全て消えていることが分かる. また  $\epsilon(-1)^k n \equiv 0, 1 \pmod{4}$  から, この  $\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z; D, \epsilon(-1)^k n, \chi_{\text{pri}})$  は潰れていない. 従って,  $\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z; D, \epsilon(-1)^k n, \chi_{\text{pri}})$  は, (定義から) レベルに関する 2 の寄与が消失して  $S_{2k}(N_1 t, \chi_{\text{pri}}^2)$  の元になる. これは, すなわち  $S_{k,N}^{D,\chi}(f)(z) \in S_{2k}(N, \chi^2)$  を導き, こうして,  $S_{k,4N}^{D,\chi}|_{S_{k+1/2}^+(N,\chi)}$  による像のレベル  $N_D$  は  $4N/2$  に止まらず,  $4N/4$  まで落ちることが示される.

なお, この基本判別式  $D$  に関する Zagier identity を Kohnen 空間以外の空間で与えようとした場合, 2 の寄与が判別式や指標内にまで入り込み, 非常に複雑化することが予想される.

**Remark 7.** Kohnen 空間  $S_{k+1/2}^+(N, \chi)$  は Hecke 作用素  $\tilde{T}(p^2)$  ( $p \neq 2$  は素数) の作用に関して閉じているものの,  $\tilde{T}(4)$  の作用では閉じていない. そこで,  $\tilde{T}(4)$  の代わりに  $\tilde{T}'(4) = \frac{3}{2}\tilde{T}(4) \text{Pr}$  を用いれば,  $S_{k+1/2}^+(N, \chi)$  は  $\tilde{T}'(4)$  の作用で閉じており,  $\tilde{T}'(4)$  もまた  $\tilde{T}(p^2)$  と可換になることが分かる. そこで, Kohnen 空間上の 4 における Hecke 作用素は,  $\tilde{T}'(4)$  を表わすものとする. なお,  $\tilde{T}(p^2)$  ( $p \neq 2$ ),  $\tilde{T}'(4)$  は Shimura 対応と可換になることも定義から直ちに分かる.

#### 4.4 Eisenstein 級数上の Shimura 対応

具体的に Fourier 係数を比較することで, Eisenstein 級数上でも Shimura 対応を定義出来る場合がある.  $\Gamma_0(4)$  の正則な cusp  $i\infty$ , 0 における重さ  $k+1/2 (\geq 5/2)$  の Eisenstein 級数をそれぞれ

$$E_{k+1/2}^{i\infty}(z) = \sum_{\alpha \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} j(\alpha, z)^{-2k-1} \in M_{k+1/2}(4, 1),$$

$$E_{k+1/2}^0 = (-1)^k i(z)^{-k-1/2} E_{k+1/2}^{i\infty} \left(-\frac{1}{4z}\right) \in M_{k+1/2}(4, 1)$$

と定義する. このとき,

$$H_{k+1/2}(z) = \zeta(1-2k) \left( E_{k+1/2}^{i\infty}(z) + 2^{-2k-1} \left(1 - (-1)^k i\right) E_{k+1/2}^0(z) \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} H(k; n) e(nz)$$

とおけば、各 Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算することによって

$$H(k; n) = \begin{cases} \zeta(1-2k) & \text{if } n = 0 \\ \frac{1}{2}L\left(1-k, \left(\frac{\mathfrak{d}_n}{d}\right)\right) \sum_{d|\mathfrak{f}_n} \mu(d) \left(\frac{\mathfrak{d}_n}{d}\right) d^{k-1} \sigma_{2k-1}\left(\frac{\mathfrak{f}_n}{d}\right) & \text{if } n \geq 1, n \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ 0 & \text{if } n \geq 1, n \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

を得ることが出来る。ただし、 $\mathfrak{d}_n$  は  $\mathbb{Q}((-1)^k n)/\mathbb{Q}$  の判別式とし、 $\mathfrak{f}_n = \sqrt{n|\mathfrak{d}_n|^{-1}}$  とおく。この Fourier 係数の値から直ちに  $H_{k+1/2}(z) \in M_{k+1/2}^+(1, 1)$  が成り立つ。さらに、この Fourier 係数の記述と  $\mu$  の定義から、 $n \geq 1$ , 判別式  $D$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} H\left(k; \frac{n^2}{d^2}|D|\right) &= \frac{1}{2}L\left(1-k, \left(\frac{D}{d}\right)\right) \sum_{d|n} \sum_{l|(n\mathfrak{f}_D/d)} \mu(l) \left(\frac{D}{ld}\right) (ld)^{k-1} \sigma_{2k-1}\left(\frac{n}{ld}\right) \\ &= \frac{1}{2}L\left(1-k, \left(\frac{D}{d}\right)\right) \sigma_{2k-1}(n) \end{aligned}$$

も成り立つ。この関係式には正規化された Eisenstein 級数

$$E_{2k}(z) = 1 + \frac{1}{\zeta(1-2k)} \sum_{n \geq 1} \sigma_{2k-1}(n) e(nz) \in M_{2k}(1, 1)$$

の Fourier 係数  $\sigma_{2k-1}(n)$  が現れることに注意して、 $M_{k+1/2}^+(1, 1) = \mathbb{C}H_{k+1/2} \oplus S_{k+1/2}^+(1, 1)$  から  $M_{2k}(1, 1) = \mathbb{C}E_{2k} \oplus S_{2k}(1, 1)$  への写像を次の様に形式的に定義する；

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{k,4}^{D,1} : M_{k+1/2}^+(1, 1) &\rightarrow M_{2k}(1, 1) \\ \sum_{n \geq 0} a(n) e(nz) &\mapsto \frac{a(0)}{2} L\left(1-k, \left(\frac{D}{d}\right)\right) + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} a\left(\frac{n^2|D|}{d^2}\right) \right) e(nz), \end{aligned}$$

ただし、 $D$  は  $(-1)^k D > 0$  をみたす基本判別式とする。

この写像  $\tilde{S}_{k,4}^{D,1}$  は定義から明らかに  $S_{k+1/2}^+(1, 1)$  上で志村対応  $S_{k,4}^{D,1}$  と一致する；

$$\tilde{S}_{k,4}^{D,1}|_{S_{k+1/2}^+(1,1)} = S_{k,4}^{D,1} : S_{k+1/2}^+(1, 1) \rightarrow S_{2k}(1, 1).$$

そして、Eisenstein 級数同士を次式で対応させるのである；

$$\tilde{S}_{k,4}^{D,1}(H_{k+1/2}) = \frac{1}{2}L\left(1-k, \left(\frac{D}{d}\right)\right) \zeta(1-2k) E_{2k}.$$

**Remark 8.**  $k = 1$  の場合、この写像  $\tilde{S}_{1,4}^{D,1}$  を  $M_{3/2}^+(1, 1)$  上で形式的に定義すれば、 $\tilde{S}_{1,4}^{D,1}(M_{3/2}^+(1, 1)) = M_2(1)$  になるものの、 $S_{3/2}^+(1, 1)$  の中でも  $\tilde{S}_{1,4}^{D,1}$  で Eisenstein 級数に対応する部分空間が現れる ([2] 参照)。また、 $k = 0$  の場合についても  $M_{1/2}^+(1, 1)$  上で  $\tilde{S}_{0,4}^{D,1}$  を形式的に与えれば、これは退化したかたちで  $\tilde{S}_{0,4}^{D,1}(M_{1/2}^+(1, 1)) = M_0(1)$  をみたす。実際、 $M_{1/2}^+(1, 1)$  は theta 級数  $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z)$  で張られる。他方、 $D$  が 1 でない基本判別式であるとき、 $a(n) = \delta(n = \square)$  から  $\tilde{S}_{k,4}^{D,1}(\theta) = \frac{1}{2}L(1-k, (\frac{D}{d})) \in M_0(1) = \mathbb{C}$  となり、同様の対応を与えることが分かる。

## 参考文献

- (1) 荒川 恒男; 第 4 回整数論サマースクール報告集, 99-127 (1996).
- (2) B. A. Cipra; On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms, *Nagoya Math. J.* **91**, 49-117 (1983).
- (3) N.Koblitz; Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms *Graduate text in Math.* **97**, Springer-Verlag (1993).
- (4) N. コブリッツ 著, 上田 勝, 浜畑 芳紀 訳; 楕円曲線と保型形式 (第 2 版), Springer-Japan (2008).
- (5) W. Kohnen; Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight, *Math. Ann.* **271**, 237-268 (1985).
- (6) H. Kojima; Fourier coefficients of modular forms of half integral weight, periods of modular forms and the special values of zeta functions, *Hiroshima Math. J.* **27**, 361-371 (1997).
- (7) H. Kojima-Y. Tokuno; On the Fourier coefficients of modular forms of half integral weight belonging to Kohnen's spaces and the critical values of zeta functions, *Tohoku Math. J.* **56**, 125-145 (2004).
- (8) G.Lion-M.Vergne; The Weil representation, Maslov index and Theta series. *Progress in Math.* **6**, Birkhäuser (1980).
- (9) 松本 久義; 第 19 回整数論サマースクール報告集, Weil 表現と Howe duality (2011).
- (10) T.Miyake; Modular Forms, Springer-Verlag (1989)
- (11) 村瀬 篤; 第 8 回整数論サマースクール報告集, 67-83 (2000).
- (12) T. Oda; On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature  $(2, n - 2)$  *Math. Ann.* **231**, 97-144 (1977).
- (13) 坂田 裕; 第 8 回整数論サマースクール報告集, 157-189 (2000).
- (14) G.Shimura; On modular forms of half-integral weight, *Ann. of Math.* **97**, 440-481 (1973).
- (15) G.Shimura; On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half-integral weight, *Duke Math. J.* **71**, 501-557 (1993).
- (16) T. Shintani; On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, *Nagoya Math. J.* **58**, 83-126 (1975).
- (17) 菅野 孝史; 第 19 回整数論サマースクール報告集, Oda lift (2011).
- (18) 上田 勝; 第 8 回整数論サマースクール報告集, 23-55 (2000).
- (19) D. Zagier; Modular forms associated to real quadratic fields, *Inventiones Math.* **30**, 1-46 (1975).