

Weil 表現と Howe duality

松本久義

東京大学 大学院数理科学研究科

この論説は、私の 2011 年度整数論サマースクールでの Weil 表現および Howe duality についての入門講義の内容を紹介したものである。私の力量のせいもあり Weil 表現については話を局所体の場合についてのみ、Howe duality は実数体の場合に話を限った。また証明などもほとんどつけることはできなかったが、少しでもこのテーマを学びたいという人の助けになれば幸いである。

整数論サマースクールに携わった全ての方、なかでも研究代表者として尽力され、私に講演の機会を与えていただいた軍司圭一氏に感謝の意を表します。

1 Weil 表現

1.1 局所体上の Fourier 変換

以下 F は有限体または非離散的な局所コンパクト体とする。 \mathbb{T} で絶対値が 1 であるような複素数のなす乗法群を表す。また F を加法群と見た時の 非自明な unitary character $\chi_F : F \rightarrow \mathbb{T}$ を一つ固定しておく。

もちろん χ_F は一般には canonical には定まらないのでとにかく一つ選ぶこととなる。

例 1.1.1 一例として幾つかの具体的な F に対して χ_F は以下のように選ぶことができる。

1. $\chi_{\mathbb{R}}(t) = e^{2\pi it}$ ($t \in \mathbb{R}$).
2. F が p -進体 \mathbb{Q}_p である場合、 $\chi_{\mathbb{Q}_p}$ を $\chi_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p) = 1$ および $k \in \mathbb{Z}$ と、 p と互いに素である整数 v に対して $\chi_{\mathbb{Q}_p}(vp^k) = e^{2\pi ivp^k}$ と定めることができる。
3. F が \mathbb{Q}_p の有限次代数拡大であるならば、 $\chi_F = \chi_{\mathbb{Q}_p} \circ \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}_p}$ と定めることができる。

定義 1.1.2 dx が F 上の Haar 測度であるとは F の Borel 集合に対して定義された正則な可算加法的測度であって、加法についての平行移動に関して不変であることとする。(Haar 測度は正の実数倍を除いて一意に存在する。)

例えば $F = \mathbb{R}$ であるときは dx は Euclid 測度をとることができる。

定義 1.1.3 まずコンパクト台を持った連続関数の空間

$$C_0(F) = \{f : F \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は連続かつ } f \text{ の台はコンパクト}\}$$

および 2 乗可積分関数の空間

$$L^2(F) = \{f : F \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は可測かつ } \int_F |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

を考える。ここで ほとんど到る所等しい可測関数は同じものとみなすと $L^2(F)$ は $\int_F |f(x)|^2 dx$ をノルムの 2 乗として Hilbert 空間になる。ここで Fourier 変換を $f \in C_0(F)$ に対して以下のように定める。

$$\mathcal{F}(f)(a) = \int_F \chi_F(ax)^{-1} f(x) dx.$$

これは Hilbert 空間の間の連続線形写像 $\mathcal{F} : L^2(F) \rightarrow L^2(F)$ に一意に拡張される。

Haar 測度 dx の正規化を適当にとると $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} : L^2(F) \rightarrow L^2(F)$ は $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x)$ が $f \in L^2(F)$ に対して成り立つようにできる。(Planchrel の定理) このような dx を自己双対な Haar 測度という。例えば $F = \mathbb{R}$ のときは通常の Euclid 測度が自己双対である。 F が \mathbb{Q}_p の有限次代数拡大の時、 χ_F を例 1.1.1 のように定めた場合、 F の整数環の測度が $(N\mathfrak{d})^{-1/2}$ になるような Haar 測度が自己双対になる。但し $N\mathfrak{d}$ は F の absolute differential のノルムである。

以下考える F 上の測度は全て自己双対な Haar 測度であるとする。

定義 1.1.4 (多変数の Fourier 変換)

V を有限次元 F -ベクトル空間としその次元を n とする。 V^* を V の双対空間とする。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で $V \times V^* \rightarrow F$ なる canonical pairing を表す。以下 V の基底 v_1, \dots, v_n を一つ固定する。まず V 上の Haar 測度による積分を

$$\int_V f(v) dv = \int_F \cdots \int_F f\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) dx_1 \cdots dx_n$$

で定める。この積分を使って 2 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を 1 変数の時と同様に定める。また Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(V) \rightarrow L^2(V^*)$ を

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_V \chi_F(\langle v, \xi \rangle)^{-1} f(v) dv$$

で定める。与えられた基底 v_1, \dots, v_n に対する V^* の双対基底を v_1, \dots, v_n と同一視することにより V と V^* を同一視する。これによって $\mathcal{F} : L^2(V) \rightarrow L^2(V)$ とみなす。このように定めると $\mathcal{F}^2 f(v) = f(-v)$ が全ての $f \in L^2(V)$ に対して成り立つ。この Fourier 変換の定義は基底の取り方に依存していることに注意しておく。

1.2 Heisenberg 群と Stone-von Neuman 表現

以下 X を偶数次元 F -ベクトル空間であるとし $\dim(X) = 2n$ とする。

定義 1.2.1 X 上の非退化双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ がシンプレクティック形式であるとは $\langle x, x \rangle = 0 \quad (x \in X)$ を満たすこととする。

以下組 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を固定して考える。

定義 1.2.2 1. X の部分空間 V に対して

$$V^\perp = \{x \in X \mid \langle x, v \rangle = 0 \quad (v \in V)\}$$

とおく。 X の部分空間 V が $V = V^\perp$ を満たすとき *Lagrangean* という。 $\mathcal{L}(X)$ で X の *Lagrangean* 全体のなす集合を表す。

2. X 上のシンプレクティック群 $Sp(X)$ を

$$Sp(X) = \{g \in GL(X) \mid \langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x, y \in X)\}.$$

で定める。

3. X の基底 $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ がシンプレクティック基底であるとは $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ($1 \leq i, j \leq n$), $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ ($1 \leq i, j \leq n$), $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) を満たすこととする。(ここで $\delta_{i,j}$ は *Kronecker* のデルタである。)

補題 1.2.3 1. $V \in \mathcal{L}(X)$ に対し常に $\dim V = n$ となる。

2. $Sp(X)$ は $\mathcal{L}(X)$ に推移的に作用する。

3. $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が *transversal* であるとする。このときシンプレクティック形式の $V \times V'$ への制限を考えると *perfect pairing* になりこれで V' と V の双対空間 V^* を自然に同一視できるので以下そうする。また v_1, \dots, v_n を V の任意の基底とし w_1, \dots, w_n を V' の双対基底とすると、 $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ は X のシンプレクティック基底となる。

定義 1.2.4 (*Heisenberg* 群の第一の定義) $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が *transversal* であるとする。すると $X = V \oplus V^*$ となる。この時、*Heisenberg* 群 $H(V, V')$ を以下のように定義する。まず集合としては

$$H(V, V') = V \oplus V^* \oplus F$$

であり、乗法は

$$(v, w, a)(v', w', b) = (v+v', w+w', \langle v, w' \rangle + a+b) \quad (v, v' \in V, w, w' \in V', a, b \in F)$$

のように定めると $H(V, V')$ は局所コンパクト群になる。

定義 1.2.5 (Stone-von Neuman 表現) $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が transversal であり v_1, \dots, v_n を V の基底とする。これを用いて V の Haar 測度 dv や 2 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を上記のように定める。 $U(L^2(V))$ で $L^2(V)$ 上のユニタリ作用素全体のなす群を表す。 $T : H(V, V') \rightarrow U(L^2(V))$ を

$$T((v, w, a)\varphi(x)) = \chi_F(\langle x, w \rangle + a)\varphi(x + v) \quad (v \in V, w \in V', a \in F, x \in V)$$

で定める。これは $H(V, V')$ の $L^2(V)$ におけるユニタリ表現を与え、これを Stone-von Neuman 表現という。

定理 1.2.6 (Stone-von Neuman の定理)

1. Stone-von Neuman 表現 $(T, L^2(V))$ は既約ユニタリ表現である。ここで既約表現とは自分自身と $\{0\}$ 以外に閉部分表現を持たない零表現以外の表現のことをいう。
2. 任意の $H(V, V')$ の既約ユニタリ表現 (π, \mathcal{H}) で

$$\pi((0, 0, a))h = \chi_F(a)h \quad (a \in F, h \in \mathcal{H})$$

を満たすものを考える。すると、ある Hilbert 空間の同型 (isometry) $J : L^2(V) \rightarrow \mathcal{H}$ が存在して $J \circ T((v, w, a)) = \pi((v, w, a)) \circ J$ ($v \in V, w \in V', a \in F$) を満たす。このような J は絶対値が 1 であるような複素数倍を除いて一意である。

F の標数が 2 でない場合はシンプレクティック群 $Sp(X)$ は Heisenberg 群の自己同型群の部分群になりこれが、Weil 表現の構成において重要になる。ただし上記のような Heisenberg 群の定義のもとでは $Sp(X)$ の Heisenberg 群の自己同型群への埋め込みの記述は複雑になるので以下のような Heisenberg 群の定義がよく用いられる。

定義 1.2.7 (Heisenberg 群の第二の定義)

F の標数は 2 でないとする。 $H(X) = X \oplus F$ 上に以下のように乗法を定める。

$$(x, a)(x', b) = (x + x', \frac{1}{2}\langle x, x' \rangle + a + b) \quad (x, x' \in X, a, b \in F).$$

すると群の単射準同型 $\mathcal{I} : Sp(X) \rightarrow \text{Aut}(H(X))$ を

$$\mathcal{I}(g)((x, a)) = (g^{-1}x, a) \quad (g \in Sp(X), x \in X, a \in F)$$

で定めることができる。

このように定義すると、 $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が transversal であるとき $\Phi : H(V, V') \rightarrow H(X)$ を $\Phi(v, w, a) = (v + w, -\frac{1}{2}\langle v, w \rangle + a)$ で定めると位相群の同型を与える。この同型を介して $H(X)$ の Stone-von Neuman 表現 $\tilde{T} : H(X) \rightarrow U(L^2(V))$ を考えることができる。この同型 Φ において $\Phi((0, 0, a)) = (0, a)$ ($a \in F$) が成り立つ。

1.3 Weil 表現

(F, χ_F, dx) および $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は上記の通りとする。また F の標数は 2 でないとする。また transversal な $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ および V の基底 v_1, \dots, v_n も固定し、これを用いて V の Haar 測度 dv を考え、それによって 2 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を定める。

$g \in \text{Sp}(X)$ に対して g の作用で Stone-von Neuman 表現 $(\tilde{T}, L^2(V))$ を掀った表現 $\tilde{T}^g = \tilde{T} \circ \mathcal{I}(g)$ を考える。

定義 1.3.1 (メタプレクティック群)

メタプレクティック群 $Mp(X)$ を以下のように定義する。

$$Mp(X) = \{(g, J) \in \text{Sp}(X) \times U(L^2(V)) \mid J^{-1} \circ \tilde{T}((x, a)) \circ J = \tilde{T}^g((x, a)) \quad x \in X, a \in F\}.$$

すると $Mp(X)$ は $\text{Sp}(X) \times U(L^2(V))$ の部分群になる。

単射群準同型 $\iota : \mathbb{T} \rightarrow Mp(X)$ を

$$\iota(a) = (id_X, a id_{L^2(V)}) \quad (a \in \mathbb{T})$$

で定める。また $p_1 : Mp(X) \rightarrow \text{Sp}(X)$ を $\text{Sp}(X) \times U(L^2(V)) \rightarrow \text{Sp}(X)$ なる第一成分への射影の $Mp(X)$ への制限とする。

命題 1.3.2

$$1 \rightarrow \mathbb{T} \xrightarrow{\iota} Mp(X) \xrightarrow{p_1} \text{Sp}(X) \rightarrow 1$$

は完全系列になる。

証明 $\text{Ker}(p_1) = \text{Im}(\iota)$ となることは既約ユニタリ表現に対する Schur の補題である。 p_1 の全射性は、 $\tilde{T}^g((o, a)) = \chi_F(a) id_{L^2(V)}$ が成り立つので、Stone-von Neuman の定理より従う。 \square

定義 1.3.3 (Weil 表現)

$W : Mp(X) \rightarrow U(L^2(V))$ を第 2 成分への射影 $\text{Sp}(X) \times U(L^2(V)) \rightarrow U(L^2(V))$ の $Mp(X)$ への制限として定める。ユニタリ表現 $(W, L^2(V))$ が Weil 表現である。

命題 1.3.2 の完全系列は分裂せず、Weil 表現は $\text{Sp}(X)$ の表現に落とすことはできない。以下の定理は Weil 表現は $\text{Sp}(X)$ の double cover の表現にはなっていることを意味している。

定理 1.3.4 ([Weil])

$Mp(X)$ の閉部分群 $\tilde{Sp}(X)$ であって $\text{Im}(\iota) \cap \tilde{Sp}(X) = \{\iota(1), \iota(-1)\}$ かつ $p_1(\tilde{Sp}(X)) = \text{Sp}(X)$ となるものが存在する。

上で固定した V の基底 v_1, \dots, v_n に対応する V' の双対基底 w_1, \dots, w_n を取りシンプレクティック基底 $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ によって $\mathrm{Sp}(X)$ の元を行列表示する。さらに v_1, \dots, v_n の部分と w_1, \dots, w_n の部分を分けて考えることにより $\mathrm{Sp}(X)$ の元を block-wise に表示して $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ などと書く。ここで例えば α (resp. γ) は F 係数 $n \times n$ 行列とも $\mathrm{End}_F(V)$ (resp. $\mathrm{Hom}_F(V, V')$) の元とも見做す。ここで

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathrm{GL}(V) \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \gamma & I_n \end{pmatrix} \middle| \gamma \text{ は } F \text{ 係数 } n \times n \text{ 対称行列} \right\}.$$

すると $\sigma \in \mathrm{Sp}(X)$ かつ L および N は $\mathrm{Sp}(X)$ の部分群である。

$\mathrm{Sp}(X)$ が L, N および σ で生成されることに注意すれば Weil 表現を具体的な記述は、 L, N の元あるいは σ の $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ への持ち上げを記述すればよいことがわかる。そのために以下の概念を導入する。

定義 1.3.5 (Weil constant cf. [Ikeda]) $a \in F^\times$ に対して $\gamma_{\chi_F}(a) \in \mathbb{T}$ が存在して任意の F 上の Schwartz 族関数 φ に対して

$$\int_F \varphi(x) \chi_F \left(\frac{ax^2}{2} \right) dx = \gamma_{\chi_F}(a) |a|_F^{-\frac{1}{2}} \int_F \mathcal{F}\varphi(x) \chi_F \left(-\frac{x^2}{2a} \right) dx$$

を満たす。この $\gamma_{\chi_F}(a)$ を Weil constant という。

1. $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \in L$ に対して $\bar{W}(g) \in U(L^2(V))$ を以下で定める。

$$\bar{W}(g)\varphi(v) = \frac{\gamma_{\chi_F}(1)}{\gamma_{\chi_F}(\det \alpha^{-1})} |\det a|_F^{-\frac{1}{2}} \varphi(\alpha^{-1}v) \quad (\varphi \in L^2(V))$$

2. $g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \gamma & I_n \end{pmatrix} \in N$ に対して $\bar{W}(g) \in U(L^2(V))$ を以下で定める。

$$\bar{W}(g)\varphi(v) = \chi_F \left(-\frac{1}{2} \langle v, \gamma v \rangle \right) \varphi(v) \quad (\varphi \in L^2(V))$$

3. $\bar{W}(\sigma) \in U(L^2(V))$ を以下で定める。

$$\bar{W}(\sigma)\varphi = \gamma_F(1)^{-n} \mathcal{F}\varphi \quad (\varphi \in L^2(V))$$

定理 1.3.6 $g \in L \cup N \cup \{\sigma\}$ に対して $(g, \bar{W}(g)) \in \tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ となる。

2 Howe duality

このセクションを通じて $F = \mathbb{R}$ とする。また X は $2n$ 次元の実ベクトル空間でありシンプレクティック形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が与えられているとする。

2.1 Howe duality とは

G を群 H をその部分群とするとき

$$Z_G(H) = \{g \in G \mid hg = gh (h \in H)\}$$

とおく。

定義 2.1.1 H_1, H_2 を $Sp(X)$ の *reductive* 部分群とする。組 (H_1, H_2) が *reductive dual pair* であるとは $Z_{Sp(X)}(H_1) = H_2$ かつ $Z_{Sp(X)}(H_2) = H_1$ をみたすこととする。

例 2.1.2 非負整数 p, q, m を考え $n = 2(p + q)m$ とおき n 次元実ベクトル空間 $X = \mathbb{R}^{p+q} \otimes \mathbb{R}^{2m}$ を考える。 $(\cdot, \cdot)_{p,q}$ を \mathbb{R}^{p+q} 上の符号 (p, q) の非退化対称双線形形式、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ を \mathbb{R}^{2m} 上のシンプレクティック形式とする。すると $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)_{p,q} \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle_m$ は X 上のシンプレクティック形式となる。

$$O(p, q) = \{g \in GL(p + q, \mathbb{R}) \mid (gv, gw)_{p,q} = (v, w)_{p,q} \ (v, w \in \mathbb{R}^{p+q})\}$$

と定めると $O(p, q)$ および $Sp(m, \mathbb{R})$ は自然に $Sp(X)$ の部分群とみなせる。これによって $(O(p, q), Sp(m, \mathbb{R}))$ は *reductive dual pair* になる。

ここで素朴な形で Howe duality を定式化してみる。 (H_1, H_2) が *reductive dual pair* であるとし、 \tilde{H}_1 および \tilde{H}_2 をそれぞれ H_1 および H_2 の $\tilde{Sp}(X)$ への引き戻しとする。Weil 表現 $(W, L^2(V))$ は $\tilde{Sp}(X)$ のユニタリ表現とみなせるがそれを部分群 $\tilde{H}_1 \tilde{H}_2$ へ制限し既約分解することを考える。例えば H_1 がコンパクトであるような場合はこの分解は離散スペクトラムしか出てこないで

$$L^2(V) = \hat{\bigoplus}_{i=0}^{\infty} \sigma_i \otimes \tau_i$$

のように分解する。ここで σ_i および τ_i はそれぞれ \tilde{H}_1 および \tilde{H}_2 の既約ユニタリ表現である。この状況設定において Howe duality の主張することは σ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) および τ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) が互いに同型にならないということである。このことにより Weil 表現の分解を通じて \tilde{H}_1 の既約ユニタリ表現の同型類の集合の部分集合と \tilde{H}_2 の既約ユニタリ表現の同型類の集合の部分集合の間の一対一対応が得られたことになる。この対応は Howe 対応あるいは Theta lifting などと言われる。もちろん \tilde{H}_1 がコンパクトでない場合は上の既約分解は一般的には連続スペクトラ

ムが出てくるのであるがその場合も Howe duality はしかるべく定式化はできる。しかしながら、ユニタリ表現としての Weil 表現の分解を考えるという定式化は不徹底であり、適切に定式化することによりより広い既約ユニタリ表現の集合の間の一対一対応が得られる。そのためには reductive 群の表現論の代数化の理論 (Harish-Chandra 加群) が必要になる。

2.2 Harish-Chandra 加群

ここでは G を実 reductive 群としその極大コンパクト部分群を一つ固定し K とおく。 \mathfrak{g}_0 および \mathfrak{k}_0 をそれぞれ G および K のリー代数とし \mathfrak{g} および \mathfrak{k} をそれらの複素化とする。また $U(\mathfrak{g})$ で \mathfrak{g} の普遍包絡代数を表す。また K^\wedge で K の既約連続表現の同型類を表す。

定義 2.2.1 1. 複素ベクトル空間 V を表現空間とする K の表現 (π, V) が代数的 K -加群であるとは任意の $v \in V$ に対して v を含む有限次元部分 K -表現が存在しその部分表現は K の連続表現になることとする。したがって微分表現を考えることができ、 V は $U(\mathfrak{k})$ -加群の構造も持つ。

2. 代数的 K -加群 V および $\delta \in K^\wedge$ に対して V の δ -isotypical component $V(\delta)$ を

$$V(\delta) = \sum_{\varphi \in \text{Hom}_K(\delta, V)} \text{Im}(\varphi)$$

で定める。すると $V = \bigoplus_{\delta \in K^\wedge} V(\delta)$ となる。

3. 代数的 K -加群 V が *admissible* であるとは任意の $\delta \in K^\wedge$ に対して $\dim V(\delta) < \infty$ となることとする。

4. V が (\mathfrak{g}, K) -加群であるとは、以下の条件を満たすこととする。

(a) V は $U(\mathfrak{g})$ -加群と代数的 K -加群の構造を併せ持つ。

(b) $k \in K, X \in \mathfrak{g}, v \in V$ に対して $k \cdot X \cdot k^{-1} \cdot v = (Ad(k)X) \cdot v$ が成り立つ。

(c) 代数的 K -加群の微分表現として得られる $U(\mathfrak{k})$ -加群の構造は $U(\mathfrak{g})$ -加群構造の制限として得られる $U(\mathfrak{k})$ -加群の構造に一致する。

5. 有限の長さを持つ (\mathfrak{g}, K) -加群を *Harish-Chandra 加群* という。 *Harish-Chandra 加群* は常に *admissible* である。

Harish-Chandra 加群と G の無限次元表現の間には以下のような関係がある。

定義 2.2.2 (π, H) を G の連続 *Hilbert* 表現とする。

1. H の K -finite part H_K を H の有限次元 K -部分表現全てで生成される H の部分空間として定める。 H_K は自然に代数的 K -加群の構造が入る。
2. H_K が *admissible* であるとき (π, H) は *admissible* であるという。 *admissible* な連続 Hilbert 表現 (π, H) に対しては、任意の $v \in H_K$ と $X \in \mathfrak{g}_0$ に対して $\pi(\exp(tX))v$ は $t = 0$ において無限回微分可能であり、特に

$$Xv = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))v|_{t=0}$$

と定めると $Xv \in H_K$ が成り立ち H_K には *admissible* (\mathfrak{g}, K) -加群の構造が自然に入る。

定理 2.2.3 1. 既約ユニタリ表現は全て *admissible* である。

2. *admissible* な連続 Hilbert 表現 (π, H) が既約であることの必要十分条件は (\mathfrak{g}, K) -加群 H_K が既約であることである。
3. 任意の既約 Harish-Chandra 加群 V に対してある *admissible Hilbert* 表現 (π, H) が存在して (\mathfrak{g}, K) -加群として V と H_K は同型になる。

注意 2.2.4 1. *admissible* でない既約連続 Hilbert 表現が存在するかどうかは不明である。 *admissible* でない既約連続 Banach 表現は存在することが知られている。ただしこのような表現の調和解析における意義は不明である。(例えば Paley-Wiener の定理などの定式化に必要なのは *admissible* な表現のみである。)

2. 既約 Harish-Chandra 加群 V に対して $V \cong H_K$ となる *admissible Hilbert* 表現 (π, H) は一般には一意であるとは限らない。しかし調和解析からの観点によるとそのような表現は同一視すべきものであることが知られている。

2.3 Fock model

transversal な $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ および V の基底 v_1, \dots, v_n も固定し、これを用いて V の Haar 測度 dv を考え、それによって 2 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を定める。 $V_{\mathbb{C}}$ を V の複素化とする。ここで 1.3 のように V の基底 v_1, \dots, v_n に対応する V' の双対基底 w_1, \dots, w_n を取りシンプレクティック基底 $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ によって $\mathrm{Sp}(X)$ の元を行列表示し $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ を考える。この σ の作用を imaginary unit $\sqrt{-1}$ の作用と見做して X に複素ベクトル空間の構造が入る。すると v_1, \dots, v_n は X の複素ベクトル空間としての基底になるのでこれによって X と $V_{\mathbb{C}}$ を同一視すること

ができる。 $H(\cdot, \cdot)$ および $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を v_1, \dots, v_n を正規直交基底とする $V_{\mathbb{C}}$ 上の Hermite 内積および非退化対称双線形形式とする。ここで

$$K = \{g \in \text{GL}(V_{\mathbb{C}}) \mid H(gv, gw) = H(v, w) \quad (v, w \in V_{\mathbb{C}})\}$$

とおくと $H(\cdot, \cdot)$ の虚部は X のシンプレクティック内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に一致するので K は $\text{Sp}(X)$ の部分群になる。実は K は $\text{Sp}(X)$ の極大コンパクト部分群になっている。 \tilde{K} を K の $\tilde{\text{Sp}}(X)$ への引き戻しとする。

上で構成された Weil 表現は $L^2(V)$ 上に実現されていた (Schödinger model)。この構成においてはすでに見たとおり \tilde{L} の作用は見やすいが $\tilde{\text{Sp}}(X)$ の極大コンパクト部分群である \tilde{K} の作用はわかりにくい。したがって \tilde{K} -finite part がわかりやすい Weil 表現の実現として Fock model を考える。

(z_1, \dots, z_n) を基底 v_1, \dots, v_n に対応する $V_{\mathbb{C}}$ の複素座標とし、 $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, $d\bar{z} = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$ とおくと $dz \wedge d\bar{z}$ は $V_{\mathbb{C}}$ 上の Haar 測度を定める。

定義 2.3.1 (Fock space)

$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ で $V_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数全体の作る複素ベクトル空間を表す。Fock 空間 \mathfrak{F} を以下のように定める。

$$\mathfrak{F} = \left\{ f \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \mid \int_{V_{\mathbb{C}}} |f(z)|^2 e^{-\pi H(z, z)} dz \wedge d\bar{z} < \infty \right\}$$

すると \mathfrak{F} には $\int_{V_{\mathbb{C}}} |f(z)|^2 e^{-\pi H(z, z)} dz \wedge d\bar{z}$ をノルムの 2 乗とする Hilbert 空間の構造が入る。

定理 2.3.2 (Bargman cf. [F])

線形作用素 $B : L^2(V) \rightarrow \mathfrak{F}$ を

$$B\varphi(z) = \int_V \varphi(x) e^{\pi(2(x, z) - (x, x) - 1/2(z, z))} dx$$

で定めると適当な定数倍を乗じて正規化すると $L^2(V)$ と \mathfrak{F} の間の *isometry* が得られる。

この結果により \mathcal{F} を Weil 表現の表現空間とみなすことができ、これを Weil 表現の Fock model という。

\mathcal{P} を $V_{\mathbb{C}}$ 上の多項式関数のなす \mathbb{C} -代数とする。つまり $\mathcal{P} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. すると \mathcal{P} は \mathfrak{F} の部分空間になる。また非負整数 k に対して k 次同次成分 $\mathcal{P}^k = \{f \in \mathcal{P} \mid f(tv) = t^k f(v) \quad (t \in \mathbb{C}, v \in V_{\mathbb{C}})\}$ を考える。

定理 2.3.3 Weil 表現 (W, \mathfrak{F}) は *admissible* でありその \tilde{K} -finite part $\mathfrak{F}_{\tilde{K}}$ は \mathcal{P} に一致する。また \mathcal{P} は \tilde{K} -加群として重複度自由であり、

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^k$$

がその既約分解を与える。

K および \tilde{K} は共通のリー代数を持つがその複素化 \mathfrak{k} を考える。同様に \mathfrak{g} を $\mathrm{Sp}(X)$ および $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ を共通のリー代数の複素化とする。 \mathfrak{q} を \mathfrak{g} の元であって \mathfrak{k} の全ての元と Killing form に関して直交するもの全体のなす部分空間とする。このとき (複素化された) Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q}$ が成り立つ。さらに \mathfrak{q} は K あるいは \tilde{K} の随伴作用により不変であり、二つの互いに同型でない既約成分 $\mathfrak{q}_+, \mathfrak{q}_-$ の直和に既約分解される。

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_+ \oplus \mathfrak{q}_-.$$

定理 2.3.4 $\omega : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ を Weil 表現の微分から得られる $U(\mathfrak{g})$ -加群構造とする。 z_i ($1 \leq i \leq n$) を掛算作用素とした時、以下が成り立つ。

1. $\omega(\mathfrak{k})$ は $\left\{ \frac{1}{2} \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial z_i} z_j \right) \mid 1 \leq i, j \leq n \right\}$ で生成される。
2. $\omega(\mathfrak{q}_+)$ は $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \mid 1 \leq i, j \leq n \right\}$ で生成される。
3. $\omega(\mathfrak{q}_-)$ は $\{z_i z_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ で生成される。

系 2.3.5 非負整数 k に対して $\omega(\mathfrak{q}_+)\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^{k-2}$, $\omega(\mathfrak{q}_-)\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^{k+2}$ が成り立つ。従って、 $\mathcal{P}^{\mathrm{even}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^{2k}$ および $\mathcal{P}^{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^{2k+1}$ とすると、 $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathrm{even}} \oplus \mathcal{P}^{\mathrm{odd}}$ が \mathcal{P} の既約分解を与える。

2.4 片側がコンパクトな場合 ([H1],[KV])

この節においては、 (H, H') を $\mathrm{Sp}(X)$ における reductive dual pair で H がコンパクトであるようなものとする。 \mathfrak{h} および \mathfrak{h}' をそれぞれ H および H' のリー代数の複素化とする。適当に内部自己同型で移してやると $H \subseteq K$ かつ $H' \cap K$ は H' の極大コンパクト部分群となるようにできるので以下そのように仮定する。 $\mathfrak{h}'_{\pm} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}_{\pm}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{k}$, $R = H' \cap K$ とおく。

\tilde{H} および \tilde{R} をそれぞれ H と R の $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ への引き戻しとする。これらは \tilde{K} の部分群であるから \mathcal{P} は代数的 \tilde{H} -加群および代数的 \tilde{R} -加群となる。したがって isotypical component を考えることができる。 $\sigma \in \tilde{H}^{\wedge}$ に対して σ -isotypical component $\mathcal{P}(\sigma)$ は \tilde{H} -加群および $(\mathfrak{h}', \tilde{R})$ -加群の構造を持つ。この構造を記述する結果の述べるために以下のような準備をする。

定義 2.4.1 1. \tilde{K} の閉部分群 S に対して以下のように置く。

$$\mathcal{R}(S; \mathcal{P}) = \{\sigma \in S^{\wedge} \mid \mathcal{P}(\sigma) \neq 0\}.$$

2. 調和多項式の空間 $\mathcal{H}(H)$ を以下のように定める。

$$\mathcal{H}(H) = \{f \in \mathcal{P} \mid \omega(Y)f = 0 \ (Y \in \mathfrak{h}'_+)\}.$$

3. $\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P})$ に対して

$$\deg(\sigma) = \min\{k \mid \mathcal{P}^k \cap \mathcal{P}(\sigma) \neq 0\}$$

と置く。

$\mathcal{H}(H)$ は代数的 $\tilde{H} \times \tilde{R}$ -加群の構造を持つがそれは以下のように記述される。

命題 2.4.2 $\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P})$ に対して以下が成り立つ。

1. $\mathcal{H}(H)(\sigma) = \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}^{\deg(\sigma)}$. 特に $\mathcal{H}(H)(\sigma) \neq 0$ となる。
2. $\mathcal{P}(\sigma) = U(\mathfrak{h}'_-)\mathcal{H}(H)(\sigma)$.
3. $\mathcal{H}(H)(\sigma)$ は代数的 $\tilde{H} \times \tilde{R}$ -加群として既約である。
4. $\psi : \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{R}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ なる単射写像が存在して代数的 $\tilde{H} \times \tilde{R}$ -加群として $\mathcal{H}(H)(\sigma) \cong \sigma \otimes \psi(\sigma)$ となる。従って $\mathcal{H}(H)$ の以下のような既約分解を得る。

$$\mathcal{H}(H) \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P})} \sigma \otimes \psi(\sigma).$$

定義 2.4.3 1. $\tau \in \tilde{R}^\wedge$ に対して一般化された Verma 加群 $M(\tau)$ を

$$M(\tau) = U(\mathfrak{h}') \otimes_{U(\mathfrak{t} + \mathfrak{h}'_+)} \tau$$

で定める。ここで τ には \mathfrak{h}'_+ は 0 で作用すると定めている。すると $M(\tau)$ は Harish-Chandra $(\mathfrak{h}', \tilde{R})$ -加群になる。

2. $M(\tau)$ の既約商 $(\mathfrak{h}', \tilde{R})$ -加群は一意に定まるのでそれを $L(\tau)$ とおく。

次が本節の主定理である。

定理 2.4.4 ([H1]) $\psi : \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{R}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ を上記のようにとる。すると $\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P})$ に対して

$$\mathcal{P}(\sigma) \cong \sigma \otimes L(\psi(\sigma))$$

が $\tilde{H} \times (\mathfrak{h}', \tilde{R})$ -加群としてなりたつ。したがって

$$\mathcal{P} \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H}; \mathcal{P})} \sigma \otimes L(\psi(\sigma)),$$

2.5 一般の場合 ([H2])

この節においては、前節同様 (H, H') を $\mathrm{Sp}(X)$ における reductive dual pair とするが、ここでは H がコンパクトであることは仮定せず、一般の場合を考える。 \mathfrak{h} および \mathfrak{h}' をそれぞれ H および H' のリー代数の複素化とする。内部自己同型で移すことによって $R = H \cap K$ および $R' = H' \cap K$ がそれぞれ H および H' の極大コンパクト部分群であるようにできるので以下そのように仮定する。主定理をのべるため準備をする。

定義 2.5.1 1. $\mathcal{R}(\mathfrak{h}, \tilde{R}; \mathcal{P})$ で既約 Harish-Chandra $(\mathfrak{h}, \tilde{R})$ -加群であって \mathcal{P} の商加群と同型になるようなものの同型類の集合を表す。 $\mathcal{R}(\mathfrak{h}', \tilde{R}'; \mathcal{P})$ も同様に定義する。

2. $\rho \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}, \tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して \mathcal{N}_ρ で $\mathcal{P}/\mathcal{N} \cong \rho$ となる \mathcal{P} の $(\mathfrak{h}, \tilde{R})$ -部分加群 \mathcal{N} 全ての共通部分とする。

$$\mathcal{N}_\rho = \bigcap_{\mathcal{P}/\mathcal{N} \cong \rho} \mathcal{N}.$$

次の結果は簡単な考察から得られる。

補題 2.5.2 ([H2]) \mathcal{N}_ρ は \mathcal{P} の $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}', \tilde{R}\tilde{R}'$ -部分加群でありさらに

$$\mathcal{P}/\mathcal{N}_\rho \cong \rho \otimes \theta(\rho)$$

なる $(\mathfrak{h}', \tilde{R}')$ -加群 $\theta(\rho)$ が存在する。

次が主定理である。

定理 2.5.3 ([H2]) $\rho \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}, \tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して $(\mathfrak{h}', \tilde{R}')$ -加群 $\theta(\rho)$ は quasi-simple な Harish-Chandra 加群であり、しかも一意に定まる既約商加群 $\bar{\theta}(\rho)$ を持つ。よって $\bar{\theta}(\rho) \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}', \tilde{R}'; \mathcal{P})$ となる。

上記の定理において H と H' の役割を入れ替えて考えると次の結果が直ちに従う。

系 2.5.4 (Howe duality)

$\bar{\theta} : \mathcal{R}(\mathfrak{h}, \tilde{R}; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathfrak{h}', \tilde{R}'; \mathcal{P})$ は全単射になる。

[H2] における主定理の証明では Howe duality の具体的な構成を完全にしたものではないので、具体的に Howe duality を具体的に記述することが問題になり多くの研究がなされている。しかし [H2] において上記定理が証明される過程において以下のような事実が使われる。このことは、Howe duality を具体的に記述しようとする時にも有用な情報を与える。

命題 2.5.5 $\rho \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}, \tilde{R}; \mathcal{P})$ とし $\sigma \in \tilde{R}^\wedge$ を $\rho|_{\tilde{R}}$ に出てくる \tilde{R}^\wedge の元のうち degree が最小なものとする。(このようなものは一意とは限らないがとにかく1つ選んで固定しておく。) すると以下の条件を満たすような $\sigma' \in \mathcal{R}(\tilde{R}'; \mathcal{P})$ が一意に存在する。

1. σ' は $\theta(\rho)$ の中に現れる。しかも $\theta(\rho)$ の中に現れる \tilde{R}'^\wedge のなかで *degree* は最小になる。
2. $\deg(\sigma) = \deg(\sigma')$.
3. $\mathcal{Z}_\rho = \mathcal{P}/\mathcal{N}_\rho \cong \rho \otimes \theta(\rho)$ とおく。 $\sigma \otimes \sigma'$ と同型な \mathcal{Z}_ρ の $\tilde{R}\tilde{R}'$ -部分表現 $\mathcal{H}_{\sigma,\sigma'}$ が存在して

$$\mathcal{Z}(\sigma) = U(\mathfrak{h}')\mathcal{H}_{\sigma,\sigma'}, \mathcal{Z}(\sigma') = U(\mathfrak{h})\mathcal{H}_{\sigma,\sigma'}$$

が成り立つ。

上記命題で与えられる σ と σ' の間の対応は以下のように Joint harmonics の空間を既約分解することで得られる。このことを説明するために以下のような準備をする。

次の結果は Case-by-case analysis を用いて Howe によって見出された。

補題 2.5.6 $M = Z_{Sp(X)}(R)$ および $M' = Z_{Sp(X)}(R')$ とおくと (R, M) , (R', M') はともに *reductive dual pair* になる。

R と R' はともにコンパクトであるから、 (R, M) , (R', M') に対しては前節で扱った結果が適用できる。たとえば調和多項式の空間 $\mathcal{H}(\tilde{R})$ および $\mathcal{H}(\tilde{R}')$ を考えることができる。これらの共通部分 $\mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}')$ は joint harmonics の空間と言われる。そこで次のように定義する。

定義 2.5.7

$$\bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P}) = \{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{R}; \mathcal{P}) \mid \mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') \neq 0\},$$

$$\bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}'; \mathcal{P}) = \{\tau \in \mathcal{R}(\tilde{R}'; \mathcal{P}) \mid \mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}')(\tau) \neq 0\},$$

joint harmonics の空間の既約分解については以下の結果が成り立つ。

定理 2.5.8 ([H2])

以下の条件を満たす全単射 $\xi : \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P}) \rightarrow \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}'; \mathcal{P})$ が存在する。

1. $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して $\deg(\sigma) = \deg(\xi(\sigma))$ が成り立つ。
2. $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して

$$\mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') = \mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}')(\xi(\sigma))$$

となる。

3. $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して $\tilde{R} \times \tilde{R}'$ -加群として $\mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') \cong \sigma \otimes \xi(\sigma)$ となる。

4. *joint harmonics* の空間の $\tilde{R} \times \tilde{R}'$ -加群としての既約分解は以下で与えられる。

$$\mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{R}; \mathcal{P})} \mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}').$$

5. $\rho \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}, \tilde{R}; \mathcal{P})$ とし $\sigma \in \tilde{R}^\wedge$ を $\rho|_{\tilde{R}}$ に出てくる \tilde{R}^\wedge の元のうち *degree* が最小なものとする。すると定理 2.5.5 における σ' は $\xi(\sigma)$ に一致する。

したがって *joint harmonics* の空間を調べることにより Howe 対応についての知見が得られることがわかる。

3 文献

まず全般的に

[S] 第4回整数論サマースクール報告集「Weil 表現入門」1996

には Weil 表現や Howe duality についての論説が多数収録されており参考になるであろう。Fourier 変換については

[T] Tate J. T. Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions in Cassels and Fröhlich (ed.) "Algebraic Number Theory" Academic Press 1967.

Fock model については Bargman や Satake の論文があるが次の本がわかりやすい。

[F] Folland G. B. Harmonic analysis in phase space, Annales of Mathematics Studies, 122 Princeton University Press, Princeton NJ 1989

Weil 表現とその具体的な記述については Weil の原論文

[W] Weil, A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta. Math. **111**, (1964), 143-211.

その他、例えば以下のような文献がある。

[Ku] Kudla, S. S. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs, Israel J. Math. **87**(1994), 361-401.

[R] Ranga Rao, R. On some explicit formulas in the theory of Weil representation, Pacific J. Math. **157**(1993), 335-371.

[LV] Lion, G. A., Vergne, M. The Weil representation, Maslov index and theta series, Progress in Mathematics, 6 Birkhäuser, Boston, MA 1980.

Weil constant については [S] に池田保氏の解説がある。

reductive dual pair の分類については、[S] に平賀郁氏の論説が収録されている。

片方がコンパクトな場合の reductive dual pair についての Howe 対応については

[H1] Howe, R. Remarks on classical invariant theory, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539-570.

[KV] Kashiwara, M., Vergne, M. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Invent. Math. **44**(1978), 1-47.

が基本的な文献である。これについては [S] に収録されている西山亨氏の論説がよくまとまっている。

一般の場合については Howe duality を実数体の場合に確立したのが

[H2] Howe, R. Transcending classical invariant theory, J. Amer. Math. Soc. **2**(1989),535-552.

である。を具体的な状況で Howe duality を具体的に記述することを試みた研究はいろいろあるが、実数体の場合には以下のものを挙げておく。

[A] Adams, J. D. Discrete spectrum of the reductive dual pair $(O(p, q), Sp(2m))$. Invent. Math. **74** (1983), 449-475.

[M] Moeglin, C. Correspondance de Howe pour les paires reductives duales: quelques calculs dans le cas archimédien, J. Funct. Anal. **85** (1989), 1-85 .