

# 重さ半整数の Siegel モジュラー形式と Jacobi 形式

高瀬幸一 (宮城教育大学)

## 目次

第 I 部 一般論	4
1 保型形式	5
1.1 最も原始的な設定	5
1.2 群上の保型形式	5
2 ユニタリ表現と保型形式	6
2.1 基本的な設定	6
2.2 $G$ の群環と $K$ -タイプ $\delta$ の Hecke 作用素の環	7
2.3 $K$ -タイプ $\delta$ の球関数	8
2.4 既約ユニタリ表現に付随した保型形式	10
2.5 制限直積の場合	12
3 Siegel モジュラー形式	16
3.1 Harish-Chandra 分解と正則離散系列表現	16
3.2 実斜交群の場合	21
3.3 実斜交群の正則離散系列表現と Siegel モジュラー形式	25
第 II 部 重さ半整数の Siegel モジュラー形式	28
4 Weil 表現	28
4.1 Heisenberg 群とその既約ユニタリ表現	28
4.2 Weil 定数, Kashiwara-Maslov 指数	30
4.3 Schrödinger モデルと Weil 表現	31
4.4 格子モデル	34
4.5 Jacobi 群の既約ユニタリ表現	36

5	重さ $1/2$ の保型因子	37
5.1	Fock モデル	37
5.2	実斜交群の連結な二重被覆群	39
5.3	テータ級数	42
5.4	重さ半整数の Siegel モジュラー形式	44
5.5	テータ関数	46
6	保型形式のテータ対応の一般的原理	48
6.1	Howe 対応	48
6.2	保型形式のテータ対応	51
6.3	コンパクト群からのテータ対応	52
 第 III 部 Jacobi 形式		 53
7	実素点での様子	53
7.1	Jacobi 群の Harish-Chandra 分解	53
7.2	$GSp(V)$ の作用	55
7.3	Jacobi 形式	56
7.4	実 Jacobi 群の“正則離散系列表現”	60
7.5	Jacobi 形式と重さ半整数の Siegel モジュラー形式	62
7.6	Eichler-Zagier, Ibukiyama revisited	64
8	有元素点での様子	65
8.1	帯球関数	65
8.2	Jacobi 群の Hecke 作用素の環	67
8.3	Weil 表現に付随した帯球関数	68
8.4	Jacobi 群のクラス-1 表現	69
 参考文献		 70

## 0 はじめに

$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$  は  $(z, w) \in \mathfrak{h}_n \times \mathbb{C}^n$  に対して

$$\sigma(z, w) = (\sigma(z), wJ(\sigma, z)^{-1})$$

により作用する。但し

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}, \quad J(\sigma, z) = cz + d$$

である。そこで偶数  $0 < k \in \mathbb{Z}$  をとり、 $\mathfrak{h}_n \times \mathbb{C}^n$  上の正則関数  $F$  は次のような変換公式を満たすとする；

- 1) 任意の  $x, y \in \mathbb{Z}^n$  に対して  $F(z, w+xz+y) = \mathbf{e}(-(\langle x, xz \rangle + 2\langle x, w \rangle))F(z, w)$ ,  
 但し  $\mathbf{e}(t) = \exp 2\pi\sqrt{-1}t$  及び  $\langle x, y \rangle = x^t y$  とする ,  
 2) 任意の  $\sigma \in Sp(n, \mathbb{Z})$  に対して  $F|[\sigma]_k = F$  , 但し

$$(F|[\sigma]_k)(z, w) = F(\sigma(z), wJ(\sigma, z)^{-1}) \det J(\sigma, z)^{-k} \mathbf{e}(-\langle w^t c, wJ(\sigma, z)^{-1} \rangle)$$

$$(\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) \text{ とおく .}$$

このとき  $F$  は次のような Fourier 展開をもつ ;

$$F(z, w) = \sum_{N \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z}), r \in \mathbb{Z}^n} a(N, r) \mathbf{e}(\text{tr}(Nz) + \langle r, w \rangle).$$

ここで

$$\text{Sym}_n^*(\mathbb{Z}) = \{N \in \text{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid \text{tr}(NS) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall S \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})\}.$$

$F$  が上の変換公式 1), 2) を満たし , 更に

- 3)  $a(N, r) \neq 0$  となるのは  $N - 4^{-1} {}^t r r \geq 0$  の場合に限る

とき ,  $F$  を重さ  $k$ , index 1 の Jacobi 形式と呼び , その全体を  $J_{k,1}$  と書く .  
 $F \in J_{k,1}$  が上の条件 3) より強く

- 3)'  $a(N, r) \neq 0$  となるのは  $N - 4^{-1} r^t r > 0$  の場合に限る

を満たすとき ,  $F$  を Jacobi 尖点形式と呼び , その全体を  $J_{k,1}^{\text{cusp}}$  と書く .  $F \in J_{k,1}$  に対して , 変換公式 1) は  $F$  が  $w \in \mathbb{C}^n$  の関数としてはテータ関数であることを意味するから , テータ関数の基底の一次結合となる . 即ち Riemann のテータ級数

$$\vartheta_{m', m''}(z, w) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{e} \left( \frac{1}{2} \langle p + m'/2, (p + m'/2)z \rangle + \langle p + m'/2, w + m''/2 \rangle \right)$$

( $z \in \mathfrak{H}_n, w \in \mathbb{C}^n$ ) を用いて  $\theta_\mu(z, w) = \vartheta_{\mu,0}(2z, 2w)$  と定義すると

$$F(z, w) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n / 2\mathbb{Z}^n} F_\mu(z) \theta_\mu(z, w)$$

と書ける . そこで

$$\sigma(F)(z) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n / 2\mathbb{Z}^n} F_\mu(4z) \quad (z \in \mathfrak{H}_n)$$

とおく . 一方 ,

$$\theta(z) = \vartheta_{0,0}(2z, 0) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{e}(\langle p, pz \rangle) \quad (z \in \mathfrak{H}_n)$$

とおいて,  $\mathfrak{H}_n$  上の関数  $h$  と  $\sigma \in Sp(n, \mathbb{R})$  に対して

$$(h|[\sigma]_{k-1/2})(z) = h(\sigma(z)) \frac{\theta(\sigma(z))}{\theta(z)} \det J(\sigma, z)^{-k}$$

とおく. ここで

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{4} \right\}$$

とくと, 任意の  $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4)$  に対して

$$\left( \frac{\theta(\sigma(z))}{\theta(z)} \right)^2 = \text{sign}(\det c) \det J(\sigma, z)$$

となる. そこで  $\mathfrak{H}_n$  上の正則関数  $h$  が

- 1) 任意の  $\sigma \in \Gamma_0(4)$  に対して  $h|[\sigma]_{k-1/2} = h$ ,
- 2)  $h$  は Fourier 展開  $h(z) = \sum_{0 \leq T \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z})} c(T) e(\text{tr}(Tz))$  をもつ

を満たすとき,  $h$  を  $\Gamma_0(4)$  に関する重さ  $k-1/2$  の Siegel モジュラー形式と呼び, その全体を  $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$  と書く. 条件 2) より強く

- 2)'  $c(T) \neq 0$  となるのは  $T > 0$  の場合に限る

を満たすとき,  $h$  を尖点形式と呼び, その全体を  $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$  と書く. さて  $h \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$  であって

$$c(T) \neq 0 \text{ となるのは } \exists \mu \in \mathbb{Z}^n \text{ s.t. } T \equiv -{}^t \mu \mu \pmod{4\text{Sym}_n^*(\mathbb{Z})}$$

のときに限る

なるもの全体を  $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$  と書き,

$$S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4)) = S_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \cap M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$$

とおく. このとき Eichler-Zagier [3] ( $n=1$  のとき) と Ibukiyama [10] ( $n \geq 1$  のとき) により次の定理が示された;

**定理 0.0.1**  $F \mapsto \sigma(F)$  は  $J_{k,1}$  から  $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$  の上への複素線形同型写像で,  $J_{k,1}^{\text{cusp}}$  を  $S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$  に対応させる. この対応は Hecke 作用素と可換である.

この講義の一つの目的は, このような対応のメカニズムを理解することである.

## 第I部 一般論

### 1 保型形式

1.1 保型形式の最も原始的な設定は次のように与えられるだろう；群  $\Gamma$  が集合  $\mathcal{D}$  に左から作用しているとする．又，有限次元複素ベクトル空間  $V$  と写像  $J: \Gamma \times \mathcal{D} \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$  があって

$$J(\gamma\gamma', z) = J(\gamma, \gamma'z) \circ J(\gamma', z) \quad (\gamma, \gamma' \in \Gamma, z \in \mathcal{D}) \quad (1)$$

を満たすとしよう（このような  $J$  を保型因子と呼ぶ）．このとき任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $F(\gamma z) = J(\gamma, z)F(z)$  ( $z \in \mathcal{D}$ ) なる関数  $F: \mathcal{D} \rightarrow V$  を  $\Gamma$  に関する  $\mathcal{D}$  上の保型形式と呼ぶ．これだけではたいした議論は展開できないが，関係式(1) から  $\Gamma$  は  $\mathcal{D} \times V$  に左から  $\gamma(z, v) = (\gamma z, J(\gamma, z)v)$  により作用することがわかる．そこで  $X = \Gamma \backslash \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{V} = \Gamma \backslash (\mathcal{D} \times V)$  とおけば，自然な全射

$$\pi: \mathcal{V} \rightarrow X \quad ((z, v) \pmod{\Gamma}) \mapsto \dot{z} = z \pmod{\Gamma}$$

が考えられる．特に任意の  $z \in \mathcal{D}$  の固定部分群  $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$  に対して  $J(\gamma, z) = 1_V$  ( $\gamma \in \Gamma_z$ ) であるならば， $v \mapsto (z, v) \pmod{\Gamma}$  は全単射  $V \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\dot{z})$  を与えるから， $\pi: \mathcal{V} \rightarrow X$  は  $X$  上のベクトル束を与える．このとき  $F: \mathcal{D} \rightarrow V$  が  $\Gamma$  に関する  $\mathcal{D}$  上の保型形式であることと  $\dot{z} \mapsto (z, F(z)) \pmod{\Gamma}$  がベクトル束  $\pi: \mathcal{V} \rightarrow X$  の大域的切断であることは同値である．このように保型形式を幾何学的な側面からとらえることができ，それが当初の保型形式の捉え方だったように思える [1]．

1.2 ここでは保型形式を群論的な側面から捉えてみよう．群  $G$  が  $\mathcal{D}$  に左から推移的に作用していて， $\Gamma$  は  $G$  の部分群であるとする．又，保型因子  $J$  は  $G$  まで延長されているとする，即ち写像  $J: G \times \mathcal{D} \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$  があって

$$J(gg', z) = J(g, g'z) \circ J(g', z) \quad (g, g' \in G, z \in \mathcal{D}) \quad (2)$$

を満たすとする．原点  $o \in \mathcal{D}$  の固定部分群を  $K = \{g \in G \mid go = o\}$  とすると， $K$  の  $V$  上の表現  $\delta$  が  $\delta(k) = J(k, o)$  により定義される．そこで  $\Gamma$  に関する保型形式  $F: \mathcal{D} \rightarrow V$  に対して，関数  $f_F: G \rightarrow V$  を  $f_F(g) = J(g, o)^{-1}F(go)$  ( $g \in G$ ) により定義すると

- 1) 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f_F(\gamma g) = f_F(g)$ ,
- 2) 任意の  $k \in K$  に対して  $f_F(gk) = \delta(k)^{-1}f_F(g)$

が成り立つ．このとき，もとの保型形式は  $F(z) = J(g, o)f_F(g)$  ( $z = go \in \mathcal{D}, g \in G$ ) により復元されるから， $\mathcal{D}$  上の保型形式を群  $G$  上の関数として

捉えることができる．更に， $V$  の共役空間を  $V^*$  として， $v \in V, \alpha \in V^*$  に対して  $\langle v, \alpha \rangle = \alpha(v) \in \mathbb{C}$  とおく． $K$  の表現  $(\delta, V)$  の反傾表現  $(\check{\delta}, V^*)$  は  $\langle v, \check{\delta}(k)\alpha \rangle = \langle \delta(k^{-1})v, \alpha \rangle$  により定義される．そこで  $\alpha \in V^*$  に対して  $f_{F,\alpha}(g) = \langle f_F(g), \alpha \rangle$  ( $g \in G$ ) とおくと，任意の  $k \in K$  に対して

$$f_{F,\alpha}(gk) = \langle f_F(g), \check{\delta}(k)\alpha \rangle = f_{F,\check{\delta}(k)\alpha}(g) \quad (g \in G)$$

となる．これをもう少し表現論的な言い方をすると次のようになる； $G$  上の左  $\Gamma$ -不変な複素数値関数のなす複素ベクトル空間  $L(\Gamma \backslash G)$  上の  $G$  の右正則表現  $\rho_r$  を考えると，複素線形写像

$$T : V^* \rightarrow L(\Gamma \backslash G) \quad (\alpha \mapsto f_{F,\alpha})$$

は任意の  $k \in K$  に対して  $T \circ \check{\delta}(k) = \rho_r(k) \circ T$  が成り立つ．従って特に  $(\delta, V)$  が  $K$  の既約表現ならば， $f_{F,\alpha}$  は  $K$  の右正則表現  $L(\Gamma \backslash G)$  の  $\check{\delta}$ -成分に属する．

ここまでの議論は原始的過ぎてあまり面白いこともないので，次節では少し解析的な趣向を凝らしてみよう．

## 2 ユニタリ表現と保型形式

2.1 まず  $G$  は局所コンパクト・ユニモジュラー群として， $K \subset G$  はコンパクト部分群とする． $G$  の中心  $Z(G)$  の閉部分群  $A$  をとり， $G$  の閉部分群  $\Gamma$  は  $A$  を開部分群として含むとする．従って  $\Gamma/A$  は離散群であり  $\Gamma$  はユニモジュラーである． $G, K, A$  上の Haar 測度  $d_G(x), d_K(k), d_A(a)$  をとり， $\int_K d_K(k) = 1$  と正規化しておく． $G/A$  上の Haar 測度  $d_{G/A}(\dot{x})$  を

$$\int_G \varphi(x) d_G(x) = \int_{G/A} d_{G/A}(\dot{x}) \int_A d_A(a) \varphi(xa) \quad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定める<sup>1</sup>．更に  $\Gamma$  上の Haar 測度  $d_\Gamma(\gamma)$  を

$$\int_\Gamma \varphi(\gamma) d_\Gamma(\gamma) = \sum_{\dot{\gamma} \in \Gamma/A} \int_A \varphi(\gamma a) d_A(a) \quad (\varphi \in C_c(\Gamma))$$

が成り立つように定め， $\Gamma \backslash G$  上の右  $G$ -不変測度  $d_{\Gamma \backslash G}(\dot{x})$  を

$$\int_G \varphi(x) d_G(x) = \int_{\Gamma \backslash G} d_{\Gamma \backslash G}(\dot{x}) \int_\Gamma d_\Gamma(\gamma) \varphi(\gamma x) \quad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定めると

$$\int_{G/A} \varphi(\dot{x}) d_{G/A}(\dot{x}) = \int_{\Gamma \backslash G} \sum_{\dot{\gamma} \in \Gamma/A} \varphi(\dot{\gamma} \dot{x}) d_{\Gamma \backslash G}(\dot{x}) \quad (\varphi \in C_c(G/A))$$

が成り立つ．

<sup>1</sup> $C_c(G)$  は  $G$  上の複素数値連続関数でコンパクトな台を持つもの全体である．

2.2 以下,  $A$  のユニタリ指標  $\chi$  を一つ固定しておく. 又,  $K$  の既約ユニタリ表現  $(\delta, V_\delta)$  を固定して,  $e_\delta(k) = \dim \delta \cdot \overline{\text{tr } \delta(k)}$  ( $k \in K$ ) とおく.

まず  $G$  上の複素数値可側関数  $f$  であって

- 1) 任意の  $a \in A$  に対して  $f(ax) = \chi(a)^{-1}f(x)$ ,
- 2)  $\int_{G/A} |f(x)|d_{G/A}(\dot{x}) < \infty$

なるものの成す複素ベクトル空間 (を  $\int_{G/A} |f(x)|d_{G/A}(\dot{x}) = 0$  なる  $f$  のなす部分空間で割った商空間)  $L^1(G/A, \chi)$  は  $|f| = \int_{G/A} |f(x)|d_{G/A}(\dot{x})$  をノルムとする複素 Banach 空間であり, 更に畳込み積

$$(f * g)(x) = \int_{G/A} f(xy)g(y^{-1})d_{G/A}(\dot{y})$$

を積とし,  $f \mapsto f^*$  ( $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$ ) を対合とする対合的 Banach 環である.  $L^1(G/A, \chi)$  の元  $f$  であって  $G$  上連続かつ  $G/A$  上の関数  $|f|(\dot{x}) = |f(x)|$  がコンパクト台なるもの全体  $C_c(G/A, \chi)$  は  $L^1(G/A, \chi)$  の稠密な部分代数となる. 特に  $L^1(G)$  は対合的 Banach 環であり  $C_c(G)$  は  $L^1(G)$  の稠密な部分代数である. 又,  $f \in C_c(G)$  に対して  $f_\chi(x) = \int_A f(ax)\chi(a)d_A(a)$  ( $x \in G$ ) は  $C_c(G/A, \chi)$  の元を与え  $|f_\chi| \leq |f|$  かつ  $f \mapsto f_\chi$  は全射  $C_c(G) \rightarrow C_c(G/A, \chi)$  を与えるから, 連続に延長することにより全射  $L^1(G) \rightarrow L^1(G/A, \chi)$  ( $f \mapsto f_\chi$ ) が定義される.

さて  $G$  のユニタリ表現  $(\sigma, E)$  に対して,  $\sigma|_A = \chi$  とすると,  $f \in L^1(G/A, \chi)$  と任意の  $u, v \in E$  に対して

$$(\sigma(f)u, v) = \int_{G/A} f(x)(\sigma(x)u, v)d_{G/A}(\dot{x})$$

なる  $E$  上の有界作用素  $\sigma(f)$  が定まる. このとき  $f \mapsto \sigma(f)$  は対合的 Banach 環  $L^1(G/A, \chi)$  の表現となる.

次に  $e_\delta * f = f * e_\delta = f$  なる  $f \in L^1(G/A, \chi)$  の全体  $L^1(G/A, \chi; \delta)$  は  $L^1(G/A, \chi)$  の部分代数となる. ここで

$$\begin{aligned} (e_\delta * f)(x) &= \int_K e_\delta(k)f(k^{-1}x)d_K(k), \\ (f * e_\delta)(x) &= \int_K f(xk^{-1})e_\delta(k)d_K(k) \quad (x \in G) \end{aligned}$$

である. 更に任意の  $k \in K$  に対して  $f(kxk^{-1}) = f(x)$  なる  $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)$  の全体  $L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  は  $L^1(G/A, \chi; \delta)$  の部分代数となる.

$$\begin{aligned} C_c(G/A, \chi; \delta) &= L^1(G/A, \chi; \delta) \cap C_c(G/A, \chi), \\ C_c(G/A, \chi; \delta)^\circ &= L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ \cap C_c(G/A, \chi) \end{aligned}$$

はそれぞれ  $L^1(G/A, \chi; \delta)$ ,  $L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  の稠密な部分代数である.  $C_c(G/A, \chi; \delta)^\circ$  を  $K$ -タイプ  $\delta$  の Hecke 作用素の環と呼ぶ.  $f \in C_c(G)$  で  $e_\delta * f = f * e_\delta = f$  なるもの全体を  $C(G; \delta)$  とし, 任意の  $k \in K$  に対して  $f(kxk^{-1}) = f(x)$  なる  $f \in C_c(G, \delta)$  の全体を  $C(G; \delta)^\circ$  とおくと,  $f \mapsto f_\chi$  は夫々  $C_c(G, \delta), C_c(G, \delta)^\circ$  から  $C_c(G/A, \chi; \delta), C_c(G/A, \chi; \delta)^\circ$  への全射  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像である. ここで次の命題が基本的である;

**命題 2.2.1**  $L^1(G/A, \chi; \delta)$  の中心は  $L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  に含まれる. 更に, 次は同値である;

- 1)  $\pi|_A = \chi$  なる  $G$  の任意の既約ユニタリ表現  $\pi$  に対して,  $\pi|_K$  における  $\delta$  の重複度は 1 以下,
- 2)  $L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  は  $L^1(G/A, \chi; \delta)$  の中心に一致する,
- 3)  $L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  は可換.

以下の議論では用いないが, 命題 2.2.1 は次のように一般化される [8, pp.12–15], [2, 3.6.2]; まず可換とも 1 をもつとも限らない  $\mathbb{C}$ -代数  $L$  について, 任意の  $r$  個の元  $a_i \in L$  ( $1 \leq i \leq r$ ) に対して

$$[a_1, a_2, \dots, a_r] = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(r)} = 0$$

となるとき,  $L$  は  $r$ -可換 であるという. 次が成り立つ;

- 1)  $L$  が  $r$ -可換ならば, 任意の  $s > r$  に対して  $L$  は  $s$ -可換である,
- 2)  $\dim_{\mathbb{C}} L = n < \infty$  ならば  $L$  は  $n+1$ -可換である,
- 3) 複素係数  $n$  次正方形のなす  $\mathbb{C}$ -代数  $M_n(\mathbb{C})$  が  $r$ -可換となる最小の  $r$  を  $r(n)$  とすると,  $r(n) \geq n$  である,
- 4)  $r(n+1) - r(n) > 1$  である.

これを用いて次の命題が示される;

**命題 2.2.2**  $1 < n \in \mathbb{Z}$  に対して次は同値である;

- 1)  $\pi|_A = \chi$  なる  $G$  の任意の既約ユニタリ表現  $\pi$  に対して,  $\pi|_K$  における  $\delta$  の重複度は  $n$  以下,
- 2)  $L^1(G/A, \chi; \delta)$  は  $n$ -可換.

**2.3**  $G$  のユニタリ表現  $\pi$  であって, それを  $K$  に制限したときに既約成分として  $\delta$  を有限重複度 ( $\neq 0$ ) で含むとき,  $\pi$  をクラス- $\delta$  のユニタリ表現と呼び, その重複度を  $\delta$  に関する  $\pi$  の高さと呼ぶ.

$(\pi, H_\pi)$  を  $\delta$  に関する高さ  $r$  の  $G$  のユニタリ表現で  $\pi|_A = \chi$  なるものとして,  $H_\pi(\delta)$  を  $\delta$ -成分とする. 即ち  $H_\pi$  上の有界作用素  $\pi(e_\delta)$  を

$$(\pi(e_\delta)u, v) = \int_K e_\delta(k)(\pi(k)u, v) d_K(k) \quad (u, v \in H_\pi)$$

により定義すれば,  $u \mapsto \pi(e_\delta)u$  が直交射影  $H_\pi \rightarrow H_\pi(\delta)$  を与える. このとき有界連続関数

$$\Phi_{\pi,\delta} : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(H_\pi(\delta)), \quad \psi_{\pi,\delta} : G \rightarrow \mathbb{C}$$

を

$$\Phi_{\pi,\delta}(x) = \pi(e_\delta) \circ \pi(x)|_{H_\pi(\delta)}, \quad \psi_{\pi,\delta}(x) = (\dim \delta)^{-1} \text{tr} \Phi_{\pi,\delta}(x) \quad (x \in G)$$

により定義する.  $\Phi_{\pi,\delta}$  を  $(\pi, H_\pi)$  に付随する  $K$ -タイプ  $\delta$  の球関数と呼び,  $\psi_{\pi,\delta}$  を  $\pi$  に付随する  $K$ -タイプ  $\delta$  の球跡関数と呼ぶ. 定義から

$$\Phi_{\pi,\delta}(kxk') = \pi(k) \circ \Phi_{\pi,\delta}(x) \circ \pi(k') \quad (k, k' \in K)$$

である. 又, 任意の  $k \in K$  に対して  $\psi_{\pi,\delta}(kxk^{-1}) = \psi_{\pi,\delta}(x)$  かつ  $\overline{e_\delta} * \psi_{\pi,\delta} = \psi_{\pi,\delta} * \overline{e_\delta} = \psi_{\pi,\delta}$  である.  $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  に対して  $\pi(f)H_\pi(\delta) \subset H_\pi(\delta)$  で

$$\pi(f)|_{H_\pi(\delta)} = \int_{G/A} f(x) \Phi_{\pi,\delta}(x) d_{G/A}(x) \in \text{End}_K(H_\pi(\delta))$$

である.  $\delta$  に関する  $\pi$  の高さが  $r$  だから  $H_\pi(\delta) = V_\delta^r$  なる同一視を一つ決めると  $\text{End}_K(H_\pi(\delta)) = M_r(\mathbb{C})$  と同一視される. この同一視によって  $\pi(f)|_{H_\pi(\delta)} \in \text{End}_K(H_\pi(\delta)) = M_r(\mathbb{C})$  とみたものを  $\widehat{\Psi}_{\pi,\delta}(f)$  と書くことにすると

$$\widehat{\Psi}_{\pi,\delta} : L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ \rightarrow M_r(\mathbb{C})$$

は  $\mathbb{C}$ -代数の準同型写像となる. 又,  $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f) = \int_{G/A} f(x) \psi_{\pi,\delta}(x) d_{G/A}(x)$$

とおくと,  $\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f) = \text{tr} \widehat{\Psi}_{\pi,\delta}(f)$  である. 定義から  $\psi_{\pi,\delta}$  は  $G$  上の正定値関数 (即ち, 任意の有限部分集合  $\{g_i\}_{i=1,\dots,n} \subset G$  に対して  $(\psi_{\pi,\delta}(g_i g_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,n}$  は半正定値 Hermite 行列) である. 更に次が成り立つ;

**命題 2.3.1**  $(\pi, H_\pi)$  が既約ならば

$$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta} : C_c(G/A, \chi; \delta)^\circ \rightarrow M_r(\mathbb{C})$$

は全射である.

これらの逆が次のように成り立つ;

**定理 2.3.2**  $G$  上の正定値連続関数  $\psi$  に対して

- 1) 任意の  $a \in A$  に対して  $\psi(ax) = \chi(a)\psi(x)$ ,
- 2) 任意の  $k \in K$  に対して  $\psi(kxk^{-1}) = \psi(x)$ ,
- 3)  $\overline{e_\delta} * \psi = \psi * \overline{e_\delta} = \psi$ ,

4)  $\mathbb{C}$ -代数の全射準同型写像  $\Phi : L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ \rightarrow M_r(\mathbb{C})$  があって

$$\Phi(f^*) = \Phi(f)^*, \quad \int_{G/A} f(x)\psi(x)d_{G/A}(x) = \text{tr } \Phi(f)$$

が任意の  $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)^\circ$  に対して成り立つ

ならば,  $\delta$  に関する高さが  $r$  かつ  $\psi = \psi_{\pi, \delta}$  なる  $G$  の既約ユニタリ表現  $\pi$  が存在する.

$G$  の既約ユニタリ表現は, それに付随する球跡関数によって決定される. 即ち,

**定理 2.3.3**  $G$  の既約ユニタリ表現  $\pi, \pi'$  は共にクラス- $\delta$  かつ  $\pi|_A = \pi'|_A = \chi$  であるとする. このとき  $\pi, \pi'$  がユニタリ同値である必要十分条件は  $\widehat{\psi}_{\pi, \delta} = \widehat{\psi}_{\pi', \delta}$  なることである.

**2.4**  $(\pi, H_\pi)$  を  $G$  の既約ユニタリ表現で,  $\delta$  に関する高さが 1 で  $\pi|_A = \chi$  なるものとする. このとき  $\pi$  に付随して  $G$  上の保型形式を定義しよう.

まず  $(\rho, V_\rho)$  を  $\Gamma$  の有限次元ユニタリ表現として, 誘導表現  $\pi_{r, \rho} = \text{Ind}_\Gamma^G \rho$  の表現空間を  $L^2(\Gamma \backslash G, \rho)$  とする. 即ち

- 1) 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f(\gamma x) = \rho(\gamma)f(x)$ ,
- 2)  $\int_{\Gamma \backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma \backslash G}(x) < \infty$

なる可側関数  $f : G \rightarrow V_\rho$  のなす複素ベクトル空間(を  $\int_{\Gamma \backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma \backslash G}(x) = 0$  なる  $f$  のなす部分空間で割ったもの)で, 内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma \backslash G} (f(x), g(x))_\rho d_{\Gamma \backslash G}(x)$$

(有限次元複素 Hilbert 空間  $V_\rho$  の内積を  $(\cdot, \cdot)_\rho$  とする)に関して複素 Hilbert 空間である.  $x \in G$  の  $f \in L^2(\Gamma \backslash G, \rho)$  への作用を  $(\pi_{r, \rho}(x)f)(y) = f(yx)$  により定義する.

$L^2(\Gamma \backslash G, \rho)$  の元  $f$  は  $G$  上局所二乗可積分である, 即ち, 任意のコンパクト部分集合  $M \subset G$  に対して  $\int_M |f(x)|^2 d_G(x) < \infty$  である.

$\pi$  に付随する  $G$  上の保型形式を定義するのに, 誘導表現  $\text{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$  ( $\check{\rho}$  は  $\rho$  の反傾表現)の  $\check{\pi}$ -成分を考えるが, それが非自明であるためには  $\rho|_A = \chi$  が必要である.

以上の準備の下,  $\text{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$  の  $\check{\pi}$ -成分を  $K$  に制限したときの  $\check{\delta}$ -成分(ここで反傾表現を考えなくてはいけない理由は 1.2 にあるとおりである)を  $L^2(\Gamma \backslash G, \check{\rho}; \check{\pi}, \check{\delta})$  とおく. この空間をある程度具体的に把握するために, Godement の球関数の理論を用いる. 次の定理が基本的である;

定理 2.4.1  $\sigma|_A = \chi$  なる  $G$  のユニタリ表現  $(\sigma, E)$  に対して,  $E$  の  $\pi$ -成分  $E(\pi)$  上の  $K$  のユニタリ表現  $(\sigma|_K, E(\pi))$  の  $\delta$ -成分を  $E(\pi, \delta)$  とおくと

$$E(\pi, \delta) = \{u \in E \mid \sigma(f)u = \widehat{\psi}_{\pi, \delta}(f)u \text{ for } \forall f \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o\}$$

である .

この定理を  $\text{Ind}_{\Gamma}^G \check{\rho}$  と  $\check{\pi}$  に適用することを念頭に,  $\pi$  に付随した  $G$  上の保型形式の空間を次のように定義する ;

定義 2.4.2 連続関数  $f : G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\rho}, V_{\delta})$  であって条件

- 1) 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f(\gamma x) = f(x) \circ \rho(\gamma)^{-1}$ ,
- 2)  $\int_{\Gamma \backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma \backslash G}(x) < \infty$ ,
- 3) 任意の  $k \in K$  に対して  $f(xk) = \delta(k)^{-1} \circ f(x)$ ,
- 4) 任意の  $\varphi \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o$  に対して

$$\int_{G/A} f(xy^{-1})\varphi(y)d_{G/A}(y) = \widehat{\psi}_{\pi, \delta}(\varphi) \cdot f(x)$$

を満たすもの全体のなす複素ベクトル空間を  $\mathcal{A}_{\delta}(\Gamma \backslash G, \rho, \pi)$  と書く .

上の定義で  $A, B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\rho}, V_{\delta})$  の内積を  $(A, B) = \text{tr}(A \circ B^*)$  により定義する . 但し,  $B^* \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\delta}, V_{\rho})$  を  $(B^*v, u)_{\rho} = (v, Bu)_{\delta}$  ( $v \in V_{\delta}, u \in V_{\rho}$ ) により定義する . 保型形式の空間  $\mathcal{A}_{\delta}(\Gamma \backslash G, \rho, \pi)$  上の内積を

$$(f, g) = \int_{G/A} (f(x), g(x))d_{\Gamma \backslash G}(x)$$

により定義すると, 次の基本定理が得られる ;

定理 2.4.3  $f \otimes \alpha \in \mathcal{A}_{\delta}(\Gamma \backslash G, \rho, \delta) \otimes_{\mathbb{C}} V_{\delta}^*$  に対して  $\theta_{f \otimes \alpha} : G \rightarrow V_{\rho}^*$  を

$$\langle \theta_{f \otimes \alpha}(x), u \rangle = (\dim \delta)^{1/2} \langle \alpha, f(x)u \rangle \quad (x \in G, u \in V_{\rho})$$

により定義すると,  $f \otimes \alpha \mapsto \theta_{f \otimes \alpha}$  は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$\mathcal{A}_{\delta}(\Gamma \backslash G, \rho, \pi) \otimes_{\mathbb{C}} V_{\delta}^* \xrightarrow{\sim} L^2(\Gamma \backslash G, \check{\rho}; \check{\pi}, \check{\delta})$$

に延長される .

特に  $\dim \chi = 1$  の場合には,  $V_{\rho} = \mathbb{C}$  として  $A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\rho}, V_{\delta})$  と  $A(1) \in V_{\delta}$  を同一視すれば,  $\mathcal{A}_{\delta}(\Gamma \backslash G, \rho, \pi)$  は

- 1) 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f(\gamma x) = \rho(\gamma)^{-1} f(x)$ ,
- 2)  $\int_{\Gamma \backslash G} |f(x)|_{\delta}^2 d_{\Gamma \backslash G}(x) < \infty$ ,

- 3) 任意の  $k \in K$  に対して  $f(xk) = \delta(k)^{-1}f(x)$ ,  
 4) 任意の  $\varphi \in C_c(G/A, \chi; \delta)^\circ$  に対して

$$\int_{G/A} f(xy^{-1})\varphi(y)d_{G/A}(\dot{y}) = \widehat{\psi}_{\pi, \delta}(\varphi) \cdot f(x)$$

なる連続関数  $f: G \rightarrow V_\delta$  のなす複素ベクトル空間に内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma \backslash G} (f(x), g(x))_\delta d_{\Gamma \backslash G}(\dot{x})$$

を与えた複素 Hilbert 空間である .

2.5 最後に代数群のアデール化上の保型形式を扱うための一般論を与えておく .  $\mathbb{P}$  は可算添え字集合で ,  $p \in \mathbb{P}$  に対して  $G_p$  は局所コンパクト・ユニモジュラー群 ,  $K_p \subset G_p$  はコンパクト部分群とする . 更に有限部分集合  $\mathbb{P}_\infty \subset \mathbb{P}$  があって ,  $p \in \mathbb{P}_f = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_\infty$  に対しては  $K_p$  は  $G_p$  の開部分群であるとする . 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて  $x_p \in K_p$  である  $(x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$  の全体

を  $G$  とすれば , それは直積群  $\prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$  の部分群である . コンパクト空間の直積空間はコンパクトだから (Tikhonov の定理) , 有限部分集合  $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$  に対して  $G_S = \prod_{p \in S} G_p \times \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus S} K_p$  は直積位相に関して局所コンパクトである . 更に有限部分集合  $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset S' \subset \mathbb{P}$  に対して  $G_S$  は  $G_{S'}$  の開部分空間となり ,  $G = \bigcup_{\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}} G_S$  である . そこで  $V \subset G$  が開集合であることを , 全ての有限部分集合  $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$  に対して  $V \cap G_S$  が  $G_S$  の開部分集合なることと定義すれば , この位相に関して  $G$  は局所コンパクト群となる . こうして出来た局所コンパクト群  $G$  を  $\{K_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する  $\{G_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の制限直積と呼ぶ . 直積群  $K = \prod_{p \in \mathbb{P}} K_p$  は  $G$  のコンパクト部分群である . 各  $p \in \mathbb{P}$  に対して  $A_p \subset Z(G_p)$  は閉部分群として ,  $\{A_p \cap K_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する  $\{A_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の制限直積を  $A$  とおけば ,  $A$  は自然に  $Z(G)$  の閉部分群となる .

$G_p$  上の Haar 測度  $\mu_p$  をとり ,  $p \in \mathbb{P}_f$  に対しては  $\mu_p(K_p) = 1$  と仮定する . 又 ,  $K_p$  ( $p \in \mathbb{P}$ ) 上の Haar 測度  $\nu_p$  は  $\nu_p(K_p) = 1$  と正規化しておく . 有限部分集合  $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$  に対して ,  $\nu_S(K^S) = 1$  なる  $K^S = \prod_{p \notin S} K_p$  上の Haar 測度  $\nu_S$  をとり ,  $G_S$  上の Haar 測度  $\mu_S = \prod_{p \in S} \mu_p \times \nu_S$  を得る .  $\text{supp } \varphi \subset G_S$  なる  $\varphi \in C_c(G)$  の全体を  $C_{c,S}(G)$  とおくと  $C_c(G) = \bigcup_{\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}} C_{c,S}(G)$  だから ,  $G$  上の Haar 測度  $\mu$  が

$$\int_G \varphi(x) d\mu(x) = \int_{G_S} \varphi(x) d\mu_S(x) \quad (\varphi \in C_{c,S}(G))$$

により定義される． $\mu$  を Haar 測度の族  $\{\mu_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{K_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する制限直積と呼ぶことにする．

$G/A$  は  $(x_p)_{p \in \mathbb{P}} \pmod{A} \mapsto (x_p \pmod{A_p})_{p \in \mathbb{P}}$  により  $\{G_p/A_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{K_p A_p/A_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する制限直積  $\prod'_{p \in \mathbb{P}} G_p/A_p$  と位相群として同型だから，この二つを同一視する．各  $p \in \mathbb{P}$  に対して  $A_p$  上の Haar 測度  $\eta_p$  を定めて， $p \notin \mathbb{P}_\infty$  に対しては  $\eta_p(A_p \cap K_p) = 1$  とする． $A$  上の Haar 測度  $\eta$  は  $\{\eta_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{A_p \cap K_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する制限直積としよう．更に  $G_p/A_p$ ,  $G/A$  上の Haar 測度  $\bar{\mu}_p, \bar{\mu}$  をそれぞれ

$$\int_{G_p} \psi(x) d\mu_p(x) = \int_{G_p/A_p} \left( \int_{A_p} \psi(xa) d\eta_p(a) \right) d\bar{\mu}_p(x) \quad (\psi \in C_c(G_p),$$

$$\int_G \varphi(x) d\mu(x) = \int_{G/A} \left( \int_A \varphi(xa) d\eta(a) \right) d\bar{\mu}(x) \quad (\varphi \in C_c(G))$$

となるように定めると， $\bar{\mu}$  は  $\{\bar{\mu}_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{K_p A_p/A_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する制限直積となる．

コンパクト群  $K_p$  ( $p \in \mathbb{P}$ ) の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の全体を  $\hat{K}_p$  と書いて，直積集合  $\prod_{p \in \mathbb{P}} \hat{K}_p$  の元  $(\delta_p)_{p \in \mathbb{P}}$  であって，有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を

除いて  $\delta_p = 1_{K_p}$  となるもの全体を  $\prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{K}_p$  とする． $(\delta_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{K}_p$  に対

して，有限部集合  $S \subset \mathbb{P}$  があって  $p \notin S$  ならば  $\delta_p = 1_{K_p}$  となるように出来る．このときコンパクト群  $\prod_{p \notin S} K_p$  の自明な 1 次元表現を  $1_S$  として

$\otimes_{p \in \mathbb{P}} \delta_p = (\otimes_{p \in S} \delta_p) \otimes 1_S$  とおくと，これは  $K$  の既約ユニタリ表現を与えて， $(\delta_p)_{p \in \mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p \in \mathbb{P}} \delta_p$  は  $\prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{K}_p$  から  $\hat{K}$  への単射である．更に

**命題 2.5.1** 有限個を除いて  $K_p$  が完全非連結（即ち，単位元を含む連結成分が単位元のみからなる）とき， $(\delta_p)_{p \in \mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p \in \mathbb{P}} \delta_p$  は  $\prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{K}_p$  から  $\hat{K}$  への全単射である．

同様に  $A$  のユニタリ指標を調べておく． $p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_\infty$  に対しては  $A_p \cap K_p$  は  $A_p$  のコンパクト開部分群となるから， $A_p$  の Pontryagin 双対群  $\hat{A}_p$  の中で

$$L_p = (A_p \cap K_p)^\perp = \{\alpha \in \hat{A}_p \mid \langle A_p \cap K_p, \alpha \rangle = 1\}$$

はコンパクト開部分群である．そこで  $\{\hat{A}_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{L_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する制限直積を  $\prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{A}_p$  とおく．すると  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{A}_p$  に対して  $\otimes_{p \in \mathbb{P}} \alpha_p \in \hat{A}$  が

$(\alpha_p)_{p \in \mathbb{P}} \mapsto \prod_{p \in \mathbb{P}} \alpha_p(a_p)$  により定義される．このとき

命題 2.5.2 1)  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p \in \mathbb{P}} \alpha_p$  は  $\prod'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{A}_p$  から  $\widehat{A}$  への単射連続群準同型

写像である ,

2) 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて  $A_p$  が完全非連結ならば , 上の写像は全射である .

$(\delta_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{K}_p$  をとり  $\delta = \otimes_{p \in \mathbb{P}} \delta_p \in \widehat{K}$  とおく . 又 ,  $(\chi_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{A}_p$

をとり  $\chi = \otimes_{p \in \mathbb{P}} \chi_p \in \widehat{A}$  とおく . 簡単のために  $\mathcal{C}_p = C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)$ ,  $\mathcal{H}_p = C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^\circ$  とおく .  $p \in \mathbb{P}_f$  に対して ,  $K_p$  は  $G_p$  のコンパクト開部分群だから ,  $G_p$  における  $K_p$  の特性関数を  $\varepsilon_p \in C_c(G_p)$  とおき

$$\varepsilon_{\chi,p}(x) = \int_{A_p} \varepsilon_p(xa) \chi_p(a) d\eta_p(a) \quad (x \in G_p)$$

とおくと ,  $\varepsilon_{\chi,p} \in \mathcal{C}_p$  である .  $\mathbb{P}_\infty$  と  $\delta_p \neq \mathbf{1}_{K_p}$  又は  $\chi_p \notin L_p$  となる  $p \in \mathbb{P}_f$  の全体を  $S_1$  とすると ( $S_1$  は有限集合である)  $p \notin S_1$  に対して  $\varepsilon_{\chi,p}(1) = 1$  かつ任意の  $\varphi \in \mathcal{C}_p$  に対して  $\varepsilon_{\chi,p} * \varphi = \varphi * \varepsilon_{\chi,p} = \varphi$  となり

$$|\varepsilon_{\chi,p}(x)| = \begin{cases} 1 & : x \in K_p A_p / A_p, \\ 0 & : x \notin K_p A_p / A_p \end{cases}$$

となる . 有限部分集合  $S_1 \subset S \subset \mathbb{P}$  に対して ,  $\otimes_{p \in S} \varphi_p \in \otimes_{p \in S} \mathcal{C}_p$  を  $G$  上の関数

$$(\otimes_{p \in S} \varphi_p)(x) = \prod_{p \in S} \varphi_p(x_p) \times \prod_{p \notin S} \varepsilon_{\chi,p}(x_p) \quad (x = (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in G)$$

と同一視して  $\otimes_{p \in S} \mathcal{C}_p$  を  $L^1(G/A, \chi, \delta)$  の  $\mathbb{C}$ -部分代数とみなして

$$\otimes_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{C}_p = \bigcup_S \otimes_{p \in S} \mathcal{C}_p \subset L^1(G/A, \chi, \delta)$$

とおく ( $S$  は  $S_1 \subset S$  なる  $\mathbb{P}$  の有限部分集合を走る) . 同様に  $L^1(G/A, \chi, \delta)^\circ$  の  $\mathbb{C}$ -部分代数  $\otimes_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{H}_p = \bigcup_S \otimes_{p \in S} \mathcal{H}_p$  を定義すると次の命題が成り立つ ;

命題 2.5.3  $L^1$ -ノルムに関して ,  $\otimes_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{C}_p$  は  $L^1(G/A, \chi, \delta)$  の稠密な部分空間であり ,  $\otimes_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{H}_p$  は及び  $L^1(G/A, \chi, \delta)^\circ$  の稠密な部分空間である .

次にユニタリ表現の制限直積を考えよう . まず , 複素 Hilbert 空間の無限族  $\{H_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  及び , 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて (具体的には有限部分集合  $S_0 \subset \mathbb{P}$  を除いて)  $|u_p^\circ| = 1$  なる  $u_p^\circ \in H_p$  が与えられたとする . 一般に有限部分集合  $S \subset \mathbb{P}$  に対して , 代数的なテンソル積  $\otimes_{p \in S} H_p$  上の内積が  $(\otimes_{p \in S} u_p, \otimes_{p \in S} v_p) = \prod_{p \in S} (u_p, v_p)$  により定義されるが , 更に有限部分集合

$S_0 \subset S \subset T \subset \mathbb{P}$  に対して  $u \mapsto u \otimes (\otimes_{p \in T \setminus S} u_p^o)$  は  $\otimes_{p \in S} H_p$  から  $\otimes_{p \in T} H_p$  へのユニタリ線形写像となるから, これにより  $\otimes_{p \in S} H_p$  を  $\otimes_{p \in T} H_p$  の部分空間と同一視して

$$\otimes_{p \in \mathbb{P}}' H_p = \bigcup_{S_0 \subset S \subset \mathbb{P}} \otimes_{p \in S} H_p$$

とおく. 言い換えれば,  $\otimes_{p \in \mathbb{P}}' H_p$  は代数的テンソル積  $\otimes_{p \in \mathbb{P}} H_p$  の元  $\sum \otimes_{p \in \mathbb{P}} u_p$  であって, 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除けば  $u_p = u_p^o$  となるもの全体であるから, そこには内積が  $(\otimes_{p \in \mathbb{P}} u_p, \otimes_{p \in \mathbb{P}} v_p) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (u_p, v_p)$  により定義される. この内積

に関する  $\otimes_{p \in \mathbb{P}}' H_p$  の完備化  $\widehat{\otimes}_{p \in \mathbb{P}}' H_p$  を  $\{H_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{u_p^o\}_{p \in \mathbb{P} \setminus S_0}$  に関する制限テンソル積と呼ぶ. 次に直積群  $\prod_{p \in \mathbb{P}} \text{Aut}(H_p)$  の元  $(T_p)_{p \in \mathbb{P}}$  であって, 有

限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて  $T_p u_p^o = u_p^o$  なるもの全体を  $\prod_{p \in \mathbb{P}}' \text{Aut}(H_p)$  とおく.

$(T_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}}' \text{Aut}(H_p)$  をとると, 有限部分集合  $S_0 \subset S \subset \mathbb{P}$  に対して

$\otimes_{p \in S} T_p \in \text{Aut}(\otimes_{p \in S} H_p)$  となり, 更に有限部分集合  $S_0 \subset S \subset T \subset \mathbb{P}$  に対して  $\otimes_{p \in S} H_p$  上では  $\otimes_{p \in T} T_p = \otimes_{p \in S} T_p$  となるから,  $\otimes_{p \in \mathbb{P}}' T_p \in \text{Aut}(\otimes_{p \in \mathbb{P}}' H_p)$  が  $(\otimes_{p \in \mathbb{P}}' T_p) \otimes_{p \in \mathbb{P}} u_p = \otimes_{p \in \mathbb{P}} T_p u_p$  により定義され, これを連続的に延長して  $\otimes_{p \in \mathbb{P}}' T_p \in \text{Aut}(\widehat{\otimes}_{p \in \mathbb{P}}' H_p)$  を得る. このとき  $(T_p)_{p \in \mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p \in \mathbb{P}}' T_p$  は  $\prod_{p \in \mathbb{P}}' \text{Aut}(H_p)$  から  $\text{Aut}(\widehat{\otimes}_{p \in \mathbb{P}}' H_p)$  への単射群準同型写像となる.

さてここで, 各  $p \in \mathbb{P}$  に対して  $G_p$  のユニタリ表現  $(\pi_p, H_p)$  があって, 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて (具体的には有限部分集合  $S_0 \subset \mathbb{P}$  を除いて)  $\pi_p|_{K_p}$  は  $K_p$  の自明な 1 次元表現  $1_{K_p}$  を重複度 1 で含むとする. このとき  $p \in \mathbb{P} \setminus S_0$  に対して  $|u_p^o| = 1$  なる  $K_p$ -不変ベクトル  $u_p^o \in H_p$  をとって,  $\{H_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{u_p^o\}_{p \in \mathbb{P} \setminus S_0}$  に関する制限テンソル積を  $H$  とする.  $x = (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in G$  をとると, 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除くと  $x_p \in K_p$  となり, 従って  $(\pi_p(x_p))_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}}' \text{Aut}(H_p)$

であるから,  $\pi(x) = \otimes_{p \in \mathbb{P}}' \pi_p(x_p) \in \text{Aut}(H)$  が定義される. このとき  $(\pi, H)$  は  $G$  のユニタリ表現となる.  $K_p$ -不変ベクトル  $u_p^o \in H_p$  は絶対値 1 の複素定数倍を除いて一意だから,  $(\pi, H)$  はユニタリ同値を除いて一意に定まる. そこでこれを  $\{\pi_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  の  $\{K_p\}_{p \in \mathbb{P}}$  に関する制限テンソル積と呼び,  $\otimes_{p \in \mathbb{P}}' \pi_p$  と書く. 次の定理が基本的である;

**定理 2.5.4**  $\pi_p$  が全て既約であり, 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて  $K_p$  が完全非連結ならば, 制限テンソル積  $\otimes_{p \in \mathbb{P}}' \pi_p$  は  $G$  の既約ユニタリ表現となる.

各  $p \in \mathbb{P}$  に対して  $\pi_p|_{A_p} = \chi_p$  ならば  $\pi|_A = \chi$  となるが, 逆に次の定理が成り立つ;

**定理 2.5.5**  $G_p$  ( $p \in \mathbb{P}$ ) は全てタイプ I であり, 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて  $C_c(G_p/A_p, \chi_p, \mathbf{1}_{K_p})$  は可換であるとする. このとき,  $\pi|_A = \chi$  なる  $G$  の既約

ユニタリ表現  $(\pi, H)$  が  $\delta = \otimes_{p \in \mathbb{P}} \delta_p \in \widehat{K}$  ( $(\delta_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{K}_p$ ) なる  $K$ -タイプを含むならば, 各  $G_p$  の既約ユニタリ表現  $\pi_p$  を適当に取って  $\pi = \otimes_{p \in \mathbb{P}} \pi_p$  とできる.

以上の準備の下に, 制限直積上の保型形式の空間を見てみよう.  $G$  の既約ユニタリ表現  $\pi$  は  $G_p$  の既約ユニタリ表現  $\pi_p$  の  $K_p$  に関する制限テンソル積で

$$\delta = \otimes_{p \in \mathbb{P}} \delta_p \in \widehat{K}, \quad (\delta_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{K}_p$$

なる  $K$ -タイプを重複度 1 で含むとする. このとき  $\pi_p|_{A_p} = \chi_p \in \widehat{A}_p$  とすると,  $(\chi_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod'_{p \in \mathbb{P}} \widehat{A}_p$  で,  $\pi|_A = \chi = \otimes_{p \in \mathbb{P}} \chi_p$  となる. ここで  $\pi_p$  の  $K_p$ -タイプ  $\delta_p$  の球跡関数を簡単に  $\psi_p$  と書くことにする. すると  $x = (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in G$  にたいして, 有限個の  $p \in \mathbb{P}$  を除いて  $x_p \in K_p$  かつ  $\delta_p = \mathbf{1}_{K_p}$  だから,  $\psi_p(x_p) = 1$  となり  $\psi_{\pi, \delta}(x) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \psi_p(x_p)$  ( $x = (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in G$ ) である. そこで  $G$  の閉部分群  $\Gamma$  は  $A$  を開部分群として含むとして,  $\Gamma$  の有限次元ユニタリ表現  $(\rho, V_\rho)$  は  $\rho|_A = \chi$  を満たすとする. このとき, 命題 2.5.3 に注意すると,  $G$  上の保型形式の空間  $\mathcal{A}_\delta(\Gamma \backslash G, \rho, \pi)$  は, 連続関数  $f : G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$  で, 条件

- 1) 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f(\gamma x) = f(x) \circ \rho(\gamma)^{-1}$ ,
- 2)  $\int_{\Gamma \backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma \backslash G}(x) < \infty$ ,
- 3) 任意の  $k \in K$  に対して  $f(xk) = \delta(k^{-1}) \circ f(x)$ ,
- 4) 任意の  $\varphi \in C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$  ( $p \in \mathbb{P}$ ) に対して

$$\int_{G_p/A_p} f(xy^{-1})\varphi(y)d\bar{\mu}_p(y) = \widehat{\psi}_p(\varphi)f(x)$$

を満たすものの全体のなす複素ベクトル空間に内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma \backslash G} (f(x), g(x))d_{\Gamma \backslash G}(x)$$

を与えた複素 Hilbert 空間である. このように  $G$  上の保型形式は各「局所的な Hecke 作用素」の環  $C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$  ( $p \in \mathbb{P}$ ) の作用によって定まり, その作用の固有値は  $G_p$  の既約ユニタリ表現  $\pi_p$  を定めるのである.

### 3 Siegel モジュラー形式

3.1 まず有界対象領域の基本的な一般論をまとめておく. 詳細は [16, Chap.2] を参照.

$G$  は中心が有限なる連結実 Lie 群で, その Lie 環  $\mathfrak{g}$  は半単純であるとする. 即ち,  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$  は  $\mathfrak{g}$  上の非退化実二次形式である. 指数写像を  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  とする.

$\mathfrak{g}$  の Cartan 対合  $\theta$  (即ち, Lie 環  $\mathfrak{g}$  の位数 2 の自己同型写像であって,  $\mathfrak{g}$  上の二次形式  $B_{\mathfrak{g}}(X, \theta X)$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) が負定値となるもの) を一つとり, 付随する Cartan 分解を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$  とする (即ち  $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$  はそれぞれ  $\theta$  の固有値  $-1, 1$  の固有空間).  $\mathfrak{k}$  に対応する  $G$  の連結閉部分群  $K$  は  $G$  の極大コンパクト部分群であり,  $G$  のコンパクト部分群は  $K$  の  $G$ -共役部分群に含まれる. 実解析的多様体の同型

$$K \times \mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} G \quad ((k, X) \mapsto k \cdot \exp X)$$

が成り立ち,  $\theta \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  は  $\theta(k \cdot \exp X) = k \cdot \exp(-X)$  ( $k \in K, X \in \mathfrak{p}$ ) により  $G$  の自己同型写像に延長される [7, p.480, Cor 1].

$(\text{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$  なる  $H_0 \in Z(\mathfrak{k})$  が存在すると仮定する (このとき  $(G, K)$  を Hermite 対と呼ぶ).  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  として

$$\mathfrak{p}^{\pm} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \text{ad}(H_0)X = \pm\sqrt{-1}X\}$$

とおくと,  $\mathfrak{p}^{\pm}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の Lie 部分環であり  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$  となる.

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(H_0)X = 0\}$$

である. そこで  $\text{Lie}(G_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  なる連結複素 Lie 群  $G_{\mathbb{C}}$  をとり,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の Lie 部分環  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}$  に対応する  $G_{\mathbb{C}}$  の連結閉部分群をそれぞれ  $K_{\mathbb{C}}, P^{\pm}$  とすると,  $P^{\pm}$  は可換群で

$$\exp: \mathfrak{p}^{\pm} \rightarrow P^{\pm}$$

は全射連続群準同型写像である ( $\mathfrak{p}^{\pm}$  は加法群).  $[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}] \subset \mathfrak{p}^{\pm}$  だから,  $P^+K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}P^-$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の部分群である. 更に

命題 3.1.1  $P^+K_{\mathbb{C}}P^-$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の開部分集合で,  $P^+ \times K_{\mathbb{C}} \times P^-$  から  $G_{\mathbb{C}}$  への写像  $(p, k, q) \mapsto pkq$  は全単射である.

よって  $K_{\mathbb{C}}P^-$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の閉部分群である. ここで連続群準同型写像  $i: G \rightarrow G_{\mathbb{C}}$  があって, 次を満たすと仮定する;

- 1)  $i$  の微分写像  $d(i): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  は自然な包含写像である,
- 2)  $i(G) \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$  かつ  $i^{-1}(K_{\mathbb{C}}P^-) = K$ .

このとき自然な単射の列

$$G/K \xrightarrow{i} i(G)K_{\mathbb{C}}P^-/K_{\mathbb{C}}P^- \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-/K_{\mathbb{C}}P^- \rightarrow P^+ \xrightarrow{\log} \mathfrak{p}^+$$

( $\log = \exp^{-1}$ ) により  $G/K$  を複素ベクトル空間  $\mathfrak{p}^+$  の部分集合と同一視したものを  $\mathcal{D}$  としよう. 即ち,  $\dot{g} \in \mathcal{D} = G/K$  に対して

$$i(\dot{g}) = \exp z \cdot k \cdot q \quad (z \in \mathfrak{p}^+, k \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^-)$$

としたとき  $\dot{g} = z$  と同一視する．特に  $\dot{i} \in \mathcal{D} = G/K$  は  $0 \in \mathfrak{p}^+$  と同一視される．このとき

$$\dim \mathcal{D} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}^+$$

だから  $\mathcal{D}$  は  $\mathfrak{p}^+$  の連結開部分集合となる．さて  $g \in G$  と  $z \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$  に対して,  $\exp z \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$  だから  $i(g)\exp z \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$  , よって

$$i(g)\exp z = \exp g(z) \cdot J(g, z) \cdot q \quad (g(z) \in \mathcal{D}, J(g, z) \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^-)$$

と一意的に書ける．このとき

- 1)  $(g, z) \mapsto g(z)$  により  $G$  は  $\mathcal{D}$  に推移的に作用し  $K$  は  $0 \in \mathcal{D}$  の固定部分群である,
- 2) 写像  $J: G \times \mathcal{D} \rightarrow K_{\mathbb{C}}$  は実解析的で,  $z \in \mathcal{D}$  に関しては正則である．更に任意の  $g, h \in G, z \in \mathcal{D}$  に対して

$$J(gh, z) = J(g, h(z))J(h, z),$$

- 3) 任意の  $k \in K$  に対して  $J(k, 0) = i(k)$  であり,  $z \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$  に対して  $k(z) = \text{Ad}(i(k))z$  である．

$J$  を自然な保型因子と呼ぶ． $K_{\mathbb{C}}$  の有限次元連続複素表現  $(\delta, V_{\delta})$  があれば,  $J_{\delta}(g, z) = \delta(J(g, z))$  とおくことにより, 1.2 節の意味の保型因子

$$J_{\delta}: G \times \mathcal{D} \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$$

が得られる．ここで更に次のことを仮定してみよう;

$G_{\mathbb{C}}$  の位相群としての自己同型写像  $g \mapsto \bar{g}$  があって, 任意の  $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  に対して  $\overline{\exp X} = \exp(\bar{X})$  である ( $X \mapsto \bar{X}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  における  $\mathfrak{g}$  上の複素共役である)．

このとき  $z, z' \in \mathcal{D}$  に対して,  $\exp z \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$  だから  $\overline{\exp z} \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^+$ , よって  $i(G) \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$  より  $\overline{\exp z}^{-1} \cdot \exp z' \in P^+K_{\mathbb{C}}P^-$  となる．そこで

$$\overline{\exp z}^{-1} \cdot \exp z' = p \cdot K(z', z)^{-1}q \quad (p \in P^+, K(z', z) \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^-)$$

と書ける．このとき

- 1)  $g \in G$  に対して  $K(g(z'), g(z)) = J(g, z')K(z', z)\overline{J(g, z)}^{-1}$ ,
- 2)  $\overline{K(z', z)} = K(z, z')^{-1}$ ,
- 3) 任意の  $z \in \mathcal{D}$  に対して  $K(0, z) = 1$

が成り立つ．さて  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$  上の正定値 Hermite 内積が  $\langle X, Y \rangle = B_{\mathfrak{g}}(X, \bar{Y})$  により定義され,  $k \in K_{\mathbb{C}}$  に対して

$$\langle \text{Ad}(k)X, Y \rangle = \langle X, \text{Ad}(\bar{k})^{-1}Y \rangle \quad (X, Y \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$$

が成り立つ．この内積に関する正規直交基底により  $\mathfrak{p}^+$  上の Lebesgue 測度  $|dz \wedge d\bar{z}|$  が定まる． $K_{\mathbb{C}}$  の  $\mathfrak{p}^+$  上の随伴表現を  $\text{Ad}_{\mathfrak{p}^+}$  と書くことにして

$$K_{\text{Ad}}(z', z) = \text{Ad}_{\mathfrak{p}^+}(K(z', z)), \quad J_{\text{Ad}}(g, z) = \text{Ad}_{\mathfrak{p}^+}(J(g, z))$$

とおくと,  $g \in G$  に対して  $d(g(z)) \wedge \overline{dg(z)} = |\det J_{\text{Ad}}(g, z)|^2 dz \wedge d\bar{z}$  だから

$$d_{\mathcal{D}}(z) = \det K_{\text{Ad}}(z, z)^{-1} \cdot |dz \wedge d\bar{z}| \quad (z \in \mathcal{D})$$

は  $\mathcal{D}$  上の  $G$ -不変測度を与える．

ここで  $(\delta, V_{\delta})$  は  $K_{\mathbb{C}}$  の連続な既約表現で, 付随する  $K$  の連続既約表現  $\delta(k) = J_{\delta}(k, 0)$  ( $k \in K$ ) がユニタリ表現になるように  $V_{\delta}$  上の正定値 Hermite 内積  $(\cdot, \cdot)_{\delta}$  がとられているとする．即ち, 任意の  $k \in K_{\mathbb{C}}$  に対して  $(\delta(k)u, v)_{\delta} = (u, \delta(\bar{k})^{-1}v)_{\delta}$  ( $u, v \in V_{\delta}$ ) が成り立つと仮定する．このとき誘導表現  $\pi^{\delta} = \text{Ind}_K^G \delta$  の表現空間を  $E_{\delta}$  としよう．即ち,  $E_{\delta}$  は可側関数  $\varphi: G \rightarrow V_{\delta}$  で

- 1) 任意の  $k \in K$  に対して  $\varphi(xk) = \delta(k)^{-1}\varphi(x)$ ,
- 2)  $\int_{G/K} |\varphi(x)|_{\delta}^2 d_{G/K}(\dot{x}) < \infty$

なるもののなす複素ベクトル空間 (を  $\int_{G/K} |\varphi(x)|_{\delta}^2 d_{G/K}(\dot{x}) = 0$  なる  $\varphi$  のなす部分空間で割った商空間) であって, 内積

$$(\varphi, \psi) = \int_{G/K} (\varphi(x), \psi(x))_{\delta} d_{G/K}(\dot{x})$$

に関して複素 Hilbert 空間となり,  $G$  の作用は  $(\pi^{\delta}(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$  により定義される． $G$  の正則離散系列表現を構成するには, 表現空間  $E_{\delta}$  を  $\mathcal{D}$  上の関数の空間として構成することが重要である．その為に  $K_{\delta}(z', z) = \delta(K(z', z))$  ( $z, z' \in \mathcal{D}$ ) とおいて, 可側関数  $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow V_{\delta}$  で

$$\int_{\mathcal{D}} (K_{\delta}(z, z)^{-1}\varphi(z), \varphi(z))_{\delta} d_{\mathcal{D}}(z) < \infty$$

なるもののなす複素ベクトル空間 (を積分が 0 なる  $\varphi$  のなす部分空間で割った商空間) を  $L^2(\mathcal{D}, \delta)$  とおくと, これは

$$(\varphi, \psi)_{\delta} = \int_{\mathcal{D}} (K_{\delta}(z, z)^{-1}\varphi(z), \psi(z))_{\delta} d_{\mathcal{D}}(z)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間となる．ここで  $\varphi \in L^2(\mathcal{D}, \delta)$  に対して関数  $\hat{\varphi}: G \rightarrow V_{\delta}$  を

$$\hat{\varphi}(g) = J_{\delta}(g, 0)^{-1}\varphi(g(0)) \quad (g \in G)$$

により定義すると,  $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$  は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型  $L^2(\mathcal{D}, \delta) \xrightarrow{\sim} E_{\delta}$  を与える．そこで誘導表現  $\pi^{\delta} = \text{Ind}_K^G \delta$  の作用を, 上の同型を通して  $L^2(\mathcal{D}, \delta)$

に移植すれば,  $G$  の  $L^2(\mathcal{D}, \delta)$  上のユニタリ表現  $\pi_\delta$  が

$$(\pi_\delta(g)\varphi)(z) = J_\delta(g^{-1}, z)^{-1}\varphi(g^{-1}(z)) \quad (g \in G, \varphi \in L^2(\mathcal{D}, \delta))$$

により定義される. ここで  $\mathcal{D}$  上正則なる  $\varphi \in L^2(\mathcal{D}, \delta)$  のなす部分空間を  $H_\delta$  とすると

- 1)  $H_\delta$  は  $L^2(\mathcal{D}, \delta)$  の  $G$ -不変な閉部分空間である,
- 2)  $E \subset H_\delta$  が  $G$ -不変な閉部分空間ならば  $E = \{0\}$  又は  $E = H_\delta$  である.

よって  $H_\delta \neq \{0\}$  ならば  $(\pi_\delta, H_\delta)$  は  $G$  の既約ユニタリ表現となるから, これを最小の  $K$ -タイプ  $\delta$  の正則離散系列表現と呼ぶ. というのは, 第一に  $(\pi_\delta, H_\delta)$  は二乗可積分表現 (つまり離散系列表現) である, 即ち, 任意の  $\varphi, \psi \in H_\delta$  に対して

$$\int_G |(\pi_\delta(x)\varphi, \psi)|^2 d_G(x) < \infty$$

である. 第二に  $V_\delta$  に値をとる  $\mathcal{D}$  上の多項式関数全体  $H_{\delta, \text{poly}}$  は  $H_\delta$  の部分空間 (精確には  $K$ -有限ベクトルの全体) となるが,  $\mathfrak{p}^+$  上の複素数値多項式関数全体を  $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$  とすれば,  $V_\delta$  に値をもつ  $\mathcal{D}$  上の多項式関数全体は  $V_\delta \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$  と同一視される. よって  $K_{\mathbb{C}}$  の  $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$  上の表現  $\rho$  を  $(\rho(k)f)(X) = f(\text{Ad}(k)^{-1}X)$  により定義して,  $n$  次多項式のなす部分空間  $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]_n$  への制限を  $\rho_n$  とすれば,  $K$ -加群としての直和分解

$$H_{\delta, \text{poly}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \delta \otimes \rho_n$$

をもつ. ここで  $\delta \otimes \rho_0 = \delta$  であり,  $n > 0$  ならば  $\delta \otimes \rho_n$  の既約成分に  $\delta$  と同型な表現は現れない. 従って  $\delta$  は  $\pi_\delta|_K$  に重複度 1 で含まれ,  $\pi_\delta$  のその他の  $K$ -タイプは  $\delta$  より “大きい”.  $H_\delta$  の  $\delta$ -成分  $H_\delta(\delta)$  を  $V_\delta$  と同一視すれば,  $\pi_\delta$  の  $K$ -タイプ  $\delta$  の球関数は

$$\Phi_{\pi_\delta, \delta}(g) = J_\delta(g^{-1}, 0)^{-1} \quad (g \in G)$$

である.  $H_\delta \neq \{0\}$  となる必要十分条件は次のように与えられる. まず  $H_0 \in Z(\mathfrak{k})$  の存在から,  $\mathfrak{k}$  の Cartan 部分環  $\mathfrak{t}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分環でもあることがいえる. そこで,  $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$  に関する  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のルート系を  $\Phi$  とおくと

$$\Phi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{t}^* = \{\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \mid \alpha(\mathfrak{k}) \subset \sqrt{-1}\mathbb{R}\}$$

である. 実ベクトル空間  $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$  の内積  $(,)$  は  $\Phi$  の Weyl 群に対して不変であるとする.

$$\begin{aligned} \Phi_c &= \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(H_0) = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}, \alpha} \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\}, \\ \Phi_n^\pm &= \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(H_0) = \pm\sqrt{-1}\} = \{\alpha \in \Phi \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}, \alpha} \subset \mathfrak{p}^\pm\} \end{aligned}$$

とおくと ( $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}$  は  $\alpha \in \Phi$  のルート空間),  $\Phi_c$  は  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  の (半単純部分の) ルート系だから,  $\Phi_c$  の正のルート系  $\Phi_c^+$  を定めて  $\Phi^+ = \Phi_c^+ \cup \Phi_n^+$  が  $\Phi$  の正のルート系をなすようにしておく.  $K_{\mathbb{C}}$  の有限次元既約表現  $\delta$  の (微分表現の)  $\Phi_c^+$  に関する最高の重みを  $\lambda$  として  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$  とおくと

$$H_{\delta} \neq \{0\} \Leftrightarrow (\lambda + \rho, \alpha) < 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Phi_n^+$$

である.

**3.2** 上の一般論を実斜交群に適用してみよう. 後の応用を考えて, 実斜交空間  $(V, D)$  (即ち, 有限次元実ベクトル空間  $V$  上の非退化交代形式  $D$ ) をとり, 付随する斜交群を

$$G = Sp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = D(x, y) \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

とおく. ここで  $GL_{\mathbb{R}}$  は  $V$  に右から作用していることに注意する. 実 Lie 群  $Sp(V)$  の Lie 環は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \mid D(xX, y) + D(x, yX) = 0 \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

であり, その Killing 形式は

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (\dim_{\mathbb{R}} V + 2)\text{tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

となり, 非退化だから  $\mathfrak{g}$  は半単純である.

$$\mathcal{I}_V = \{I \in Sp(V) \mid I^2 = -1_V, D(xI, x) > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in V\}$$

は空集合ではなくて,  $(\sigma, I) \mapsto \sigma I \sigma^{-1}$  により  $Sp(V)$  は  $\mathcal{I}_V$  に推移的に作用する.  $I \in \mathcal{I}_V$  に対して,  $V$  上の複素構造を  $\sqrt{-1}x = xI$  ( $x \in V$ ) により定めた複素ベクトル空間を  $V_I$  と書くと

$$\langle x, y \rangle_I = D(xI, y) + \sqrt{-1}D(x, y) \quad (x, y \in V)$$

は  $V_I$  上の正定値 Hermite 形式を与える. 付随するコンパクト・ユニタリ群  $U(V_I, \langle \cdot, \cdot \rangle_I)$  は  $Sp(V)$  における  $I \in \mathcal{I}_V$  の固定部分群である.

以下,  $I_0 \in \mathcal{I}_V$  を一つ固定しておく.  $\theta X = I_0 X I_0^{-1}$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 対合を与え, 付随する Cartan 分解を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  とすると,  $\mathfrak{k}$  に対応する  $G$  の連結閉部分群が  $K = U(V_{I_0}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{I_0})$  である.  $H_0 = -\frac{1}{2}I_0 \in Z(\mathfrak{k})$  で  $(\text{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$  となるから,  $(G, K)$  は Hermite 対である.  $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  とおいて,  $D$  を複素双線形に延長して複素斜交空間  $(V_{\mathbb{C}}, D)$  を考える.  $G_{\mathbb{C}} = Sp(V_{\mathbb{C}})$  とおいて  $i: G \rightarrow G_{\mathbb{C}}$  を複素線形延長による自然な包含写像とすると, 上で述べた一般論が適用できることを, 少し具体的な計算を含めて見よう.

$$W^{\pm} = \{x \in V_{\mathbb{C}} \mid xI_0 = \pm\sqrt{-1}x\}$$

とおくと,  $V_{\mathbb{C}} = W^{-} \oplus W^{+}$  かつ  $D(W^{-}, W^{-}) = D(W^{+}, W^{+}) = 0$  であるから

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : W^{-} \times W^{+} \ni (x, y) \mapsto D(x, y) \in \mathbb{C}$$

は非退化な pairing を与える. よって  $b \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{-}, W^{+})$  に対して  ${}^t b \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{-}, W^{+})$  が

$$\langle x, y {}^t b \rangle = \langle x b, y \rangle \text{ for } \forall x, y \in W^{-}$$

により定義され,  $d \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{+})$  に対して  ${}^t d \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{-})$  が

$$\langle x {}^t d, y \rangle = \langle x, y d \rangle \text{ for } \forall x \in W^{-}, y \in W^{+}$$

により定義される.  $c \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{+}, W^{-})$  に対する  ${}^t c \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{+}, W^{-})$  及び  $a \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{-})$  に対する  ${}^t a \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{-})$  も同様に定義する. 直和分解  $V_{\mathbb{C}} = W^{-} \oplus W^{+}$  に応じて  $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  を

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} a \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{-}), & b \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{-}, W^{+}) \\ c \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{+}, W^{-}), & d \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{+}) \end{array}$$

と表す. 即ち  $(x, y)\sigma = (xa + yc, ab + yd)$  ( $x \in W^{-}, y \in W^{+}$ ) とおく.  $V_{\mathbb{C}}$  における  $V$  上の複素共役を  $x \mapsto \bar{x}$  とおく. 部分空間  $W \subset V_{\mathbb{C}}$  と  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V_{\mathbb{C}})$  に対して  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{W}, V_{\mathbb{C}})$  を  $\bar{f}(x) = \overline{f(\bar{x})}$  ( $x \in \bar{W}$ ) により定義する. 特に  $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  に対して  $\bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  である. よって

$$Sp(V) = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \mid \bar{\sigma} = \sigma\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \right\}$$

である.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{+} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^{-}, W^{+}) \right\}, \\ \mathfrak{p}^{-} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid c \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^{+}, W^{-}) \right\}, \\ \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} &= \left\{ \begin{pmatrix} -{}^t d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid d \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{+}) \right\}, \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^{-}, W^{+}) &= \{b \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{-}, W^{+}) \mid {}^t b = b\}, \\ \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^{+}, W^{-}) &= \{c \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^{+}, W^{-}) \mid {}^t c = c\} \end{aligned}$$

である．よって

$$P^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \right\},$$

$$P^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \right\}$$

となり， $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  に対応する  $G_{\mathbb{C}}$  の連結閉部分群は

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

である． $x \mapsto \frac{1}{2}(x - xI_0 \otimes \sqrt{-1})$  は複素ベクトル空間の同型  $V_{I_0} \xrightarrow{\sim} W^+$  を与え，これにより  $V_{I_0}$  上の Hermite 形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{I_0}$  を  $W^+$  じょうで見ると

$$\langle x, y \rangle_{I_0} = 2\sqrt{-1}D(x, \bar{y}) = -2\sqrt{-1}\langle \bar{y}, x \rangle \quad (x, y \in W^+)$$

となるから

$$K = K_{\mathbb{C}} \cap Sp(V) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid d \in U(W^+, \langle \cdot, \cdot \rangle_{I_0}) \right\}$$

となる．

$$P^+ K_{\mathbb{C}} P^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \mid d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

となり，これは  $G_{\mathbb{C}} = Sp(V_{\mathbb{C}})$  の開部分集合で  $G = Sp(V)$  を含み  $G \cap K_{\mathbb{C}} P^- = K$  である．そこで 3.1 節の一般論を適用して  $\mathcal{I}_V = G/K$  を  $\mathfrak{p}^+$  の開部分集合と同一視したものを  $\mathcal{D}_V$  とおく． $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}^+$  と  $b \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$  を同

一視して， $\mathcal{D}_V \subset \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$  としよう．直接計算して  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V)$  と  $z \in \mathcal{D}_V \subset \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$  に対して

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1} \in \mathcal{D}_V, \quad J(\sigma, z) = \begin{pmatrix} {}^t(cz + d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz + d \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$$

となることがわかる．ここから

$$\mathcal{D}_V = \{z \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid 1_{W^+} - \bar{z} \cdot z \in \text{Her}^+(W^+)\}$$

であることがわかる．ここで

$$\text{Her}(W^+) = \{T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \mid \langle xT, y \rangle_{I_0} = \langle x, yT \rangle_{I_0} \text{ for } \forall x, y \in W^+\},$$

$$\text{Her}^+(W) = \{T \in \text{Her}(W^+) \mid \langle xT, x \rangle_{I_0} > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in W^+\}$$

とおいた . 更に

$$K(z', z) = \begin{pmatrix} 1 - z'\bar{z} & 0 \\ 0 & (1 - \bar{z}z')^{-1} \end{pmatrix} \quad (z, z' \in \mathcal{D}_V \subset \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+))$$

となる . さて斜交空間  $(V, D)$  の偏極  ${}^2V = W' \oplus W$  を一つ定めておく .  
 $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  を直和分解  $V_{\mathbb{C}} = W'_{\mathbb{C}} \oplus W_{\mathbb{C}}$  に応じて

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (a \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}), b \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \text{ etc.})$$

と書くことにする . 又 , 非退化な pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : W' \times W \ni (x, y) \mapsto D(x, y) \in \mathbb{R}$$

を用いて , 例えば  $b \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W', W)$  に対して  ${}^t b \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W', W)$  を  $\langle x {}^t b, y \rangle = \langle x, y b \rangle$  ( $\forall x, y \in W'$ ) により定義し ,  $d \in \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$  に対して  ${}^t d \in \text{End}_{\mathbb{R}}(W')$  を  $\langle x {}^t d, y \rangle = \langle x, y d \rangle$  ( $\forall x \in W', y \in W$ ) により定義する . さて  $W^- \rho = W'_{\mathbb{C}}$  かつ  $W^+ \rho = W_{\mathbb{C}}$  なる  $\rho \in Sp(V_{\mathbb{C}})$  が存在するから , それを一つ固定しておく .  $\hat{\mathfrak{p}}^{\pm} = \text{Ad}(\rho^{-1})\mathfrak{p}^{\pm}$  とおくと

$$\hat{\mathfrak{p}}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \right\},$$

$$\hat{\mathfrak{p}}^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid c \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}}) \right\}$$

となる . そこで

$$\hat{P}^+ = \rho^{-1} P^+ \rho, \quad \hat{P}^- = \rho^{-1} P^- \rho, \quad \hat{K}_{\mathbb{C}} = \rho^{-1} K_{\mathbb{C}} \rho$$

とおくと ,  $X \mapsto \exp X$  は  $\hat{\mathfrak{p}}^+ = \text{Ad}(\rho)\mathfrak{p}^+$  から  $\hat{P}^+$  への全単射で

$$\hat{K}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}) \right\},$$

$$\hat{P}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \right\},$$

$$\hat{P}^+ \hat{K}_{\mathbb{C}} \hat{P}^- = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \mid d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}) \right\}$$

<sup>2</sup>任意の  $x, y \in W$  に対して  $D(x, y) = 0$  なる部分空間  $W \subset V$  で次元が最大のものを  $V$  の Lagrange 部分空間と呼ぶ .  $W \subset V$  が Lagrange 部分空間ならば  $\dim_{\mathbb{R}} W = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$  であり ,  $V$  の Lagrange 部分空間全体に  $Sp(V)$  は推移的に作用する . Lagrange 部分空間  $W, W' \subset V$  に対して  $V = W' \oplus W$  となる時 , これを斜交空間  $(V, D)$  の偏極と呼ぶ . このとき Lagrange 部分空間の対  $(W, W')$  に  $\sigma \in Sp(V)$  は  $(W, W') \cdot \sigma = (W\sigma, W'\sigma)$  により推移的に作用する .

となる．ここで  $\rho Sp(V) \subset P^+ K_{\mathbb{C}} P^-$  が言えるから  $Sp(V)\rho \subset \widehat{P}^+ \widehat{K}_{\mathbb{C}} \widehat{P}^-$  となる．そこで  $z \in \mathcal{D}_V \subset \mathfrak{p}^+$  に対して  $\exp z \in Sp(V) K_{\mathbb{C}} P^-$  だから，

$$\exp z \cdot \rho \in Sp(V) \widehat{K}_{\mathbb{C}} \widehat{P}^- \subset \widehat{P}^+ \widehat{K}_{\mathbb{C}} \widehat{P}^-$$

となる．よって  $\exp z \cdot \rho = \exp \widehat{z} \cdot k \cdot q$  ( $\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+, k \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}^-$ ) とおいて

$$\mathfrak{h}_V = \{\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+ \mid z \in \mathcal{D}_V\} \subset \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

とおく．但し  $b \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$  と  $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+$  を同一視している． $z \mapsto \widehat{z}$  を  $\rho$  に関する Cayley 変換と呼ぶ． $\sigma \in Sp(V)$  と  $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して， $\exp z \in Sp(V) \widehat{K}_{\mathbb{C}} \widehat{P}^-$  だから

$$\sigma \exp z = \exp \sigma(z) \cdot J(\sigma, z) \cdot q \quad (\sigma(z) \in \mathfrak{h}_V, J(\sigma, z) \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}^-)$$

と書けて， $(\sigma, z) \mapsto \sigma(z)$  により  $Sp(V)$  は  $\mathfrak{h}_V$  に作用する．具体的に計算すれば  $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$  に対して

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}, \quad J(\sigma, z) = \begin{bmatrix} {}^t(cz + d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz + d \end{bmatrix}$$

となり

$$\mathfrak{h}_V = \{z \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}} \mid \text{Im } z \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}^+(W', W)\}$$

であり，更に  $Sp(V)$  の  $\mathfrak{h}_V$  への作用は推移的であることがわかる．但し

$$\text{Sym}_{\mathbb{R}}^+(W', W) = \{T \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W) \mid \langle x, xT \rangle > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in W'\}$$

とする． $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して  $W_{\mathbb{C}}$  上の正定値 Hermite 形式が

$$\langle v, w \rangle_z = D(v(\text{Im } z)^{-1}, \bar{w}) \quad (v, w \in W_{\mathbb{C}})$$

により定義され，付随するユニタリ群と  $z \in \mathfrak{h}_V$  の固定部分群が同型となる；

$$\{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(z) = z\} \xrightarrow{\sim} U(W_{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_z) \quad (\sigma \mapsto J(\sigma, z)|_{W_{\mathbb{C}}}).$$

特に  $K = \{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(\widehat{0}) = \widehat{0}\}$  である．

**3.3** 古典的な Siegel モジュラー形式について簡単に復習しておく．詳細は [6] を参照．

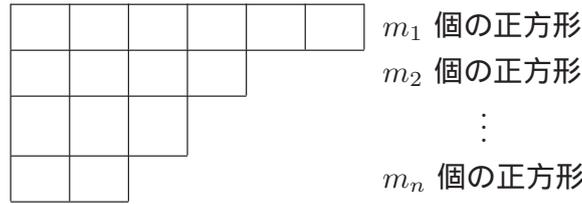
$\mathbb{Q}$  上の斜交空間  $(V_{\mathbb{Q}}, D)$  とその偏極  $V_{\mathbb{Q}} = W'_{\mathbb{Q}} \oplus W_{\mathbb{Q}}$  があって， $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ ， $W' = W'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ ， $W = W_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  であるとする．部分群  $\Gamma \subset Sp(V_{\mathbb{Q}})$  は数論的部分群とする．即ち， $V_{\mathbb{Q}}$  の  $\mathbb{Z}$ -格子  $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}}$  があって  $\Gamma$  は

$$Sp(\Lambda) = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}}) \mid \Lambda \sigma = \Lambda\}$$

と通約的<sup>3</sup>であるとする． $\dim_{\mathbb{R}} V > 2$  ならば，十分大きな  $0 < N \in \mathbb{Z}$  に対して

$$Sp(\Lambda, N) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid x\gamma \equiv x \pmod{N \cdot \Lambda} \text{ for } \forall x \in \Lambda\}$$

は  $\Gamma$  に含まれるから， $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$  の場合にもこれを仮定しよう． $(\rho, V_\rho)$  を  $\Gamma$  に有限次元ユニタリ表現として  $\text{Ker } \rho$  は  $\Gamma$  の指数有限の部分群であると仮定する． $\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$  と  $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  を同一視して， $(\delta, V_\delta)$  を  $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の有限次元既約表現で Young 図形



に対応しているとして， $m_n > 0$  と仮定する． $J_\delta(\sigma, z) = \delta(J(\sigma, z))$  ( $\sigma \in Sp(V), z \in \mathfrak{H}_V$ ) とおいて， $k \mapsto J_\delta(k, \widehat{0})$  が  $K$  の既約ユニタリ表現となるように  $V_\delta$  上の Hermite 内積を定める<sup>4</sup>．表現空間  $V_\rho, V_\delta$  における Hermite 内積をそれぞれ  $(\cdot, \cdot)_\rho, (\cdot, \cdot)_\delta$  とすると，任意の  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$  に対して

$$(Tu, v)_\delta = (u, T^*v)_\rho \text{ for } \forall u, v \in V_\rho, v \in V_\delta$$

なる  $T^* \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\delta, V_\rho)$  が唯一定まるから，複素ベクトル空間  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$  における Hermite 内積を  $(S, T)_{\rho, \delta} = \text{tr}(S \circ T^*)$  により定義する．さて正則関数

$$F : \mathfrak{H}_V \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$$

であって

- 1) 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $F(\gamma z) = J_\delta(\gamma, z) \circ F(z) \circ \rho(\gamma)^{-1}$ ,
- 2) 任意の  $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}})$  と任意の  $y_0 \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$  に対して  $|F^\sigma(z)|$  は  $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \text{Im } z \geq y_0\}$  で有界

の二条件が成り立つとき， $F$  を  $\Gamma$  に関して表現  $\rho$  をもった重さ  $\delta$  の (或いは簡単に  $(\delta, \rho)$ -型の) Siegel モジュラー形式と呼ぶ．ここで  $J_\delta(\sigma, z) = \delta(J(\sigma, z))$

<sup>3</sup>群  $G$  の部分群  $A, B$  に対して，群指数が  $(A : A \cap B) < \infty$  かつ  $(B : A \cap B) < \infty$  であるとき， $A$  と  $B$  は通約的であるという．

<sup>4</sup> $k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K$  に対して  $\text{Im } \widehat{0} = \text{Im } k(\widehat{0}) = \overline{{}^t(c\widehat{0} + d)^{-1} \text{Im } \widehat{0} \cdot (c\widehat{0} + d)^{-1}}$  より

$$\delta(c\widehat{0} + d)^* = \delta((c\widehat{0} + d)^{-1}) = \delta((\text{Im } \widehat{0})^{-1} \overline{{}^t(c\widehat{0} + d)} \cdot \text{Im } \widehat{0})$$

となるから， $V_\delta$  の Hermite 内積は

$$\delta(d)^* = \delta((\text{Im } \widehat{0})^{-1} \overline{{}^t d} \cdot \text{Im } \widehat{0}) \quad \forall d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$$

となるようにとればよい．

$(\sigma \in Sp(V), z \in \mathfrak{H}_V)$  とおき

$$F^\sigma(z) = J_\delta(\sigma, z)^{-1} \circ F(\sigma z) \quad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおく．よく知られているように，上の条件 2) は  $\dim_{\mathbb{R}} V > 2$  のときには条件 1) から自動的に成り立つ (Koecher の定理)． $(\delta, \rho)$ -型の Siegel モジュラー形式  $F$  に付随する  $Sp(V)$  上の関数

$$f_F(\sigma) = J_\delta(\sigma, \hat{0})^{-1} \circ F(\sigma(\hat{0})) \quad (\sigma \in Sp(V))$$

が  $Sp(V)$  上の有界関数であるとき， $F$  を  $\Gamma$  に関する  $(\delta, \rho)$ -型の Siegel 尖点形式と呼ぶ． $z = \sigma(\hat{0}) \in \mathfrak{H}_V$  ( $\sigma \in Sp(V)$ ) に対して

$$|f_F(\sigma)|^2 = (\delta((\text{Im } \hat{0})^{-1} \text{Im } z) \circ F(z), F(z))_{\rho, \delta}$$

となる． $F$  が尖点形式ならば，このとき任意の実数  $p > 0$  に対して

$$\int_{\Gamma \backslash Sp(V)} |f(\sigma)|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

である．次の定理は Satake [14] による；

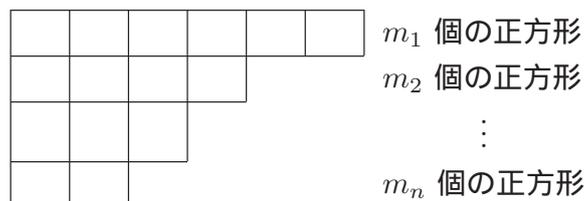
**定理 3.3.1** 実数  $p > 0$  に対して  $pm_n \geq 2n$  とする．このとき  $\Gamma$  に関する  $(\delta, \rho)$ -型の Siegel モジュラー形式  $F$  に対して

$$\int_{\Gamma \backslash Sp(V)} |f_F(\sigma)|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

ならば  $F$  は尖点形式である．

$\Gamma$  に関する  $(\delta, \rho)$ -型の尖点形式の全体を  $S_\delta(\Gamma, \rho)$  と書く．

さて 2.4 節の一般論を実斜交群に適用して，Siegel 尖点形式を表現論的にとらえてみよう．同型  $K_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \hat{K}_{\mathbb{C}} (k \mapsto \rho k \rho^{-1})$  により  $\hat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の有限次元既約表現  $(\delta, V_\delta)$  を  $K_{\mathbb{C}}$  の有限次元既約表現とみなしておく．従って  $\begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$  と  $d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+)$  を同一視すれば， $\delta$  は  $GL_{\mathbb{C}}(W^+)$  の有限次元既約表現で Young 図形



に対応するものである．このとき最小の  $K$ -タイプ  $\delta$  の正則離散系列表現が定義される (即ち  $H_\delta \neq \{0\}$  となる) 必要十分条件は  $m_n > n$  なることである．このとき Satake の定理 (定理 3.3.1) に注意すると，次の定理が示される；

定理 3.3.2  $m_n > n$  のとき, 最小の  $K$ -タイプ  $\delta$  の正則離散系列表現  $(\pi_\delta, H_\delta)$  に対して,  $F \mapsto f_F$  は複素ベクトル空間の同型  $S_\delta(\Gamma, \rho) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\delta(\Gamma \backslash Sp(V), \rho, \pi_\delta)$  を与える.

## 第 II 部

# 重さ半整数の Siegel モジュラー形式

## 4 Weil 表現

4.1 以下

$$\mathbb{Q}_p = \begin{cases} \text{実数体 } \mathbb{R} & : p = \infty, \\ p\text{-進数体 } \mathbb{Q}_p & : p < \infty \end{cases}, \quad \mathbb{Z}_p = \begin{cases} \text{有理整数環 } \mathbb{Z} & : p = \infty, \\ p\text{-進整数環 } \mathbb{Z}_p & : p < \infty \end{cases}$$

とする. 局所コンパクト加法群  $\mathbb{Q}_p$  上の Haar 測度  $dt$  は

$$\begin{cases} \text{vol}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 1 & : p = \infty, \\ \text{vol}(\mathbb{Z}_p) = 1 & : p < \infty \end{cases}$$

と正規化しておく. 加法群  $\mathbb{Q}_p$  の自明でないユニタリ指標  $\chi$  を一つ固定しておく.

$(V, D)$  を  $\mathbb{Q}_p$  上の斜交空間とする. 局所コンパクト加法群  $V$  上の Haar 測度  $d_V(x)$  は  $(x, y) \mapsto \chi(D(x, y))$  に関して自己双対的であるとする. 即ち  $V$  上の Fourier 変換と逆変換が

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) \chi(-D(x, y)) d_V(x), \quad \varphi(x) = \int_V \widehat{\varphi}(y) \chi(D(x, y)) d_V(y)$$

を満たすとする.  $H(V) = V \times \mathbb{Q}_p$  は群演算

$$(x, s) \cdot (y, t) = (x + y, s + t + 2^{-1}D(x, y))$$

により局所コンパクト群となる. これを斜交空間  $(V, D)$  に付随する Heisenberg 群と呼ぶ.  $H(V)$  の中心  $Z(H(V)) = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{Q}_p\}$  は同一視  $(0, t) = t$  により加法群  $\mathbb{Q}_p$  と同一視しておく.  $d_{H(V)}(x, t) = d_V(x)dt$  は  $H(V)$  の Haar 測度となり,  $H(V)$  はユニモジュラーである.

斜交空間  $(V, D)$  の Lagrange 部分空間  $W \subset V$  をとり,  $H(V)$  の閉部分群  $W \times \mathbb{Q}_p$  のユニタリ指標  $\chi_W(y, t) = \chi(t)$  ( $t \in \mathbb{Q}_p$ ) から誘導された  $H(V)$  のユニタリ表現  $(\pi_W^\chi, H_W^\chi) = \text{Ind}_{W \times \mathbb{Q}_p}^{H(V)} \chi_W$  を考えよう. その表現空間  $H_W^\chi$  は

- 1) 任意の  $g \in W \times \mathbb{Q}_p$  に対して  $\varphi(gh) = \chi_W(g)\varphi(h)$ ,
- 2)  $\int_{(W \times \mathbb{Q}_p) \backslash H(V)} |\varphi(h)|^2 dh < \infty$

なる可測関数  $\varphi : H(V) \rightarrow \mathbb{C}$  全体を内積

$$(\varphi, \psi) = \int_{W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V)} \varphi(h) \overline{\psi(h)} dh$$

により複素 Hilbert 空間としたものであり,  $H(V)$  の作用は  $(\pi_W^\chi(h)\varphi)(g) = \varphi(gh)$  により定義される. ここで  $W$  の Haar 測度  $d_W(x)$  を一つ定めて,  $(W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V))$  上の右  $H(V)$ -不変測度  $d\dot{g}$  を

$$\int_{H(V)} \varphi(h) d_{H(V)}(h) = \int_{(W \times \mathbb{Q}_p) \backslash H(V)} d\dot{g} \int_{W \times \mathbb{Q}_p} d_W(x) dt \varphi((x, t)h)$$

( $\varphi \in C_c(H(V))$ ) となるように定める. 大切なことは次の二つの定理である;

定理 4.1.1  $(\pi_W^\chi, H_W^\chi)$  は Heisenberg 群  $H(V)$  の既約ユニタリ表現である.

定理 4.1.2  $\pi$  が  $H(V)$  のユニタリ表現であって, 任意の  $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$  に対して  $\pi(t) = \chi(t)$  ならば, 複素 Hilbert 空間  $E$  上の  $H(V)$  の自明なユニタリ表現  $1_E$  があって,  $\pi$  はユニタリ表現のテンソル積  $1_E \otimes \pi_W^\chi$  とユニタリ同値である.

定理 4.1.2 から直ちに次の系が得られる;

系 4.1.3  $\pi$  が  $H(V)$  に既約ユニタリ表現で, 任意の  $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$  に対して  $\pi(t) = \chi(t)$  ならば,  $\pi$  は  $\pi_W^\chi$  とユニタリ同値である.

$V$  の二つの Lagrange 部分空間  $W, W' \subset V$  に対して, 系 4.1.3 から,  $(\pi_W^\chi, H_W^\chi)$  と  $(\pi_{W'}^\chi, H_{W'}^\chi)$  は  $H(V)$  のユニタリ表現としてユニタリ同値だから, その間のユニタリ同値写像を具体的に構成してみよう. まず,  $W \cap W'$  上の Haar 測度  $d_{W \cap W'}$  を一つとると,  $W/(W \cap W')$  と  $W'/(W \cap W')$  上の Haar 測度

$$d_{W/(W \cap W')} = d_W/d_{W \cap W'}, \quad d_{W'/(W \cap W')} = d_{W'}/d_{W \cap W'}$$

が定まる<sup>5</sup>. 更に  $W'/(W \cap W')$  の双対空間  $(W'/(W \cap W'))^*$  上の Haar 測度  $d_{(W'/(W \cap W'))^*}$  として  $d_{W'/(W \cap W')}$  の双対測度をとる. そこで  $\mathbb{Q}_p$ -線形同型写像

$$g_{W, W'} : W/(W \cap W') \xrightarrow{\sim} (W'/(W \cap W'))^*$$

を  $\langle \dot{w}', g_{W, W'}(\dot{w}) \rangle = D(w, w')$  により定義して,  $0 < |g_{W, W'}| \in \mathbb{R}$  を

$$d_{(W'/(W \cap W'))^*}(g_{W, W'}(\dot{w})) = |g_{W, W'}| \cdot d_{W/(W \cap W')}(w)$$

<sup>5</sup>一般に局所コンパクト・ユニモジュラー群  $G$  の閉部分群  $H$  に対して,  $G, H$  上の Haar 測度  $d_G(g), d_H(h)$  をとると,  $G/H$  上の左  $G$ -不変測度  $d_{G/H}(\dot{g})$  を

$$\int_G \varphi(g) d(g) = \int_{G/H} d_{G/H}(\dot{g}) \int_H d_H(h) \varphi(gh) \quad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定めることかできる. このとき  $d_{G/H} = d_G/d_h$  と書くことにする.

により定義すると,  $|g_{W,W'}|^{1/2} d_{W'/(W \cap W')}$  は  $W \cap W'$  上の Haar 測度  $d_{W \cap W'}$  の選択に依存しなくなる. このときユニタリ写像  $T_{W',W}^X : H_W^X \rightarrow H_{W'}^X$  が

$$(T_{W',W}^X \varphi)(h) = \int_{W'/(W \cap W')} \varphi((w', 0)h) \cdot |g_{W,W'}|^{1/2} d_{W'/(W \cap W')}(w')$$

( $\varphi \in H_{W,c}^X$ ) により定義される. ここで  $H_{W,c}^X$  は連続関数  $\varphi : H(V) \rightarrow \mathbb{C}$  で

- 1) 任意の  $g \in W \times \mathbb{Q}_p$  に対して  $\varphi(gh) = \chi_W(g)\varphi(h)$ ,
- 2)  $h \mapsto |\varphi(h)|$  は  $W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V)$  上のコンパクト台関数

なるもの全体からなる  $H_W^X$  の稠密な部分空間である. このとき

- 1)  $T_{W',W}^X \circ T_{W,W'}^X = T_{W,W}^X = id$ ,
- 2) 任意の  $h \in H(V)$  に対して  $T_{W',W}^X \circ \pi_W^X(h) = \pi_{W'}^X \circ T_{W',W}^X$

が成り立つ<sup>6</sup>.

**4.2** 有限次元  $\mathbb{Q}_p$ -ベクトル空間  $X$  の双対空間を  $X^*$  として,  $x \in X, \alpha \in X^*$  に対して  $\langle x, \alpha \rangle = \alpha(x)$  とおくと,  $V_X = X \times X^*$  は  $D_X((x, \alpha), (y, \beta)) = \langle x, \beta \rangle - \langle y, \alpha \rangle$  に関して斜交空間となる. ここで自然に  $X, X^* \subset V_X$  を部分空間とみなせば, これらは斜交空間  $(V_X, D_X)$  の Lagrange 部分空間である. 直和分解  $V = X \times X^*$  に関する  $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{Q}_p}(V_X)$  のブロック分表示を  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とする.  $Q$  を  $X$  上の二次形式とする. 即ち, 関数  $Q : X \rightarrow \mathbb{Q}_p$  は

- 1)  $\lambda \in \mathbb{Q}_p, x \in X$  に対して  $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ ,
- 2)  $(x, y) \mapsto Q(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$  ( $x, y \in X$ ) は  $\mathbb{Q}_p$ -双線形形式

を満たすとする. そこで  $\tilde{Q} \in \text{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(X, X^*)$  を

$$\langle x, y\tilde{Q} \rangle = Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \quad (x, y \in W)$$

により定めて  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sp(V_X)$  とおくと,  $W_Q = X\sigma \subset V_X$  は Lagrange 部分空間となる. このとき  $T_{X,W_Q}^X \circ T_{W_Q,X^*}^X$  と  $T_{X,X^*}^X$  は共に  $(\pi_{X^*}^X, H_{X^*}^X)$  から  $(\pi_X^X, H_X^X)$  へのユニタリ同値写像となるから

$$T_{X,W_Q}^X \circ T_{W_Q,X^*}^X = \gamma_X(Q) \cdot T_{X,X^*}^X$$

なる  $\gamma_X(Q) \in \mathbb{C}^1$  が定まる. これを二次形式  $Q$  の Weil 定数 と呼ぶ.  $X$  上の二次形式  $Q$  に対して

$$\text{rad}(Q) = \{x \in X \mid \langle x, y\tilde{Q} \rangle = 0 \text{ for } \forall y \in X\}$$

<sup>6</sup> $T_{W,W'}^X$  の性質と次の 4.2 節については [12] を参照のこと.

とおくと,  $X/\text{rad}(Q)$  上の正則な二次形式  $Q^{\text{reg}}(\dot{x}) = Q(x)$  が定まる. このとき  $\gamma_\chi(Q) = \gamma_\chi(Q^{\text{reg}})$  である. 又,  $Q \mapsto \gamma_\chi(Q)$  は  $\mathbb{Q}_p$  上の Witt 群  $W_{\mathbb{Q}_p}$  から乗法群  $\mathbb{C}^1$  への群準同型写像である.

さて  $\mathbb{Q}_p$  上の斜交空間  $(V, D)$  をとる. 三つの Lagrange 部分空間  $W_i \subset V$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に対して  $W_1 \times W_2 \times W_3$  上の二次形式  $Q_{W_1, W_2, W_3}$  が

$$Q_{W_1, W_2, W_3}(w_1, w_2, w_3) = D(w_1, w_2) + D(w_2, w_3) + D(w_3, w_1) \quad (w_i \in W_i)$$

により定義される. このとき

$$\text{rad}(Q_{W_1, W_2, W_3}) = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1 - w_2 \in W_3, w_2 - w_3 \in W_1, w_3 - w_1 \in W_2\}$$

であり,  $(1, 2, 3)$  の並べ替え  $(i_1, i_2, i_3)$  に対して

$$Q_{W_{i_1}, W_{i_2}, W_{i_3}} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot Q_{W_1, W_2, W_3}$$

が成り立つ. 更に次の定理が基本的である;

**定理 4.2.1** Lagrange 部分空間  $W_i \subset V$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に対して

$$T_{W_1, W_2}^\chi \circ T_{W_2, W_3}^\chi \circ T_{W_3, W_1}^\chi = \gamma_\chi(Q_{W_1, W_2, W_3}) \cdot \text{id}.$$

**4.3**  $\mathbb{Q}_p$  上の斜交空間  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  をとり,  $x \in W', y \in W$  に対して  $\langle x, y \rangle = D(x, y)$  とおく. 局所コンパクト加法群  $W', W$  上の Haar 測度  $d_{W'}(x), d_W(y)$  は  $(x, y) \mapsto \chi(\langle x, y \rangle)$  に関して自己双対的であるとする. 即ち  $W'$  上の Fourier 変換と逆変換が

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{W'} \varphi(x) \chi(-\langle x, y \rangle) d_{W'}(x), \quad \varphi(x) = \int_W \widehat{\varphi}(y) \chi(\langle x, y \rangle) d_W(y)$$

を満たすとする. このとき  $d_V(x, y) = d_{W'}(x) d_W(y)$  である.  $\varphi \in L^2(W')$  に対して

$$\widetilde{\varphi}(g) = \chi(\nu \cdot (t + 2^{-1} \langle x, y \rangle)) \cdot \varphi(x) \quad (g = ((x, y), t) \in H(V))$$

とおくと,  $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$  は  $L^2(W')$  から  $H_V^\chi$  へのユニタリ同型写像となる. そこで誘導表現  $\text{Ind}_{W' \times \mathbb{Q}_p}^{H(V)} \chi_W$  を  $L^2(W')$  上に実現したものを  $\Pi_\chi$  と書くと, その作用は  $(h = ((x, y), t) \in H(V))$  と  $\varphi \in L^2(W')$  に対して

$$(\Pi_\chi(h)\varphi)(w') = \chi(t + \langle w', y \rangle + 2^{-1} \langle x, y \rangle) \cdot \varphi(w' + x) \quad (w' \in W')$$

となる.  $H(V)$  のユニタリ表現  $(\Pi_\chi, L^2(W'))$  を Schrödinger 表現と呼ぶ. 同様に  $H(V)$  の閉部分群  $W' \times \mathbb{Q}_p$  のユニタリ指標  $\bar{\chi}_{W'}(x, t) = \chi(t)^{-1}$  から誘導された  $H(V)$  の誘導表現  $\text{Ind}_{W' \times \mathbb{Q}_p}^{H(V)} \bar{\chi}_{W'}$  を  $L^2(W)$  上に実現したものを  $\check{\Pi}_\chi$  とおくと, その作用は  $h = ((x, y), t) \in H(V)$  と  $\varphi \in L^2(W)$  に対して

$$(\check{\Pi}_\chi(h)\varphi)(w) = \chi(-t - \langle x, w \rangle + 2^{-1} \langle x, y \rangle) \cdot \varphi(w - y)$$

となる． $\check{\Pi}_\chi$  は  $\Pi_\chi$  の反傾表現である．実際，複素双線形形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\chi : L^2(W') \times L^2(W) \rightarrow \mathbb{C}$$

を  $\varphi \in L^2(W') \cap L^1(W')$ ,  $\psi \in L^2(W) \cap L^1(W)$  に対して

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\chi = \int_{W'} d_{W'}(w') \int_W d_W(w) \varphi(w') \psi(w) \chi(\langle w', w \rangle)$$

により定めると，任意の  $h \in H(V)$ ,  $\varphi \in L^2(W')$ ,  $\psi \in L^2(W)$  に対して

$$\langle \Pi_\chi(h)\varphi, \psi \rangle_\chi = \langle \varphi, \check{\Pi}_\chi(h^{-1})\psi \rangle_\chi$$

が成り立つ．反傾表現  $(\check{\Pi}_\chi, L^2(W))$  も Schrödinger 表現と呼ぼう．

さて  $\sigma \in Sp(V)$  は  $h = (x, t) \in H(V)$  に  $h^\sigma = (x\sigma, t)$  により右から作用していて， $h \mapsto h^\sigma$  は  $H(V)$  の自己同型写像である．そこで  $\sigma \in Sp(V)$  に対して  $\Pi_\chi^\sigma(h) = \Pi_\chi(h^\sigma)$  ( $h \in H(V)$ ) とおくと， $(\Pi_\chi^\sigma, L^2(W'))$  は  $H(V)$  の既約ユニタリ表現で，任意の  $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$  に対して  $\Pi_\chi^\sigma(t) = \chi(t)$  となる．よって系 4.1.3 より  $\Pi_\chi^\sigma$  は  $\Pi_\chi$  とユニタリ同値となり，任意の  $h \in H(V)$  に対して

$$T^{-1} \circ \Pi_\chi(h) \circ T = \Pi_\chi(h^\sigma)$$

となる  $T \in \text{Aut}(L^2(W'))$  が存在する．ここで  $\text{Aut}(L^2(W'))$  の位相として，任意の  $\varphi \in L^2(W')$  に対して  $T \mapsto T\varphi$  が連続となる最弱の位相を与えると， $\text{Aut}(L^2(W'))$  は Hausdorff 位相群となる．そこで直積群  $Sp(V) \times \text{Aut}(L^2(W'))$  の閉部分群

$$Mp(V) = \{(\sigma, T) \mid T^{-1} \circ \Pi_\chi(h) \circ T = \Pi_\chi(h^\sigma) \text{ for } \forall h \in H(V)\}$$

を考えると

$$\varpi : Mp(V) \rightarrow Sp(V) \quad ((\sigma, T) \mapsto \sigma)$$

は  $Mp(V)$  から  $Sp(V)$  への全射連続群準同型写像であり，その核は定数倍写像という意味で  $\mathbb{C}^1$  である． $Mp(V)$  の元を幾つか作ってみよう．まず  $a \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$  に対して  $d(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & {}_t a^{-1} \end{bmatrix} \in Sp(V)$  であり， $d_0(a) \in \text{Aut}(L^2(W'))$  を

$$(d_0(a)\varphi)(w') = |\det a|^{1/2} \varphi(w'a) \quad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W')$$

により定義すると  $d(a) = (d(a), d_0(a)) \in Mp(V)$  であり

$$d : GL_{\mathbb{Q}_p}(W') \rightarrow Mp(V)$$

は連続群準同型写像である．又， $b \in \text{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(W', W)$  に対して  $t(b) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sp(V)$  で， $t_0(b) \in \text{Aut}(L^2(W'))$  を

$$(t_0(b)\varphi)(w') = \chi(2^{-1}\langle w', w'b \rangle) \cdot \varphi(w') \quad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W')$$

により定義すると  $\mathbf{t}(b) = (t(b), \mathbf{t}_0(b)) \in Mp(V)$  であり

$$\mathbf{t} : \text{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(W', W) \rightarrow Mp(V)$$

は連続群準同型写像である. 又,  $\mathbb{R}$ -線形同型写像  $c : W \xrightarrow{\sim} W'$  に対して  $d'(c) = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix} \in Sp(V)$  で,  $\mathbf{d}'_0(c) \in \text{Aut}(L^2(W'))$  を

$$(\mathbf{d}'_0 \varphi)(w') = |c|^{-1/2} \widehat{\varphi}(w' {}^t c^{-1}) \quad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W^{\text{prime}})$$

により定義すると,  $\mathbf{d}'(c) = (d'(c), \mathbf{d}'_0(c)) \in Mp(V)$  である. ここで  $d_{W'}(wc) = |c|d_W(w)$  により  $0 < |c| \in \mathbb{R}$  を定義する.  $c \mapsto \mathbf{d}'(c)$  は連続写像である. 更に

$$\Omega(V) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V) \mid c : W \xrightarrow{\sim} W' : \text{線形同型} \right\}$$

とにおいて,  $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(V)$  ならば  $\sigma = \mathbf{t}(ac^{-1})\mathbf{d}'(c)\mathbf{t}(c^{-1}d)$  であることに注意して,

$$\mathbf{r}_0(\sigma) = \mathbf{t}_0(ac^{-1}) \circ \mathbf{d}'_0(c) \circ \mathbf{t}_0(c^{-1}d) \in \text{Aut}(L^2(W'))$$

とおけば  $\mathbf{r}(\sigma) = (\sigma, \mathbf{r}_0(\sigma)) \in Mp(V)$  であり

$$\mathbf{r} : \Omega(V) \rightarrow Mp(V)$$

は連続写像である. よって  $(\sigma, \lambda) \mapsto (\sigma, \lambda \mathbf{r}(\sigma))$  は  $\Omega(V) \times \mathbb{C}^1$  から  $Mp(V)$  の開集合  $\varpi^{-1}(\Omega(V))$  への位相同型写像となるから,  $Mp(V)$  は局所コンパクト群である ([19, p.186] 参照). 更に連続群準同型写像  $\Phi : Mp(V) \rightarrow \mathbb{C}^1$  で

- 1) 任意の  $\lambda \in \mathbb{C}^1$  に対して  $\Phi(1, \lambda) = \lambda^2$ ,
- 2)  $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(V)$  に対して  $\Phi(\mathbf{r}(\sigma)) = (|c|, -1)_2 \gamma_X(Q_1)^{\dim V}$

なるものが存在する. ここで  $Q_1(x) = x^2$  は  $\mathbb{Q}_p$  上の二次形式であり,  $(a, b)_2$  は Hilbert 記号である<sup>7</sup>.  $\widetilde{Sp}(V) = \text{Ker } \Phi$  は  $Mp(V)$  の閉部分群 (従って局所コンパクト群) で

$$\varpi : \widetilde{Sp}(V) \rightarrow Sp(V) \quad ((\sigma, T) \mapsto \sigma)$$

<sup>7</sup> $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$  に対して

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} s + t\sqrt{a} & u + v\sqrt{a} \\ b(u - v\sqrt{a}) & s - t\sqrt{a} \end{bmatrix} \mid s, t, u, v \in \mathbb{Q}_p \right\}$$

は  $M_2(\mathbb{Q}_p(\sqrt{a}))$  の  $\mathbb{Q}_p$ -部分代数となり,  $M_2(\mathbb{Q}_p)$  と同型であるか又は  $\mathbb{Q}_p$  上の斜体となる.

$$(a, b)_2 = \begin{cases} 1 & : H \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{Q}_p) \text{ のとき,} \\ -1 & : H \text{ が } \mathbb{Q}_p \text{ 上の斜体のとき} \end{cases}$$

を Hilbert 記号と呼ぶ.

連続全射群準同型写像で，その核は  $\{(1, \pm 1)\}$  である．

$$\omega_\chi : \widetilde{Sp}(V) \rightarrow \text{Aut}(L^2(W')) \quad ((\sigma, T) \mapsto T)$$

は  $\widetilde{Sp}(V)$  のユニタリ表現を与えるから，これを Weil 表現と呼ぶ．後に用いるために次のことを注意しておく； $a \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$  に対して， $cW \xrightarrow{\sim} W'$  を一つとれば， $d'(c)d(a) = d'(ca)$  だから， $\Phi(d(a)) = (\det a, -1)_2$  である．ここで  $\eta_\chi(a) = \gamma_\chi(Q_1)\gamma_\chi(-\det a \cdot Q_1)$  とおくと  $\eta_\chi(a)^2 = (\det a, -1)_2$  となるから

$$\widetilde{\mathbf{d}}(a) = (d(a), \eta_\chi(a)^{-1}d(a)) \in \widetilde{Sp}(V) \quad (3)$$

とおく．

4.4  $\mathbb{Z}_p$ -格子  $L \subset W$  をとり<sup>8</sup>， $L' = \{x \in W' \mid \chi(\langle x, L \rangle) = 1\}$  とおいて  $\Lambda = L' \oplus L$  とおく． $H(\Lambda) = \Lambda \times \mathbb{Q}_p$  は  $H(V)$  の閉部分群で

$$\chi_\Lambda : H(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}^1 \quad (((x, y), t) \mapsto \chi\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle\right))$$

は  $H(\Lambda)$  の連続なユニタリ指標となる．そこで誘導表現  $\pi_{\chi_\Lambda} = \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$  を考える．その表現空間は

- 1) 任意の  $\lambda \in H(\Lambda)$  に対して  $\theta(\lambda g) = \chi_\Lambda(\lambda)\theta(g)$ ,
- 2)  $\int_{H(\Lambda) \backslash H(V)} |\theta(g)|^2 d(g) < \infty$

なる  $H(V)$  上の可測関数  $\theta$  の全体であり， $h \in H(V)$  の  $\theta \in \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$  への作用は  $(\pi_{\chi_\Lambda}(h)\theta)(g) = \theta(gh)$  により定義される．ここで Schwartz 関数<sup>9</sup>  $\varphi \in \mathcal{S}(W')$  に対して

$$\Theta_\varphi(h) = \int_{L'} \varphi(x+l) \chi\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle + \langle l, y \rangle\right) d_{L'}(l) \quad (h = ((x, y), t) \in H(V))$$

により  $H(V)$  上の関数  $\Theta_\varphi$  を定義すれば， $\Theta_\varphi \in \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$  であり  $|\Theta_\varphi| = |\varphi|$  である．更に次の定理が成り立つ；

定理 4.4.1  $\varphi \mapsto \Theta_\varphi$  は  $H(V)$  のユニタリ表現のユニタリ同値写像

$$(\Pi_\chi, L^2(W')) \xrightarrow{\sim} \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$$

に延長される．

<sup>8</sup>即ち， $W$  の  $\mathbb{Z}_p$ -部分加群であって  $W$  の  $\mathbb{Q}_p$  上の基底を含むもの．

<sup>9</sup> $p = \infty$  のときには各階微分の多項式倍が常に有界なる関数， $p < \infty$  のときには台がコンパクトなる連続関数．

$\text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$  を Schrödinger 表現の格子モデルと呼ぶ。さて  $\Lambda\sigma = \Lambda$  なる  $\sigma \in Sp(V)$  の全体を  $Sp(\Lambda)$  と書き,  $Sp(\Lambda)$  の部分群

$$Sp_{0,\chi}(\Lambda) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi_\Lambda(\lambda^\gamma) = \chi_\Lambda(\lambda) \text{ for } \forall \lambda \in H(\Lambda)\}$$

を考えよう。  $\gamma \in Sp_{0,\chi}(\Lambda)$  に対して, 複素 Hilbert 空間  $\text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$  の自己同型写像  $r_\chi(\gamma)$  が

$$(r_\chi(\gamma)\theta)(h) = \theta(h^\gamma) \quad (\theta \in \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda, h \in H(V))$$

により定義される。そこで定理 4.4.1 のユニタリ同値写像  $\varphi \mapsto \Theta_\varphi$  により  $r_\chi(\gamma)$  が誘導する  $L^2(W')$  上の自己同型写像を同じく  $r_\chi$  と書こう。すると  $\gamma \mapsto (\gamma, r_\chi(\gamma))$  は  $Sp_{0,\chi}(\Lambda)$  から  $Mp(V)$  への群準同型写像であることがわかる。そこで  $\widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda) = \varpi_\chi^{-1}Sp_{0,\chi}(\Lambda)$  とおくと, 群準同型写像

$$\rho_\chi = \rho_{\Lambda,\chi} : \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}^1$$

が定まって, 任意の  $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$  に対して

$$\omega_\chi(\tilde{\gamma}) = \rho_\chi(\tilde{\gamma}) \cdot r_\chi(\gamma) \quad (\gamma = \varpi_\chi(\tilde{\gamma}))$$

が成り立つようにできる。ここで  $a \in V$  をとって  $H(\Lambda)$  のユニタリ指標

$$\chi_{\Lambda,a}(\lambda) = \chi_\Lambda(\lambda) \cdot \chi(D(a, l)) \quad (\lambda = (l, t) \in H(\Lambda))$$

を定義する。又,  $a = (a', a'') \in V = W' \times W$  として  $W'$  上の Schwartz 関数  $\varphi \in \mathcal{S}(W')$  に対して

$$\begin{aligned} \vartheta_\varphi[a](\tilde{g}) &= \Theta_{\omega_{\chi,J}(\tilde{g})\varphi}(a, 0) \\ &= \chi\left(\frac{1}{2}\langle a', a'' \rangle\right) \cdot \int_{L'} (\omega_{\chi,J}(\tilde{g})\varphi)(a' + l) \chi(\langle l, a'' \rangle) d_{L'}(l) \end{aligned}$$

( $\tilde{g} \in \widetilde{Sp}(V)_J$ ) とおくと, テータ級数の変換公式が次のように述べられる;

**定理 4.4.2** 任意の  $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$  と  $\lambda \in H(\Lambda)$  に対して

$$\vartheta_\varphi[a](\tilde{\gamma}, \lambda)\tilde{g} = \rho_\Lambda(\tilde{\gamma})\chi_{\Lambda,a\gamma}(\lambda)\vartheta_\varphi[a\gamma](\tilde{g}).$$

[証明]  $\omega_\chi(\tilde{\gamma})$  と  $\Pi_\chi(\lambda)$  を  $\text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$  上で実現したものを同じ記号で表せば,  $\psi = \omega_{\chi,J}(\tilde{g})\varphi$  として

$$\begin{aligned} \vartheta_\varphi[a](\tilde{\gamma}, \lambda)\tilde{g} &= (\omega_\chi(\tilde{\gamma}) \circ \Pi_\chi(\lambda)\Theta_\psi)(a, 0) \\ &= \rho_\Lambda(\tilde{\gamma})(\Pi_\chi(\lambda)\Theta_\psi)(a\gamma, 0) \\ &= \rho_\Lambda(\tilde{\gamma})\Theta_\psi((a\gamma, 0)\lambda). \end{aligned}$$

ここで  $\lambda = (l, t)$  とおくと,  $(x, s) \in H(V)$  に対して

$$\begin{aligned} (l, t)^{-1}(x, s)(l, t) &= (-l, -t)(x + l, s + t + 2^{-1}D(x, l)) \\ &= (x, s + 2^{-1}D(x, l) - 2^{-1}D(l, x + l)) \\ &= (0, D(x, l))(x, s) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \Theta_\psi((a\gamma, 0)\lambda) &= \Theta_\psi(\lambda(0, D(a\gamma, l))(a\gamma, 0)) \\ &= \chi_\Lambda(\lambda(0, D(a\gamma, l)))\Theta_\psi(a\gamma, 0) \end{aligned}$$

となり, 求める等式を得る. ■

特に  $\tilde{g} = \tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V), a = 0$  の場合に

系 4.4.3  $W'$  上の Schwartz 関数  $\varphi \in \mathcal{S}(W')$  に対して

$$\vartheta_\varphi(\tilde{\sigma}) = \int_{L'} (\omega_\chi(\tilde{\sigma})\varphi)(l) d_{L'}(l) \quad (\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))$$

とおくと, 任意の  $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0, \chi}(\Lambda)$  に対して

$$\vartheta_\varphi(\tilde{\gamma}\tilde{\sigma}) = \rho_\Lambda(\tilde{\gamma}) \cdot \vartheta_\varphi(\tilde{\sigma}).$$

#### 4.5 $GL_{\mathbb{Q}_p}(V)$ の閉部分群

$$GSp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{Q}_p}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = \nu(\sigma) \cdot D(x, y) \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

は,  $\sigma \in GSp(V)$  と  $h = (x, t) \in H(V)$  に対して  $h^\sigma = (x\sigma, \nu(\sigma)t)$  により  $H(V)$  に右から作用し,  $h \mapsto h^\sigma$  は  $H(V)$  の位相的自己同型写像である. 特に半直積  $Sp(V)_J = Sp(V) \times H(V)$  を Jacobi 群と呼ぶ. 更に  $\widetilde{Sp}(V)$  は  $\varpi : \widetilde{Sp}(V) \rightarrow Sp(V)$  を通して  $H(V)$  に作用するから, 半直積  $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V) \times H(V)$  及び

$$\varpi_J : \widetilde{Sp}(V)_J \rightarrow Sp(V)_J \quad ((\tilde{\sigma}, h) \mapsto (\varpi(\tilde{\sigma}), h))$$

を考えると,  $\widetilde{Sp}(V)$  の Weil 表現  $(\omega_\chi, L^2(W'))$  を用いて  $\widetilde{Sp}(V)_J$  の既約ユニタリ表現  $(\omega_{\chi, J}, L^2(W'))$  が

$$\omega_{\chi, J}(\tilde{\sigma}, h) = \omega_\chi(\tilde{\sigma}) \circ \Pi_\chi(h)$$

により定義される.

ここで  $\widetilde{Sp}(V)$  のユニタリ表現  $\pi$  があれば, 自然な射影  $\widetilde{Sp}(V)_J \rightarrow \widetilde{Sp}(V)$  を通して  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現  $\pi_J$  が生ずるから, ユニタリ表現のテンソル積  $\rho = \pi_J \otimes \omega_{\chi, J}$  は  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現で, 任意の  $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V)) =$

$Z(\widetilde{Sp}(V)_J)$  に対して  $\rho(t) = \chi(t)$  となる．逆に，任意の  $t \in \mathbb{Q}_p$  に対して  $\rho(t) = \chi(t)$  なる  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現  $(\rho, H)$  があると，それを  $H(V)$  に制限すると，定理 4.1.2 より，複素 Hilbert 空間  $E$  があって  $H = E \widehat{\otimes} L^2(W')$  かつ  $\rho|_{H(V)} = \mathbf{1}_E \otimes \Pi_\chi$  である．このとき  $E = \mathcal{L}_{H(V)}(L^2(W'), H)$  で，オペレータ・ノルム  $|T| = \sup_{0 \neq \varphi \in L^2(W')} |T\varphi|/|\varphi|$  により複素 Hilbert 空間になる．そこで  $E$  上の  $\widetilde{Sp}(V)$  のユニタリ表現  $\pi$  を

$$\pi(\tilde{\sigma})T = \rho(\tilde{\sigma}, 1) \circ T \circ \omega_\chi(\tilde{\sigma})^{-1}$$

により定義すると， $\rho = \pi_J \otimes \omega_{\chi, J}$  となる．正確には次の定理が成り立つ；

**定理 4.5.1**  $\pi \mapsto \pi_J \otimes \omega_{\chi, J}$  は  $\widetilde{Sp}(V)$  のユニタリ表現  $\pi$  のユニタリ同値類と  $\rho|_{Z(\widetilde{Sp}(V)_J)} = \chi$  なる  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現  $\rho$  のユニタリ同値類の間の全単射を与える．特に  $\pi_J \otimes \omega_{\chi, J}$  が既約となる必要十分条件は  $\pi$  が既約なることである．

## 5 重さ 1/2 の保型因子

**5.1**  $(V, D)$  を実斜交空間として，7.1 節の記号を用いる． $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_\infty(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$  とおいて， $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$  ( $\sigma \in Sp(V), h = (x, t) \in H(V)$ ) と  $Z = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V, J}$  に対して

$$\begin{aligned} \eta(g; Z) = & \mathbf{e} \left( t + \frac{1}{2} D(x, x \begin{bmatrix} z \\ 1_W \end{bmatrix} J(\sigma, z)^{-1} \sigma) \right. \\ & \left. + D(x, w J(\sigma, z)^{-1} \sigma) + \frac{1}{2} D(w, w J(\sigma, z)^{-1} \sigma) \right) \end{aligned}$$

とおき， $Z' = (z', w') \in \mathfrak{H}_{V, J}$  に対して

$$\kappa(Z'; Z) = \mathbf{e} \left( \frac{1}{2} \langle (w' - \bar{w})(z' - \bar{z})^{-1}, w' - \bar{w} \rangle \right)$$

とおくと

$$\kappa(g(Z'), g(Z)) = \eta(g; Z') \kappa(Z'; Z) \overline{\eta(g; Z)}$$

となる．特に  $z \in \mathfrak{H}_V$  と  $w', w \in W_{\mathbb{C}}$  に対して  $\kappa_z(w', w) = \kappa(z, w'; z, w)$  とおく．

Heisenberg 群  $H(V)$  の中心  $Z(H(V)) = \mathbb{R}$  のユニタリ指標  $\chi(t) = e^{-2\pi\sqrt{-1}t}$  から  $H(V)$  に誘導された誘導表現  $\pi_\chi = \text{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)} \chi$  を考える．その表現空間は

- 1) 任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $\varphi(g(0, t)) = \chi(t)^{-1} \varphi(g) = \mathbf{e}(t) \varphi(g)$ ,
- 2)  $\int_{H(V)/Z(H(V))} |\varphi(g)|^2 d(g) < \infty$

なる  $H(V)$  上の複素数値可測関数  $\varphi$  の全体であり,  $h \in H(V)$  の作用は  $(\pi_\chi(h)\varphi)(g) = \varphi(h^{-1}g)$  で定義される. 一方  $\mathfrak{h}_{V,J}$  における  $(z, 0) \in \mathfrak{h}_{V,J}$  の  $H(V)$ -軌道は  $\Omega_z = \{z\} \times W_{\mathbb{C}}$  となり, これを  $(z, w) = w$  なる同一視により  $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  とみなす.  $(z, 0) \in \Omega_z$  の  $H(V)$  における固定部分群は  $Z(|H(V)|)$  だから, 誘導表現  $\text{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)} \chi$  を  $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  上の関数の空間上に実現することができる. それを具体的に書いてみよう. まず

$$d_z(w) = (\det \text{Im } z)^{-1} d_{W_{\mathbb{C}}}(w)$$

は  $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  上の  $H(V)$ -不変測度であり,  $g \in Sp(V)_J$  に対して  $g(z, w) = (z', w') \in \mathfrak{h}_{V,J}$  とすると

$$d_{z'}(w') = d_z(w)$$

となる.  $\varphi \in \text{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)} \chi$  に対して  $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  上の関数  $\tilde{\varphi}$  が

$$\tilde{\varphi}(w) = \eta(h; z, 0)^{-1} \varphi(h) \quad (w = h(0) \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}, h \in H(V))$$

により定義されて  $|\varphi(h)|^2 = |\tilde{\varphi}(w)|^2 \kappa_z(w, w)$  となる. 一方,  $h \in H(V)$  に対して  $\psi = \pi_\chi(h)\varphi$  とおくと

$$\tilde{\psi}(w) = \eta(h^{-1}; z, w) \tilde{\varphi}(h^{-1}(w)) \quad (w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}})$$

となる. そこで  $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して,  $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  上の複素数値可測関数  $\varphi$  であって

$$\int_{W_{\mathbb{C}}} |\varphi(w)|^2 \kappa_z(w, w) d_z(w) < \infty$$

なるもの全体のなす複素 Hilbert 空間を  $\mathcal{L}_z$  とすると,  $H(V)$  の  $\mathcal{L}_z$  上のユニタリ表現  $\pi_z$  が

$$(\pi_z(h)\varphi)(w) = \eta(h^{-1}; z, w) \varphi(h^{-1}(w)) \quad (h \in H(V), \varphi \in \mathcal{L}_z)$$

により定義される. 更に  $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  上正則なる  $\varphi \in \mathcal{L}_z$  の全体  $\mathcal{H}_z$  は  $\mathcal{L}_z$  の閉部分空間となり,  $(\pi_z, \mathcal{L}_z)$  の部分表現  $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$  が定まるが, 実は  $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$  は  $H(V)$  の Schrödinger 表現  $(\tilde{\Pi}_e, L^2(W))$  とユニタリ同値である. そのユニタリ同値写像を具体的に与えるために, 幾つか準備をしておこう. まず  $\text{Re } T = (T + \bar{T})/2$  が正定値となる  $T \in \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$  の全体  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  上の正則関数  $\det^{-1/2}$  を

$$\det^{-1/2} T = \int_{W'} e^{-\pi \langle w, w^T \rangle} d_{W'}(w) \quad (T \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}})$$

により定義すると,  $(\det^{-1/2} T)^2 = \det T^{-1}$  ( $d_{W'}(w) = \prod_{i=1}^n dx_i$  ( $w = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ ) なる  $W'$  の  $\mathbb{R}$ -基底  $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$  に対して  $\det T = \det(\langle u_i, u_j^T \rangle)_{i, j=1, \dots, n}$  により定める) であり, 正定値なる  $T \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$  に対して  $\det^{-1/2} T =$

$(\det T)^{1/2}$  となる．整数  $n$  に対して  $\det^{n/2}T = (\det^{-1/2}T)^{-n}$  とおく．同様に  $\operatorname{Re} S = (S + \bar{S})/2$  が正定値なる  $S \in \operatorname{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$  の全体  $S'_{\mathbb{C}}$  上の正則関数  $\det^{-1/2}$  が

$$\det^{-1/2}S = \int_W e^{-\pi\langle wS, w \rangle} d_W(w) \quad (S \in S'_{\mathbb{C}})$$

により定義される． $T \mapsto T^{-1}$  は  $S_{\mathbb{C}}$  から  $S'_{\mathbb{C}}$  への双正則な全単射で  $\det^{-1/2}(T^{-1}) = \det^{1/2}T$  である．そこで  $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して

$$\begin{aligned} \gamma(z) &= \det^{-1/2}(z/\sqrt{-1}) \cdot \det(2\operatorname{Im} z)^{1/4}, \\ q_z(w) &= \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle wz^{-1}, w \rangle\right) \quad (w \in W_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

とにおいて， $\psi \in L^2(W)$  に対して

$$Q_z(\psi)(w) = \gamma(z) \int_W q_z(w-v)\psi(v)d_W(v) \quad (w \in W_{\mathbb{C}})$$

とおくと， $\psi \mapsto Q_z(\psi)$  は  $H(V)$  のユニタリ表現  $(\check{\Pi}_e, L^2(W))$  から  $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$  へのユニタリ同値写像を与える． $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$  を Schrödinger 表現  $(\check{\Pi}_e, L^2(W))$  の Fock モデルと呼ぶ．反傾表現  $(\Pi_e, L^2(W'))$  の Fock モデルをみるために，まず Fourier 変換  $\mathcal{F}: L^2(W') \xrightarrow{\sim} L^2(W)$  を

$$(\mathcal{F}\varphi)(w) = \int_{W'} \varphi(v)\mathbf{e}(-\langle v, w \rangle)d_{W'}(v) \quad (\varphi \in L^2(W') \cap L^1(W'))$$

により定義する．又  $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して  $z^\vee = -\bar{z} \in \mathfrak{h}_V$  とおき， $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{GSp}(V)$  とにおいて， $H(V)$  の  $\mathcal{H}_{z^\vee}$  上のユニタリ表現を  $\check{\pi}_z(h) = \pi_{z^\vee}(h^\varepsilon)$  ( $h \in H(V)$ ) により定義する．このとき

$$L^2(W') \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(W) \xrightarrow{Q_{z^\vee}} \mathcal{H}_{z^\vee}$$

は  $(\Pi_e, L^2(W'))$  から  $(\check{\pi}_z, \mathcal{H}_{z^\vee})$  へのユニタリ同値写像となる．ここで  $\kappa_{z^\vee}(w, w) = \kappa_z(w, w)$  だから，複素 Hilbert 空間としては  $\mathcal{H}_{z^\vee}$  は  $\mathcal{H}_z$  と同じものである．

**5.2** Heisenberg 群  $H(V)$  のユニタリ表現  $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$  の作用は， $\varphi \in \mathcal{H}_z$  と  $h \in H(V)$  及び  $w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  に対して  $w' = h(w) \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  とおくと

$$(\pi_z(h)\varphi)(w') = \eta(h; z, w)^{-1}\varphi(w)$$

と書ける．そこで  $g = (\sigma, h) \in \operatorname{Sp}(V)_J$  と  $w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$  に対して  $g(z, w) = (\sigma(z), w') \in \Omega_{\sigma(z)} = W_{\mathbb{C}}$  として

$$(T^z(g)\varphi)(w') = \eta(g; z, w)^{-1}\varphi(w) \quad (\varphi \in \mathcal{H}_z)$$

とおくと,  $T^z(g)$  は  $\mathcal{H}_z$  から  $\mathcal{H}_{\sigma(z)}$  へのユニタリ写像で, 更に  $g' \in Sp(V)_J$  をとれば

$$T^z(g'g) = T^{\sigma(z)}(g') \circ T^z(g)$$

となる. そこでユニタリ自己同型  $T_z(g) \in \text{Aut}(L^2(W))$  を可換図式

$$\begin{array}{ccc} L^2(W) & \xrightarrow{Q_z} & \mathcal{H}_z \\ T_z(g) \downarrow & & \downarrow T^z(g) \\ L^2(W) & \xrightarrow{Q_{\sigma(z)}} & \mathcal{H}_{\sigma(z)} \end{array}$$

により定義する.  $z, z' \in \mathfrak{H}_V$  に対して  $\mathcal{H}_z$  から  $\mathcal{H}_{z'}$  へのユニタリ同型を  $U_{z',z} = Q_{z'} \circ Q_z^{-1}$  と定義すると,  $\varphi \in \mathcal{H}_z$  に対して

$$(U_{z',z}\varphi)(w') = \gamma(z', z) \int_{W_{\mathbb{C}}} \kappa(z', w'; z, w)^{-1} \varphi(w) \kappa_z(w, w) d_z(w)$$

となることが示される. ここで

$$\begin{aligned} \gamma(z', z) &= \gamma(z') \overline{\gamma(z)} \det^{-1/2} \left\{ (z'/\sqrt{-1})^{-1} + \overline{(z/\sqrt{-1})^{-1}} \right\} \\ &= \det^{-1/2} \left( \frac{z' - \bar{z}}{2\sqrt{-1}} \right) \det(\text{Im } z')^{1/4} \det(\text{Im } z)^{1/4} \end{aligned}$$

である. ユニタリ自己同型  $T_z(g) \in \text{Aut}(L^2(W))$  をユニタリ同型写像  $Q_z : L^2(W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_z$  により  $\mathcal{H}_z$  のユニタリ自己同型とみれば

$$T_z(g) = U_{z,\sigma(z)} \circ T^z(g) \in \text{Aut}(\mathcal{H}_z) \quad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J)$$

となる. さて, ユニタリ同型写像  $\check{T}_z(g) \in \text{Aut}(L^2(W'))$  を可換図式

$$\begin{array}{ccccc} L^2(W') & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(W) & \xrightarrow{Q_{z^\vee}} & \mathcal{H}_{z^\vee} \\ \check{T}_z(g) \downarrow & & & & \downarrow T^{z^\vee}(\varepsilon^{-1}g\varepsilon) \\ L^2(W') & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(W) & \xrightarrow{Q_{\sigma(z)^\vee}} & \mathcal{H}_{\sigma(z)^\vee} \end{array}$$

により定義する. すると  $g = (\sigma, h), g' = (\tau, h') \in Sp(V)_J$  に対して

$$\check{T}_z(g) \circ \check{T}_z(g') = \beta_z(\sigma, \tau) \check{T}_z(gg')$$

が成り立つ. ここで  $\sigma \in Sp(V)$  と  $z, z' \in \mathfrak{H}_V$  に対して

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma; z', z) &= \det^{-1/2} \left( \frac{\sigma(z') - \overline{\sigma(z)}}{2\sqrt{-1}} \right) \cdot \det^{1/2} \left( \frac{z' - \bar{z}}{2\sqrt{-1}} \right) \\ &\quad \times |\det J(\sigma, z')|^{-1/2} |\det J(\sigma, z)|^{-1/2} \end{aligned}$$

とおき,  $\sigma, \tau \in Sp(V)$  と  $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して

$$\beta_z(\sigma, \tau) = \varepsilon(\sigma; z, \tau(z)) \in \mathbb{C}^1$$

とおく.  $g, g', g'' \in Sp(V)_J$  に対して結合法則

$$(\check{T}_z(g) \circ \check{T}_z(g')) \circ \check{T}_z(g'') = \check{T}_z(g) \circ (\check{T}_z(g') \circ \check{T}_z(g''))$$

が成り立つから,  $\sigma, \tau, \delta \in Sp(V)$  に対して

$$\beta_z(\tau, \delta) \beta_z(\sigma\tau, \delta)^{-1} \beta_z(\sigma, \tau\delta) \beta_z(\sigma, \tau)^{-1} = 1$$

となる. 即ち  $\beta_z$  は  $\mathbb{C}^1$  に値をとる  $Sp(V)$  上の実解析的な 2-cocycle となる ( $Sp(V)$  は  $\mathbb{C}^1$  に自明に作用している). そこで付随する群拡大を  $Mp(V; z)$  としよう. 即ち,  $Mp(V; z) = \mathbb{C}^1 \times Sp(V)$  で, 群演算を

$$(\varepsilon, \sigma) \cdot (\eta, \tau) = (\varepsilon\eta\beta_z(\sigma, \tau), \sigma\tau)$$

により定義すると,  $Mp(V; z)$  は連結な実 Lie 群である. 更に  $\sigma \in Sp(V)$  に対して

$$\alpha_z(\sigma) = \det J(\sigma, z) / |\det J(\sigma, z)|$$

とおくと<sup>10</sup>,  $\sigma, \tau \in Sp(V)$  に対して

$$\beta_z(\sigma, \tau)^2 = \alpha_z(\tau) \alpha_z(\sigma\tau)^{-1} \alpha_z(\sigma)$$

となるから,  $(\varepsilon, \sigma) \mapsto \varepsilon^2 \alpha_z(\sigma)$  は  $Mp(V; z)$  から  $\mathbb{C}^1$  への連続群準同型写像となる. その核を  $\widetilde{Sp}(V; z)$  としよう. 即ち

$$\widetilde{Sp}(V; z) = \{(\varepsilon, \sigma) \in \mathbb{C}^1 \times Sp(V) \mid \varepsilon^2 = \alpha_z(\sigma)^{-1}\}$$

は  $Mp(V; z)$  の閉部分群となり, 従って実 Lie 部分群となるが, 更に連結であることもわかる. よって

$$\varpi_z : \widetilde{Sp}(V; z) \rightarrow Sp(V) \quad ((\varepsilon, \sigma) \mapsto \sigma)$$

により  $\widetilde{Sp}(V; z)$  は  $Sp(V)$  の連結な二重被覆群となる. ここで  $(\varepsilon, \sigma) \mapsto (\sigma, \varepsilon \check{T}_z(\sigma))$  は  $Mp(V; z)$  から  $Mp(V)$  への位相群としての同型写像であり,  $(\varepsilon, \sigma) \in Mp(V; z)$  に対して

$$\Phi(\sigma, \varepsilon \check{T}_z(\sigma)) = \varepsilon^2 \alpha_z(\sigma)$$

<sup>10</sup>  $\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$  と  $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  を同一視しているから (26 頁),  $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$  に対して

$$J(\sigma, z) = \begin{bmatrix} {}^t(cz + d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz + d \end{bmatrix} = cz + d \in \widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$$

である.

であることが示される．よって  $(\varepsilon, \sigma) \mapsto (\sigma, \varepsilon \check{T}_z(\sigma))$  は  $\widetilde{Sp}(V; z)$  から  $\widetilde{Sp}(V)$  への位相群の同型写像となる．よって Weil 表現は

$$\omega_\chi : \widetilde{Sp}(V; z) \rightarrow \text{Aut}(L^2(W')) \quad ((\varepsilon, \sigma) \mapsto \varepsilon \check{T}_z(\sigma))$$

となる（但し  $\chi(t) = \mathbf{e}(t)$  である）．その反傾表現  $(\check{\omega}_\chi, L^2(W))$  は  $\check{\omega}_\chi(\check{\sigma}) = \varepsilon^{-1} T_z(\sigma)$  ( $\check{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \widetilde{Sp}(V; z)$ ) である．

5.3  $z_0 = \widehat{0} \in \mathfrak{h}_V$  に対して  $\widetilde{Sp}(V) = \widetilde{Sp}(V; z_0)$  とおき

$$\begin{aligned} \varpi : \widetilde{Sp}(V) &\rightarrow Sp(V) & ((\varepsilon, \sigma) \mapsto \sigma), \\ \omega : \widetilde{Sp}(V) &\rightarrow \text{Aut}(L^2(W')) & ((\varepsilon, \sigma) \mapsto \varepsilon \cdot \check{T}_{z_0}(\sigma)) \end{aligned}$$

とおく． $\widetilde{Sp}(V)$  は  $\varphi$  を通して  $\mathfrak{h}_V$  に作用している．特に

$$\widetilde{K} = \varpi^{-1}(K) = \{(\varepsilon, k) \in \mathbb{C}^1 \times K \mid \varepsilon^2 = \det J(k, z_0)^{-1}\}$$

は  $z_0 \in \mathfrak{h}_V$  の固定部分群で，直積群  $\mathbb{C}^1 \times K$  の閉部分群である．ここで  $\check{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \widetilde{Sp}(V)$  に対して

$$J_{1/2}(\check{\sigma}, z) = \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon(\sigma; z, z_0) |\det J(\sigma, z)|^{1/2}$$

とおくと， $J_{1/2}(\check{\sigma}, z)^2 = \det J(\sigma, z)$  となるから， $J_{1/2}(\check{\sigma}, z)$  は  $\check{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V)$  に関して実解析的， $z \in \mathfrak{h}_V$  に関して正則である．又， $\check{\sigma}, \check{\tau} \in \widetilde{Sp}(V)$  に対して

$$J_{1/2}(\check{\sigma}\check{\tau}, z) = J_{1/2}(\check{\sigma}, \tau(z)) J_{1/2}(\check{\tau}, z)$$

となる．特に

$$\det^{1/2} : \widetilde{K} \rightarrow \mathbb{C}^1 \quad (\check{k} = (\varepsilon, k) \mapsto J(\check{k}, z_0) = \varepsilon^{-1})$$

はコンパクト群  $\widetilde{K}$  の 1 次元ユニタリ表現である．ここで Weil 表現  $(\omega, L^2(W'))$  を  $\widetilde{K}$  に制限したときの既約分解を考えよう．その為にユニタリ同型

$$L^2(W') \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(W) \xrightarrow{Q_{z_0^\vee}} \mathcal{H}_{z_0^\vee}$$

により Weil 表現を  $\mathcal{H}_{z_0^\vee}$  上で実現したとしよう．すると  $W_{\mathbb{C}}$  上の多項式関数  $P \in \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$  に対して  $\varphi(w) = P(w) \kappa_{z_0^\vee}(w, 0)^{-1}$  ( $w \in W_{\mathbb{C}}$ ) とおくと  $\varphi \in \mathcal{H}_{z_0^\vee}$  で， $\check{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \widetilde{Sp}(V)$  に対して

$$(\omega(\check{\sigma})\varphi)(w) = \varepsilon \cdot P(\overline{wJ(\sigma, z_0)}) \kappa_{\sigma(z_0)^\vee}(w, 0)^{-1} \quad (w \in W_{\mathbb{C}})$$

となる．従って Weil 表現  $\omega$  を  $\widetilde{K}$  の制限したときの既約分解は

$$\omega|_{\widetilde{K}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \det^{-1/2} \otimes \text{Sym}_n$$

となる．ここで  $\text{Sym}_n$  はコンパクト・ユニタリ群  $K = U(W_{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{z_0})$  の  $n$  次対称テンソル表現であり， $GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の表現とみれば Young 図形は

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n}$$

である．そこで“最小の”  $\tilde{K}$ -タイプ  $\det^{-1/2}$  に対応する  $L^2(W')$  のベクトルをとろう．即ち  $\varphi = \mathcal{F}^{-1} \circ Q_{z_0}^{-1} \kappa_{z_0}^{\vee}(*, 0)^{-1} \in L^2(W')$  とおくと

$$\varphi(u) = \det(2\text{Im } z_0)^{1/4} \mathbf{e} \left( \frac{1}{2} \langle u, uz_0 \rangle \right) \quad (u \in W')$$

である．ここで  $\tilde{g} = (\tilde{\sigma}, h) \in \tilde{Sp}(V)_J$  ( $\tilde{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \tilde{Sp}(V)$ ,  $h \in H(V)$ ) に対して  $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$  とおいて  $g(z_0, 0) = (z, w) \in \mathfrak{h}_{V,J}$  とおくと

$$\begin{aligned} (\omega_{\chi,J}(\tilde{g})\varphi)(u) &= \varepsilon(\tilde{T}_{z_0}(g)\varphi)(u) \\ &= \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\text{Im } z)^{1/4} \mathbf{e} \left( \frac{1}{2} \langle u, uz \rangle + \langle u, w \rangle \right) \quad (u \in W') \end{aligned}$$

となる．よって  $\omega_{\chi,J}(\tilde{g})$  を  $\text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_{\Lambda}$  上で実現したとして  $\Theta_{\varphi} \in \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_{\Lambda}$  への作用を考えれば

$$(\omega_{\chi,J}(\tilde{g})\Theta_{\varphi})(h') = \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\text{Im } z)^{1/4} \mathbf{e} \left( t - \frac{1}{2} \langle a', a'' \rangle \right) \cdot \vartheta[a](z, w)$$

となる．ここで  $h' = (a, t) \in H(V)$  ( $a = (a', a'') \in W' \times W$ ) とし

$$\vartheta[a](z, w) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e} \left( \frac{1}{2} \langle l + a', (l + a')z \rangle + \langle l + a', w + a'' \rangle \right) \quad (4)$$

は Riemann のテータ級数である．よって定理 4.4.2 よりテータ級数の変換公式を得る； $\chi_{\Lambda}(h) = \mathbf{e} \left( t + \frac{1}{2} \langle x, y \rangle \right)$  ( $h = ((x, y), t) \in H(\Lambda)$ ) に対して

$$Sp_0(\Lambda) = \{ \gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi_{\Lambda}(h^{\gamma}) = \chi_{\Lambda}(h) \text{ for } \forall h \in H(\Lambda) \}$$

とおくと

**定理 5.3.1** 任意の  $\gamma \in Sp_0(\Lambda)$  に対して， $\varpi(\tilde{\gamma}) = \gamma$  なる  $\tilde{\gamma} \in \tilde{Sp}_0(\Lambda)$  をとれば

$$\vartheta^*[a](\gamma(z), wJ(\gamma, z)^{-1}) = \rho_{\Lambda}(\tilde{\gamma}) J_{1/2}(\tilde{\gamma}, z) \eta(\gamma; z, w)^{-1} \vartheta^*[a\gamma](z, w)$$

である．ここで  $\vartheta^*[a](z, w) = \mathbf{e} \left( -\frac{1}{2} \langle a', a'' \rangle \right) \cdot \vartheta[a](z, w)$  とおく．

$(x, y) \in \Lambda$  に対して  $h = ((x, y), 0) \in H(\Lambda)$  とおくと

$$\vartheta[0](z, w + xz + y) = \chi_{\Lambda}(h) \eta(h; z, w)^{-1} \vartheta[0](z, w)$$

となることに注意しよう．定理 5.3.1 で特に

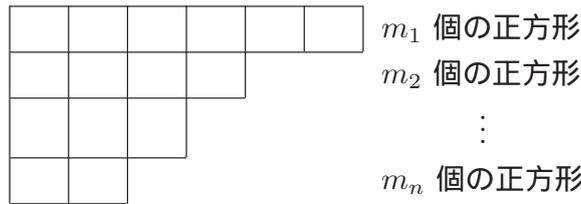
$$\vartheta(z) = \vartheta[0](z, 0) = \sum_{l \in L'} e\left(\frac{1}{2}\langle l, lz \rangle\right) \quad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおけば，任意の  $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$  に対して

$$\vartheta(\gamma(z))/\vartheta(z) = \rho_\Lambda(\tilde{\gamma})J_{1/2}(\tilde{\gamma}, z)$$

である．よって特に任意の  $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$  に対して  $\rho_\Lambda(\tilde{\gamma})^8 = 1$  である ([11] の Chap.V, §2 参照)．

5.4 数論的部分群  $\Gamma \subset Sp(V_{\mathbb{Q}})$  をとり ( $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$  のときには十分大きな  $0 < N \in \mathbb{Z}$  に対して  $Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma$  であると仮定する)， $\widetilde{Sp}(V)$  の離散的部分群  $\tilde{\Gamma} = \varpi^{-1}(\Gamma)$  のユニタリ指標  $\alpha$  として， $\text{Ker } \alpha$  は  $\tilde{\Gamma}$  の指数有限の部分群であると仮定する． $\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$  と  $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  を同一視して， $(\delta, V_\delta)$  を  $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の有限次元既約表現で Young 図形



に対応しているとして， $m_n > 0$  と仮定する．このとき  $\tilde{K}$  の既約ユニタリ表現  $\delta \otimes \det^{-1/2}$  が

$$\tilde{k} = (\varepsilon, k) \mapsto J_{1/2}(\tilde{k}, z_0)^{-1} J_\delta(k, z_0) = \varepsilon \cdot J_\delta(k, z_0)$$

により定義される．これらのデータに対して 3.3 節と同様にして，“重さ半整数”の Siegel モジュラー形式を論ずることができるだろう．即ち，正則関数

$$F : \mathfrak{H}_V \rightarrow V_\delta$$

であって

- 1) 任意の  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$  に対して  $F(\gamma(z)) = \alpha(\tilde{\gamma})^{-1} J_{1/2}(\tilde{\gamma}, z)^{-1} J_\delta(\gamma, z) F(z)$ ,
- 2) 任意の  $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}})$  と任意の  $y_0 \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$  に対して

$$|\det J(\sigma, z)|^{1/2} |J_\delta(\sigma, z)^{-1} F(\sigma(z))|$$

は  $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \text{Im } z \geq y_0\}$  で有界

であるとき， $F$  を  $\Gamma$  に関する重さ  $\delta \otimes \det^{-1/2}$ ，指標  $\alpha$  の Siegel モジュラー形式と呼ぶ．更に，付随する  $\widetilde{Sp}(V)$  上の関数

$$f_F(\tilde{\sigma}) = J_{1/2}(\tilde{\sigma}, z_0) J_\delta(\sigma, z_0)^{-1} F(\sigma(z_0)) \quad (\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V), \varpi(\tilde{\sigma}) = \sigma)$$

が  $\widetilde{Sp}(V)$  上の有界関数となるとき,  $F$  を尖点形式と呼ぶ. ここで

$$|f_F(\tilde{\sigma})| = |\det J(\sigma, z_0)|^{1/2} |J_\delta(\sigma, z_0) F(\sigma(z_0))|$$

は  $\varpi(\tilde{\sigma}) = \sigma \in Sp(V)$  の関数となって, 任意の  $p > 0$  に対して

$$\int_{\Gamma \backslash Sp(V)} |f_F(\tilde{\sigma})|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

となる. 逆に Satake の定理 3.3.1 と同様に

**定理 5.4.1** 実数  $p > 0$  に対して  $p(m_n - 1/2) \geq 2n$  とする. このとき  $\Gamma$  に関する重さ  $\delta \otimes \det^{-1/2}$ , 指標  $\alpha$  の Siegel モジュラー形式  $F$  に対して

$$\int_{\Gamma \backslash Sp(V)} |f_F(\tilde{\sigma})|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

ならば  $F$  は尖点形式である.

$\Gamma$  に関する重さ  $\delta \otimes \det^{-1/2}$ , 指標  $\alpha$  の尖点形式の全体を  $S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)$  と書く. 3.3 節で述べた Siegel 尖点形式の場合と同様に, 定理 5.4.1 の  $p = 2$  の場合を用いて,  $\widetilde{Sp}(V)$  上の正則離散系列表現と重さ  $\delta \otimes \det^{-1/2}$  の Siegel 尖点形式の関係を与えることができる. 即ち

$$\int_{\mathfrak{H}_V} (\delta \otimes \det^{-1/2}(\text{Im } z) \varphi(z), \varphi(z))_\delta d_{\text{frakH}_V}(z) < \infty$$

なる正則関数  $\varphi : \mathfrak{H}_V \rightarrow V_\delta$  の全体  $H_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$  は

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathfrak{H}_V} (\delta \otimes \det^{-1/2}(\text{Im } z) \varphi(z), \psi(z))_\delta d_{\text{frakH}_V}(z)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間となり,  $\widetilde{Sp}(V)$  の  $H_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$  上のユニタリ表現  $\pi_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$  が

$$(\pi_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\tilde{\sigma})\varphi)(z) = J_{1/2}(\tilde{\sigma}^{-1}, z)^{-1} J_\delta(\sigma^{-1}, z)^{-1} \varphi(\sigma^{-1}(z))$$

により定義される.  $H_{\delta \otimes \det^{-1/2}} \neq \{0\}$  となる必要十分条件は  $m_n > n$  なることであり, このとき  $(\pi_{\delta \otimes \det^{-1/2}}, H_{\delta \otimes \det^{-1/2}})$  は  $\widetilde{Sp}(V)$  の既約ユニタリ表現となり, “最小の”  $\widetilde{K}$ -タイプ  $\delta \otimes \det^{-1/2}$  を重複度 1 で含む.

**定理 5.4.2**  $m_n > n$  ならば,  $F \mapsto f_F$  は複素 Hilbert 空間の同型

$$S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma} \backslash \widetilde{Sp}(V), \alpha, \pi_{\delta \otimes \det^{-1/2}})$$

を与える. よって  $F \in S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)$  と  $\beta \in V_\delta^*$  に対して

$$\theta_{F \otimes \beta}(\tilde{\sigma}) = (\dim \delta)^{1/2} \langle \beta, f_F(\tilde{\sigma}) \rangle \quad (\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))$$

とおくと,  $F \otimes \beta \mapsto \theta_{F \otimes \beta}$  は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \xrightarrow{\sim} L^2(\widetilde{\Gamma} \backslash \widetilde{Sp}(V), \alpha^{-1}; \check{\pi}_{\delta \otimes \det^{-1/2}}, \check{\delta} \otimes \det^{1/2})$$

に延長される.

5.5  $V$  を有限次元複素ベクトル空間とし,  $\mathbb{Z}$ -格子  $\Lambda \subset V$  をとる. 実双線形形式  $Q : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  が, 任意の  $x, y \in V$  に対して

$$Q(\sqrt{-1}x, y) = \sqrt{-1}Q(x, y), \quad (Q(x, y) - Q(y, x) \in \sqrt{-1}\mathbb{R})$$

を満たすとき,  $Q$  を  $V$  上の準 Hermite 形式と呼ぶ. このとき

$$H_Q(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Q(\sqrt{-1}x, y) - Q(x, \sqrt{-1}y)) \quad (x, y \in V)$$

は  $V$  上の Hermite 形式となり

$$D_Q(x, y) = \text{Im } H_Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-1}}(Q(x, y) - Q(y, x)) \quad (x, y \in V)$$

は  $V$  上の交代形式である. 写像

$$\alpha : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

が, 任意の  $u, v \in \Lambda$  に対して

$$\alpha(u+v) = \alpha(u)\alpha(v)e^{\pi\sqrt{-1}D_Q(u,v)}$$

を満たすとき,  $\alpha$  を準 Hermite 形式  $Q$  に関する (或いは  $D_Q$  に関する) 準指標と呼ぶ. 準 Hermite 形式  $Q$  に関する準指標が存在する必要十分条件は, 任意の  $u, v \in \Lambda$  に対して  $D_Q(u, v) \in \mathbb{Z}$  なることである.

$V$  上の準 Hermite 形式  $Q$  に関する準指標  $\alpha$  に対して

$$J_{Q,\alpha}(u, x) = \alpha(u) \exp\left(\pi Q(x, u) + \frac{\pi}{2}Q(u, u)\right) \quad (u \in \Lambda, x \in V)$$

とおくと, 任意の  $u, v \in \Lambda$  に対して

$$J_{Q,\alpha}(u+v, x) = J_{Q,\alpha}(u, x+v)J_{Q,\alpha}(v, x)$$

となる. そこで  $V$  上の正則関数  $\theta$  が, 任意の  $u \in \Lambda$  に対して

$$\theta(x+u) = J_{Q,\alpha}(u, x)\theta(x)$$

を満たすとき,  $\theta$  を  $\Lambda$  に関する型  $(Q, \alpha)$  のテータ関数と呼び, そのようなテータ関数の全体を  $\mathcal{L}(Q, \alpha)$  と書く.

$V$  上の準 Hermite 形式に関する準指標が存在するとき

$$\Lambda_Q = \{x \in V \mid D_Q(u, x) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall u \in \Lambda\}$$

は  $\Lambda \subset \Lambda_Q$  なる  $V$  の部分加群であり, 次は同値である;

- 1)  $(\Lambda_Q : \Lambda) < \infty$ ,
- 2)  $V$  上の実交代形式  $D_Q$  は非退化,

3)  $V$  上の Hermite 形式  $H_Q$  は非退化 .

次の定理が基本的である ;

定理 5.5.1  $V$  上の準 Hermite 形式  $Q$  に関する準指標  $\alpha$  に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(Q, \alpha) = \begin{cases} (\Lambda_Q : \Lambda)^{1/2} & : H_Q \text{ が正定値のとき,} \\ 0 & : H_Q \text{ が正定値でないとき.} \end{cases}$$

実斜交空間  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  をとり ,  $x \in W', y \in W$  に対して  $\langle x, y \rangle = D(x, y)$  とおいて ,  $\langle L', L \rangle \subset \mathbb{Z}$  なる  $\mathbb{Z}$ -格子  $L' \subset W', L \subset W$  をとる .

$$L'_D = \{x \in W' \mid \langle x, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}, \quad L_D = \{y \in W \mid \langle L', y \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

とおくと ,  $L' \subset L'_D \subset W'$  及び  $L \subset L_D \subset W$  は  $\mathbb{Z}$ -格子となる . このとき(4)で定義された Riemann のテータ級数

$$\vartheta[a](z, w) = \sum_{l \in L'} e \left( \frac{1}{2} \langle l + \lambda, (l + \lambda)z \rangle + \langle l + \lambda, w + \mu \rangle \right)$$

( $a = (\lambda, \mu) \in W' \times W, z \in \mathfrak{H}_V, w \in W_{\mathbb{C}}$ ) について次が成り立つ ;

定理 5.5.2  $a = (\lambda, \mu) \in W' \times W$  及び  $z \in \mathfrak{H}_V$  に対して ,  $\vartheta[a](z, *)$  は  $W_{\mathbb{C}}$  の  $\mathbb{Z}$ -格子  $\Lambda_z = \{uz + v \mid u \in L', v \in L\}$  に関する型  $(Q_z, \alpha)$  のテータ関数である . ここで

$$Q_z = \frac{2}{\sqrt{-1}} \langle x(\operatorname{Im} z)^{-1}, \operatorname{Im} y \rangle \quad (x, y \in W_{\mathbb{C}})$$

は  $W_{\mathbb{C}}$  上の準 Hermite 形式であり ,  $\alpha$  は

$$\alpha(u) = e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle u, \mu \rangle}, \quad \alpha(v) = e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \lambda, v \rangle} \quad (u \in L', v \in L)$$

により定義される  $Q_z$  に関する準指標である .

ここで  $h = ((x, y), 0) \in H(V)$  ( $x \in W', y \in W$ ) に対して

$$\eta(h; z, w) = J_{Q_z, 1}(xz + y, w)^{-1}$$

であることに注意しよう ( $1$  は  $1|_{L'}, 1|_L$  が共に自明な指標となる  $Q_z$  に関する準指標) . 従って  $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{L}(Q_z, \alpha)$  に対して  $\theta_1(w)\overline{\theta_2(w)}\kappa_z(w, w)$  は  $\Lambda_z$ -不変となり ,  $\mathcal{L}(Q_z, \alpha)$  上の Hermite 内積が

$$(\theta_1, \theta_2) = \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} \theta_1(w)\overline{\theta_2(w)}\kappa_z(w, w)d_z(w)$$

により定義される . このとき定理 5.5.2 の記号を用いて , 次の定理が成り立つ ;

定理 5.5.3  $a = (\lambda, \mu) \in W' \times W$  及び  $z \in \mathfrak{h}_V$  に対して  $\{\vartheta[a+(v, 0)](z, *)\}_{v \in L'_D/L'}$  は  $\mathcal{L}(Q_z, \alpha)$  の基底で,  $v, v' \in L'_D$  に対して

$$\begin{aligned} & (\vartheta[a+(v, 0)](z, *), \vartheta[a+(v', 0)](z, *)) \\ &= \begin{cases} (L'_D : L') \det(2\text{Im } z)^{-1/2} & : v \equiv v' \pmod{L'}, \\ 0 & : v \not\equiv v' \pmod{L'}. \end{cases} \end{aligned}$$

## 6 保型形式のテータ対応の一般的原理

6.1 実斜交空間  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  をとり,  $z_0 \in \mathfrak{h}_V$  を固定して  $Sp(V)$  の二重被覆群  $\widetilde{Sp}(V) = \widetilde{Sp}(V; z_0)$  の Weil 表現  $(\omega, L^2(W'))$  を考えよう (ここでは  $\chi(t) = e(t)$  としておく).  $(G, H)$  を  $V$  上の reductive dual pair として, 極大コンパクト部分群  $K \subset G, L \subset H$  をとって, 被覆写像  $\varpi : \widetilde{Sp}(V) \rightarrow Sp(V)$  により

$$\widetilde{K} = \varpi^{-1}(K) \subset \widetilde{G} = \varpi^{-1}(G), \quad \widetilde{L} = \varpi^{-1}(L) \subset \widetilde{H} = \varpi^{-1}(H)$$

とおく.  $\widetilde{G}$  の元と  $\widetilde{H}$  の元は  $\widetilde{Sp}(V)$  で可換だから,  $\omega(\widetilde{G}), \omega(\widetilde{H})$  で生成される  $L^2(W')$  上の von Neumann 環

$$\mathcal{A}_G = \omega(\widetilde{G})'', \quad \mathcal{A}_H = \omega(\widetilde{H})''$$

は互いに可換である<sup>11</sup>. 更に Howe [9] が示したように

定理 6.1.1  $\mathcal{A}_H = \mathcal{A}'_G$ , 従って  $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}'_H$  である.

自然な群準同型写像  $i : \widetilde{G} \times \widetilde{H} \rightarrow \widetilde{Sp}(V)$  ( $(g, h) \mapsto gh$ ) により  $\omega|_{\widetilde{G} \times \widetilde{H}} = \omega \circ i$  は直積群  $\widetilde{G} \times \widetilde{H}$  の  $L^2(W')$  上のユニタリ表現となるが, 上の定理から直ちに次の定理を得る;

定理 6.1.2 1)  $(\omega|_{\widetilde{G} \times \widetilde{H}})_{\text{disc}}$  の既約分解は重複度 1 である,  
2)  $\widetilde{G}$  の既約ユニタリ表現  $\pi$  に対して  $\pi \otimes \pi' \hookrightarrow \omega|_{\widetilde{G} \times \widetilde{H}}$  なる  $\widetilde{H}$  の既約ユニタリ表現は高々 1 個である.

そこで

$$(\omega|_{\widetilde{G} \times \widetilde{H}})_{\text{disc}} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda \otimes \pi'_\lambda$$

( $\pi_\lambda, \pi'_\lambda$  はそれぞれ  $\widetilde{G}, \widetilde{H}$  の既約ユニタリ表現) とおく.  $\pi_\lambda, \pi'_\lambda$  の表現空間を  $H_{\pi_\lambda}, H_{\pi'_\lambda}$  として,  $H_{\pi_\lambda} \widehat{\otimes} H_{\pi'_\lambda}$  から  $L^2(W')$  の  $\pi_\lambda \otimes \pi'_\lambda$ -成分  $L^2(W')_\lambda$  へのユ

<sup>11</sup> 複素 Hilbert 空間  $X$  上の有界線形作用素全体  $\mathcal{L}(X)$  の部分集合  $S$  に対して

$$S' = \{T \in \mathcal{L}(X) \mid T \circ S = S \circ T \text{ for } \forall S \in S\}$$

とおき,  $S'' = (S')'$  とおく.  $\mathcal{L}(X)$  の自己共役的な  $\mathbb{C}$ -部分代数  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$  を満たすとき,  $\mathcal{A}$  を  $X$  上の von Neumann 代数と呼ぶ.

ニタリ同値写像を  $U_\lambda$  とする . 特に  $\pi \otimes \pi' \hookrightarrow \omega_{\tilde{G}} \times \tilde{H}$  なる  $\tilde{G}, \tilde{H}$  の既約ユニタリ表現  $\pi, \pi'$  を選び ,  $\tilde{K}, \tilde{L}$  の既約ユニタリ表現  $\delta, \delta'$  はそれぞれ  $\pi|_{\tilde{K}}, \pi'|_{\tilde{L}}$  に重複度 1 で含まれると仮定する .  $\mathbb{Z}$ -格子  $L \subset W$  をとり

$$L' = \{x \in W' \mid \langle x, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

とおき  $\Lambda = L' \oplus L$  において

$$\Gamma \subset Sp_0(\Lambda) \cap G, \quad \Gamma' \subset Sp_0(\Lambda) \cap H$$

なる合同部分群  $\Gamma, \Gamma'$  をとる .  $W'$  上の Schwartz 関数  $\varphi \in \mathcal{S}(W')$  に付随するテータ級数

$$\vartheta_\varphi(\tilde{\sigma}) = \sum_{l \in L'} (\omega(\tilde{\sigma})\varphi)(l) \quad (\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))$$

の変換公式 (系 4.4.3)

$$\vartheta_\varphi(\tilde{\gamma}\tilde{\sigma}) = \rho_\Lambda(\tilde{\gamma})\vartheta_\varphi(\tilde{\sigma}) \quad (\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda))$$

が成り立つから ,  $\rho_G = \rho_\Lambda|_{\tilde{\Gamma}}, \rho_H = \rho_\Lambda|_{\tilde{\Gamma}'}$  とおく .

以上の設定の下に  $f \in L^2(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G^{-1}; \tilde{\pi}, \tilde{\delta})$  と  $\varphi \in \mathcal{S}(W')$  に対して

$$F_{f,\varphi}(h) = \int_{\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}} f(g)\vartheta_\varphi(gh)d_{\tilde{G}}(g) \quad (h \in \tilde{H})$$

とおくと

$$F_{f,\varphi}(\tilde{\gamma}h) = \rho_H(\tilde{\gamma}) \cdot F_{f,\varphi}(h) \text{ for } \forall \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}'$$

である . ここで

**定理 6.1.3**  $\varphi = U_\lambda(u \otimes v)$  ( $u \in H_{\pi_\lambda}, v \in H_{\pi'_\lambda}$ ) とする . このとき  $F_{f,\varphi} \neq 0$  ならば  $\pi_\lambda = \pi$  (従って  $\pi'_\lambda = \pi'$ ) かつ  $u \in H_\pi(\delta)$  である . 更に任意の  $\psi \in C_c(\tilde{H}, \delta')^\circ$  に対して

$$\int_{\tilde{H}} F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\tilde{H}}(y) = \hat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi)$$

となる必要十分条件は  $v \in H_{\pi'}(\delta')$  なることである .

[証明] まず任意の  $\psi \in C_c(\tilde{G}, \delta)^\circ$  に対して

$$\begin{aligned} F_{f,\omega(\psi)\varphi}(h) &= \int_{\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}} f(g) \left( \int_{\tilde{G}} \psi(x)\vartheta_\varphi(ghx)d_{\tilde{G}}(x) \right) d_{\tilde{G}}(g) \\ &= \int_{\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}} d_{\tilde{G}}(g) \int_{\tilde{G}} d_{\tilde{G}}(x)f(gx^{-1})\psi(x)\vartheta_\varphi(gh) \\ &= \hat{\psi}_{\tilde{\pi},\tilde{\delta}}(\overline{\psi^*}) \cdot F_{f,\varphi}(h) = \hat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi) \cdot F_{f,\varphi}(h). \end{aligned}$$

ここで  $u \notin H_{\pi_\lambda}(\delta)$  ならば

$$\begin{aligned}\omega(\psi)\varphi &= U_\lambda(\pi_\lambda(\psi)u \otimes v) \\ &= U_\lambda(\pi_\lambda(\psi * e_\delta)u \otimes v) = 0\end{aligned}$$

だから, 任意の  $\psi \in C_c(\tilde{G}, \delta)^\circ$  に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi, \delta}(\psi) \cdot F_{f, \varphi} = F_{f, \omega(\psi)\varphi} = 0,$$

よって  $F_{f, \varphi} = 0$  となる. そこで

$$u \in H_{\pi_\lambda}(\delta) = \bigoplus_{i=1}^r V_\delta, \quad u = \sum_{i=1}^r u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

( $u_i \in V_\delta$ ) とおくと, 任意の  $\psi \in C_c(\tilde{G}, \delta)^\circ$  に対して  $A_\psi \in M_r(\mathbb{C})$  で

$$\pi_\lambda(\psi) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

なるものがとれて,  $\psi \mapsto A_\psi$  は  $C_c(\tilde{G}, \delta)^\circ$  から  $M_r(\mathbb{C})$  への全射  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像である.  $\varphi_i = U_\lambda(u_i \otimes v) \in \mathcal{S}(W')$  とおくと  $\varphi = \sum_{i=1}^r \varphi_i$  で

$$\begin{bmatrix} F_{f, \varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f, \varphi_r} \end{bmatrix} \neq 0$$

かつ, 任意の  $\psi \in C_c(\tilde{G}, \delta)^\circ$  に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi, \delta}(\psi) \begin{bmatrix} F_{f, \varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f, \varphi_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{f, \omega(\psi)\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f, \omega(\psi)\varphi_r} \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} F_{f, \varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f, \varphi_r} \end{bmatrix}$$

となる. よって  $r = 1$  となり, 従って任意の  $\psi \in C_c(\widehat{G}, \delta)^\circ$  に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi_\lambda, \delta}(\psi) = A_\psi = \widehat{\psi}_{\pi, \delta}(\psi)$$

となるから,  $\pi_\lambda = \pi$  を得る. 最後に任意の  $\psi \in C_c(\widehat{H}, \delta')^\circ$  に対して

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{H}} F_{f, \varphi}(hy)\psi(y)d_{\widehat{H}}(y) &= \int_{\widehat{\Gamma} \backslash \widehat{G}} d_{\widehat{G}}(g) \int_{\widehat{H}} d_{\widehat{H}}(y) f(g) \vartheta_\varphi(ghy) \\ &= \int_{\widehat{\Gamma} \backslash \widehat{G}} f(g) \vartheta_{\omega(\psi)\varphi}(gh) d_{\widehat{G}}(g) \\ &= \begin{cases} \widehat{\psi}_{\pi', \delta'}(\psi) \cdot F_{f, \varphi}(g) & : v \in H_{\pi'}(\delta'), \\ 0 & : v \notin H_{\pi'}(\delta') \end{cases}\end{aligned}$$

だから

$$\int_{\tilde{H}} F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\tilde{H}}(y) = \widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi) \cdot F_{f,\varphi}(h) \text{ for } \forall \psi \in C_c(\tilde{H}, \delta')^\circ$$

ならば  $v \in H_{\pi'}(\delta')$  となり, 逆も成り立つ. ■

よって  $F_{f,\varphi}$  が  $\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}$  上で二乗可積分ならば  $F_{f,\varphi} \in L^2(\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}, \rho_H; \pi', \delta')$  となる. ここで形式的には

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}} |f'(h)|^2 d_{\tilde{H}}(\dot{h}) \\ &= \int_{\tilde{\Gamma} \times \tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G} \times \tilde{G}} d_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\dot{g}, \dot{g}') f(g) \overline{f(g')} \int_{\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}} \vartheta_\psi(gh) \overline{\vartheta_\psi(g'h)} d_{\tilde{H}}(\dot{h}) \end{aligned}$$

であって

$$\vartheta_\psi(gh) \overline{\vartheta_\psi(g'h)} = \sum_{(l,l') \in L' \times L'} (\omega_\chi(gh)\psi)(l) \overline{(\omega_\chi(g'h)\psi)(l')}$$

を  $Sp(V \times V)$  の reductive dual pair  $(H \times H, G \times G)$  上の theta 級数を  $H \times H$  の対角部分群  $\Delta(H)$  に制限したものとみれば, 所謂 seesaw dual pair  $(\Delta(H), \mathcal{G})$  ができて, Siegel-Weil の公式が成り立てば

$$\int_{\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}} \vartheta_\psi(gh) \overline{\vartheta_\psi(g'h)} d_{\tilde{H}}(\dot{h}) = E_{\mathcal{G}}((g, g'), \lambda) : \mathcal{G} \text{ の Eisenstein 級数}$$

となる.

$$\begin{array}{ccc} H \times H & & \mathcal{G} \\ | & \times & | \\ \Delta(H) & & G \times G \end{array}$$

従って [5] にあるように (或いは広い意味での Rankin-Selberg の方法によって)

$$\int_{\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}} |f'(h)|^2 d_{\tilde{H}}(\dot{h}) = \int_{\tilde{\Gamma} \times \tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G} \times \tilde{G}} f(g) \overline{f(g')} E_{\mathcal{G}}((g, g'), \lambda) d_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\dot{g}, \dot{g}')$$

は  $f$  の  $L$ -関数の特殊値との関連が生ずるのであることが見て取れる.

**6.2**  $H_\pi \widehat{\otimes} H_{\pi'}$  から  $L^2(W')$  の  $\pi \otimes \pi'$ -成分へのユニタリ同値写像を  $U$  として, 任意の  $u \in H_\pi(\delta) = V_\delta$ ,  $v \in H_{\pi'}(\delta') = V_{\delta'}$  に対して  $U(u \otimes v) \in S(W')$  であると仮定する. このとき  $v \in V_{\delta'}$  に対して

$$\langle u, \Theta_v(s) \rangle = \vartheta_{U(u \otimes v)}(s) \quad \forall u \in V_\delta, s \in \widetilde{Sp}(V)$$

により  $\Theta_v : \widetilde{Sp}(V) \rightarrow V_\delta^*$  を定義すると

- 1) 任意の  $k \in \tilde{K}$  に対して  $\Theta_v(sk) = \check{\delta}(k)^{-1}\Theta_v(s)$ ,
- 2) 任意の  $k' \in \tilde{K}'$  に対して  $\Theta_v(sk') = \Theta_{\delta'(k')v}(s)$

である．実際，任意の  $u \in V_\delta$  に対して

$$\begin{aligned} \langle u, \Theta_v(sk) \rangle &= \vartheta_{U(u \otimes v)}(sk) = \vartheta_{U(\delta(k)u \otimes v)}(s) \\ &= \langle \delta(k)u, \Theta_v(s) \rangle = \langle u, \check{\delta}(k)^{-1}\Theta_v(s) \rangle, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \langle u, \Theta_v(sk') \rangle &= \vartheta_{U(u \otimes v)}(sk') = \vartheta_{U(u \otimes \delta'(k')v)}(s) \\ &= \langle u, \Theta_{\delta'(k')v}(s) \rangle. \end{aligned}$$

そこで  $f \in \mathcal{A}_\delta(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G, \pi)$  に対して

$$\langle v, F_f(h) \rangle = \int_{\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}} \langle f(g), \Theta_v(gh) \rangle d_{\tilde{G}}(g) \quad \forall v \in V_{\delta'}, h \in \tilde{H}$$

により  $F_f : \tilde{H} \rightarrow V_{\delta'}^*$  を定義する． $V_\delta$  の正規直交基底を  $\{u_1, \dots, u_d\}$  として  $f_i(g) = (f(g), u_i)$  ( $g \in \tilde{G}$ ) とおくと

$$f_i \in L^2(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G^{-1}; \tilde{\pi}, \check{\delta})$$

で，任意の  $v \in V_{\delta'}$  に対して

$$\langle v, F_f(h) \rangle = \sum_{i=1}^d F_{f_i, \varphi_i}(h) \quad (\varphi_i = U(u_i \otimes v) \in \mathcal{S}(W'))$$

となる．よって

- 1) 任意の  $\gamma' \in \tilde{\Gamma}'$  に対して  $F_f(\gamma'h) = \rho_H(\gamma')F_f(h)$ ,
- 2) 任意の  $k' \in \tilde{K}'$  に対して  $F_f(hk') = \check{\delta}'(k')^{-1}F_f(h)$ ,
- 3) 任意の  $\psi \in C_c(\tilde{H}, \check{\delta}')^\circ$  に対して

$$\int_{\tilde{H}} F_f(hy^{-1})\psi(y)d_{\tilde{H}}(y) = \hat{\psi}_{\tilde{\pi}', \check{\delta}'}(\psi) \cdot F_f(h)$$

となる．よって  $F_f$  が  $\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}$  上で二乗可積分ならば  $F_f \in \mathcal{A}_{\delta'}(\tilde{\Gamma}' \backslash \tilde{H}, \rho_H^{-1}, \tilde{\pi}')$  となる．

**6.3**  $G$  がコンパクト群の場合（即ち  $G = K$  の場合）を考えよう．従って  $\tilde{G}$  もコンパクト群であり， $\pi = \delta$  である． $\tilde{\Gamma} = \{1\}$  としよう．このとき  $L^2(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G^{-1}; \tilde{\pi}, \check{\delta})$  は  $\tilde{G}$  の右正則表現  $L^2(\tilde{G})$  の  $\check{\delta}$ -成分  $L^2(\tilde{G}; \check{\delta})$  に他ならず，ユニタリ同型

$$V_\delta \otimes_{\mathbb{C}} V_{\delta'}^* \xrightarrow{\sim} L^2(\tilde{G}; \check{\delta}) \quad (v \otimes \alpha \mapsto [x \mapsto (\dim \delta)^{1/2} \langle v, \check{\delta}(x)\alpha \rangle])$$

が成り立つ . 又  $f \in \mathcal{A}_\delta(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G, \pi)$  に対して  $f(x) = \delta(x)^{-1} f(1)$  ( $\forall k \in \tilde{K} = \tilde{G}$ ) だから , ユニタリ同型

$$\mathcal{A}_\delta(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G, \pi) \xrightarrow{\sim} V_\delta \quad (f \mapsto f(1))$$

が成り立つ . 少し計算してみると ,  $f \in \mathcal{A}_\delta(\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{G}, \rho_G, \pi)$  に対して

$$\langle v, F_f(h) \rangle = \langle f(1), \Theta_v(h) \rangle \quad \forall v \in V_\delta$$

であることが判る .

## 第 III 部

# Jacobi 形式

## 7 実素点での様子

7.1  $(V, D)$  を実斜交空間として , 3.2 節の記号を用いる . Jacobi 群  $Sp(V)_J$  は連結な実 Lie 群で , その Lie 環は  $\mathfrak{sp}(V)_J = \mathfrak{sp}(V) \times V \times \mathbb{R}$  に Lie 括弧積を

$$[(X, x, s), (Y, y, t)] = ([X, Y], xY - yX, D(x, y))$$

により定義したものであり , 指数写像  $\exp : \mathfrak{sp}(V)_J \rightarrow Sp(V)_J$  は

$$\exp(X, x, s) = (\exp X, x \cdot e(X), s + 2^{-1} D(x \cdot f(X), x))$$

である . ここで

$$e(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}, \quad f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+2)!}$$

である .  $\mathcal{I}_J = \mathcal{I} \times V$  とおく .  $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$  ( $h = (x, t) \in H(V)$ ) と  $Z = (I, v) \in \mathcal{I}_J$  に対して

$$g(I, (v, 0))g^{-1} = (\sigma I \sigma^{-1}, (v + xI - x)\sigma^{-1}, D(x - v - vI, xI))$$

に注意すると ,  $(g, Z) \mapsto g \cdot Z = (\sigma I \sigma^{-1}, (v + xI - x)\sigma^{-1})$  により  $Sp(V)_J$  は  $\mathcal{I}_J$  に作用する . この作用は推移的で ,  $(I, 0) \in \mathcal{I}_J$  の固定部分群は  $U(V_I, \langle \cdot, \cdot \rangle_I) \times Z(H(V))$  である . 以下 ,  $I_0 \in \mathcal{I}$  を固定して ,  $K = U(V_{I_0}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{I_0})$  とおく . このとき  $\mathfrak{p}_J^\pm = \mathfrak{p}^\pm \times W^\pm$  は  $\mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}})_J$  の可換 Lie 部分環であり ,  $K_J = K \times Z(H(V))$  及び  $K_{J, \mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}}))$  はそれぞれ  $Sp(V)_J$  及び  $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$  の閉部分群となり ,  $P_J^\pm = \exp \mathfrak{p}_J^\pm = P^\pm \times W^\pm$  は  $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$  の可換閉部分群である . 指数写像  $\exp(X, x, 0) = (\exp X, x, 0)$  は  $\mathfrak{p}_J^\pm$  から  $P_J^\pm$  への全単射である .

$P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^- = P^+ K_{\mathbb{C}} P^- \times H(V_{\mathbb{C}})$  は  $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$  の開部分集合で,  $(p, k, q) \mapsto pkq$  は  $P_J^+ \times K_{J,\mathbb{C}} \times P_J^-$  から  $P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^-$  への全単射となり

$$Sp(V)_J \subset P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^-, \quad K_J = Sp(V)_J \cap K_{J,\mathbb{C}} P_J^-$$

が成り立つ. そこで自然な単射

$$Sp(V)_J / K_J \rightarrow Sp(V)_J K_{J,\mathbb{C}} P_J^- / K_{J,\mathbb{C}} P_J^- \subset P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^- \rightarrow P_J^+ \xrightarrow{\log} \mathfrak{p}_J^+$$

による  $\mathcal{I}_J \xrightarrow{\sim} Sp(V)_J / K_J$  の  $\mathfrak{p}_J^+$  における像を  $\mathcal{D}_J$  とおくと

- 1)  $\mathcal{D}_J$  は  $\mathfrak{p}_J^+$  の開部分集合である,
- 2) 任意の  $g \in Sp(V)_J$  と  $Z \in \mathcal{D}_J \subset \mathfrak{p}_J^+$  に対して

$$g \exp Z = \exp(g(Z)) \cdot \mathbf{J}(g, Z) \cdot q$$

なる  $g(Z) \in \mathcal{D}_J$ ,  $\mathbf{J}(g, Z) \in K_{J,\mathbb{C}}$  及び  $q \in P_J^-$  が唯一存在する,

- 3)  $(g, Z) \mapsto g(Z)$  により  $Sp(V)_J$  は  $\mathcal{D}_J$  に推移的に作用する.

ここで  $\mathfrak{p}^+$  を  $\text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$  と同一視して,  $\mathcal{D}_J$  を  $\text{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \times W^+$  の部分集合として具体的に計算してみれば

- 1)  $\mathcal{D}_J = \mathcal{D} \times W^+$ ,
- 2)  $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$  ( $h = (x, s) \in H(V)$ ) と  $Z = (z, w) \in \mathcal{D}_J$  に対して

$$g(Z) = (\sigma(z), (w + x_- z + z_+) J(\sigma, z)^{-1}) \quad (x = (x_-, x_+) \in V_{\mathbb{C}} = W^- \times W^+),$$

又  $\mathbf{J}(g, Z) = (J(\sigma, z), 0, \eta) \in K_{J,\mathbb{C}}$  で

$$\begin{aligned} \eta = s + \frac{1}{2} D(x, (x_- z + x_+) J(\sigma, z)^{-1} \sigma) \\ + D(x, w J(\sigma, z)^{-1} \sigma) + \frac{1}{2} D(w, w J(\sigma, z)^{-1} \sigma) \end{aligned}$$

であることがわかる. ここで  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  をとり  $W^{-\rho} = W'_\mathbb{C}$ ,  $W^{+\rho} = W_\mathbb{C}$  なる  $\rho \in Sp(V_{\mathbb{C}})$  を一つ固定しておく.

$$\widehat{\mathfrak{p}}_J^\pm = \text{Ad}(\rho^{-1}) \mathfrak{p}_J^\pm, \quad \widehat{P}_J^\pm = \exp \widehat{\mathfrak{p}}_J^\pm = \widehat{P}^\pm \times W_{\mathbb{C}}$$

とおき  $\widehat{K}_{J,\mathbb{C}} = \rho^{-1} K_{J,\mathbb{C}} \rho = \widehat{K}_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}}))$  とおくと,  $\widehat{P}_J^+ \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \widehat{P}_J^-$  は  $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$  の開部分集合で,  $(p, k, q) \mapsto pkq$  は  $\widehat{P}_J^+ \times \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \times \widehat{P}_J^-$  から  $\widehat{P}_J^+ \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \widehat{P}_J^-$  への全単射となる. そこで  $\rho Sp(V)_J \subset P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^-$  に注意すると,  $Z \in \mathcal{D}_J \subset \mathfrak{p}_J^+$  に対して  $\rho \exp Z \in \exp \rho(Z) K_{J,\mathbb{C}} P_J^+$  なる  $\rho(Z) \in \mathfrak{p}_J^+$  をとり  $\widehat{Z} = \text{Ad}(\rho^{-1}) \rho(Z) \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+$  とおく.  $\mathfrak{p}^+ = \text{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_\mathbb{C}, W_{\mathbb{C}})$  と同一視すれば

$$\{\widehat{Z} \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+ \mid Z \in \mathcal{D}_J\} = \mathfrak{h}_V \times W_{\mathbb{C}}$$

となる. ここで  $g \in Sp(V)_J$  と  $Z \in \mathcal{D}_J$  に対して  $g(\widehat{Z}) = \widehat{g(Z)}$  により,  $Sp(V)_J$  は  $\mathfrak{h}_{V,J} = \mathfrak{h}_V \times W_{\mathbb{C}}$  に推移的に作用する. 具体的に計算すれば,

$g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$  ( $\sigma \in Sp(V), h = (x, s) \in H(V)$ ) と  $Z = (z, w) \in \mathfrak{h}_{V,J}$  ( $z \in \mathfrak{h}, w \in W_{\mathbb{C}}$ ) に対して

$$g(Z) = (\sigma(z), (w + x'z + x'')J(\sigma, z)^{-1}) \quad (x = (x', x'') \in V = W' \times W)$$

となる . 又 ,  $Z \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+$  とみると  $\exp Z \in Sp(V)_J \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \widehat{P}_J^-$  で ,

$$g \exp Z = \exp g(Z) \cdot \mathbf{J}(g, Z) \cdot q$$

なる  $\mathbf{J}(g, Z) \in \widehat{K}_{J,\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}_J^-$  が唯一存在する . 具体的には  $\mathbf{J}(g, Z) = (J(\sigma, z), \eta)$  で

$$\begin{aligned} \eta = s + \frac{1}{2}D(x, (x'z + x'')J(\sigma, z)^{-1}\sigma) \\ + D(x, wJ(\sigma, z)^{-1}\sigma) + \frac{1}{2}D(w, wJ(\sigma, z)^{-1}\sigma). \end{aligned}$$

である . 更に

$$\check{K}_{J,\mathbb{C}} = \bar{\rho}^{-1}K_{J,\mathbb{C}}\rho = \check{K}_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}})) \quad (\check{K}_{\mathbb{C}} = \bar{\rho}^{-1}K_{\mathbb{C}}\rho)$$

とおくと ,  $Z, Z' \in \mathfrak{h}_{V,J}$  に対して

$$\overline{\exp Z}^{-1} \exp Z' \in \widehat{P}^- K(Z', Z)^{-1} \widehat{P}^-$$

なる  $K(Z', Z) \in \check{K}_{J,\mathbb{C}}$  が存在する . 具体的には  $Z = (z, w), Z' = (z', w')$  ( $z, z' \in \mathfrak{h}_V, w, w' \in W_{\mathbb{C}}$ ) において  $K(Z', Z) = (K(z', z), \kappa)$  と書くと

$$K(z', z) = \begin{bmatrix} 0 & z' - \bar{z} \\ -(z' - \bar{z})^{-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1}, \quad \kappa = \frac{1}{2} \langle (w' - \bar{w})(z' - \bar{z})^{-1}, w' - \bar{w} \rangle$$

となる .

## 7.2

$$GSp(V) = \left\{ \sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \left| \begin{array}{l} D(x\sigma, y\sigma) = \nu(\sigma)D(x, y) \text{ for } \forall x, y \in V, \\ \nu(\sigma) \in \mathbb{R}^{\times} \end{array} \right. \right\}$$

は  $Sp(V)$  を正規部分群としてふくみ ,  $\sigma \in GSp(V)$  は  $X \in \mathfrak{sp}(V)$  に

$$\exp(t \cdot \text{Ad}(\sigma)X) = \sigma \exp(t \cdot X)\sigma^{-1} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

により作用する . 具体的には  $\text{Ad}(\sigma)X = \sigma X \sigma^{-1}$  である . 更に  $\sigma \in GSp(V)$  は  $h = (x, t) \in H(V)$  に  $h^{\sigma} = (x\sigma, \nu(\sigma)t)$  により  $H(V)$  の自己同型群として作用して , 半直積  $GSp(V)_J = GSp(V) \times H(V)$  は  $Sp(V)_J$  を正規部分群として含む . 特に  $\sigma \in GSp(V)$  と  $(X, x, s) \in \mathfrak{sp}(V)_J$  に対して

$$\exp(t \cdot \text{Ad}(\sigma)(X, x, s)) = \sigma \exp(t(X, x, s))\sigma^{-1} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

により  $GSp(V)$  の  $\mathfrak{sp}(V)_J$  への作用が定義される．具体的には

$$\text{Ad}(\sigma)(X, x, s) = (\sigma X \sigma^{-1}, x \sigma^{-1}, \nu(\sigma)^{-1} s)$$

である．ここで  $GSp^+(V) = \{\sigma \in GSp(V) \mid \nu(\sigma) > 0\}$  とおいて

$$\tau = \begin{bmatrix} \nu \cdot {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in GSp^+(V) \quad (0 < \nu = \nu(\tau) \in \mathbb{R}, d \in GL_{\mathbb{R}}(W))$$

とおく． $Z = (z, w) \in \mathfrak{h}_J$  に対して， $\mathfrak{h}_J \subset \widehat{\mathfrak{p}}_J^+ \subset \mathfrak{sp}_J(V_{\mathbb{C}})$  とみれば

$$Z = \left( \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (0, w), 0 \right) \in \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}}) \times V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$$

であるから

$$\text{Ad}(\tau)Z = (\nu \cdot {}^t d^{-1} z d^{-1}, w d^{-1}) \in \mathfrak{h}_{V,J}$$

である． $\text{Ad}(\tau)z = \nu \cdot {}^t d^{-1} z d^{-1} \in \mathfrak{h}_V$  とおく．一方  $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$  に対して

$$g \cdot \exp Z = \exp g(Z) \cdot \mathbf{J}(g, Z) \cdot q \quad (\mathbf{J}(g, Z) = (J(\sigma, z), \eta))$$

から

$$\begin{aligned} \tau g \tau^{-1} \exp(\text{Ad}(\tau)Z) &= \tau g \cdot \exp Z \tau^{-1} \\ &= \exp(\text{Ad}(\tau)g(Z)) \cdot \tau \mathbf{J}(g, Z) \tau^{-1} \cdot \tau q \tau^{-1}, \end{aligned}$$

従って  $(\tau g \tau^{-1})(\text{Ad}(\tau)Z) = \text{Ad}(\tau)(g(Z))$  で

$$\tau \mathbf{J}(g, Z) \tau^{-1} = (\tau J(\sigma, z) \tau^{-1}, \nu^{-1} \cdot \eta)$$

である．特に

$$J(\tau \sigma \tau^{-1}, z) = \tau J(\sigma, z) \tau^{-1}$$

であり，又  $\eta(\tau g \tau^{-1}; \text{Ad}(\tau)Z) = \eta(g; Z)^{\nu(\tau)^{-1}}$ ，即ち

$$\eta(\tau^{-1} g \tau; Z) = \eta(g; \text{Ad}(\tau)Z)^{\nu(\tau)} \quad (5)$$

となる<sup>12</sup>．

**7.3**  $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}}$  を  $D(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$  なる  $\mathbb{Z}$ -格子として， $\chi(0, t) = \mathbf{e}(t)$  なる群準同型写像  $\chi: H(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}^1$  に対して

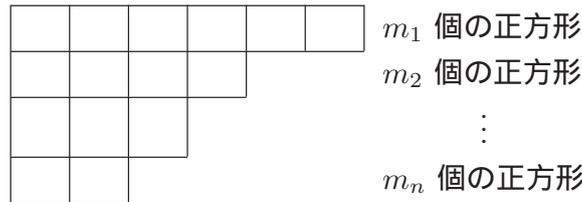
$$Sp(\Lambda; \chi) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi(h^\gamma) = \chi(h) \text{ for } \forall h \in H(\Lambda)\}$$

<sup>12</sup>ここで  $\eta(g; Z) = \mathbf{e}(\eta)$  ならば  $\eta(g; Z)^{\nu(\tau)} = \mathbf{e}(\nu(\tau) \cdot \eta)$  と定義する．

とおく．ここで  $\alpha(x) = \chi(x, 0)$  ( $x \in \Lambda$ ) は  $D$  に関する準指標となり， $x \mapsto \alpha(x)^2$  は群準同型写像となる．そこで  $\text{Ker } \alpha^2 \subset \Lambda$  は指数有限であると仮定すると，十分大きな  $0 < N \in \mathbb{Z}$  をとれば

$$Sp(\Lambda, N) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid x\gamma \equiv x \pmod{N \cdot \Lambda} \text{ for } \forall x \in \Lambda\} \subset Sp(\Lambda; \chi)$$

となる．そこで部分群  $Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma \subset Sp(\Lambda; \chi)$  をとり， $\Gamma_J = \Gamma \times H(\Lambda)$  において， $g = (\gamma, h) \in \Gamma_J$  に対して  $\chi_J(g) = \chi(h)$  とおく． $(\delta, V_\delta)$  を  $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の有限次元既約表現で Young 図形



に対応しているとして， $m_n > 0$  と仮定する．正則関数

$$F : \mathfrak{H}_{V,J} \rightarrow V_\delta \quad (\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}})$$

は任意の  $g = (\gamma, h) \in \Gamma_J$  に対して変換公式

$$F(g(Z)) = \chi_J(g)\eta(g; Z)^{-1}J_\delta(\gamma, z)F(Z) \quad (Z = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J})$$

を満たすとしよう．このとき  $\mathbb{Z}$ -格子  $L' \subset W'_{\mathbb{Q}}, L \subset W_{\mathbb{Q}}$  をとって

- a)  $L' \oplus L \subset \Lambda$  かつ任意の  $(u, v) \in L' \times L$  に対して  $\alpha(u+v) = e\left(\frac{1}{2}\langle u, v \rangle\right)$ ,
- b)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L) \right\}$ ，但し  $L^* = \{x \in W' \mid \langle x, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}$  とおき  $\text{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L) = \{b \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W) \mid L^*b \subset L\}$  とおく

を満たすようにできて

- 1) 任意の  $b \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$  に対して  $F(z + b, w) = F(z, w)$ ,
- 2) 任意の  $l' \in L', l \in L$  に対して

$$F(z, w + l'z + l) = J_{Q_z, \alpha}(l'z + l, w)F(z, w). \quad (6)$$

特に任意の  $l \in L$  に対して  $F(z, w + l) = F(z, w)$

となる．よって  $F$  の正則性から

$$F(z, w) = \sum_{T \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}^*(L^*, L)} \sum_{\lambda \in L^*} a(T, \lambda) e(\text{tr}(Tz) + \langle l, w \rangle)$$

なる Fourier 展開をもつ．ここで

$$\text{Sym}_{\mathbb{Z}}^*(L^*, L) = \{T \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W, W') \mid \text{tr}(Tb) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall b \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)\}$$

である．さて任意の  $h = ((a, b), t) \in H(V_{\mathbb{Q}})$  ( $a \in W'_{\mathbb{Q}}, b \in W_{\mathbb{Q}}$ ) に対して

$$\begin{aligned} F^h(z) &= \eta(h; z, 0)F(h(z), 0) \\ &= e\left(t + \frac{1}{2}\langle a, az + b \rangle\right) \cdot F(z, az + b) \quad (z \in \mathfrak{H}_V) \end{aligned}$$

とおく． $\sigma \in Sp(V)$  に対して

$$h\sigma h^{-1} = \sigma h^{\sigma} h^{-1} = ((a, b)(\sigma - 1), -\frac{1}{2}D((a, b)\sigma, (a, b)))$$

だから，十分大きな  $0 < N \in \mathbb{Z}$  をとれば，任意の  $\gamma \in Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma$  に対して  $h\gamma h^{-1} \in \Gamma_J = \Gamma \times H(\Lambda)$  となり

$$\begin{aligned} F^h(\gamma(z)) &= \eta(h; \gamma(z), 0)F(h\gamma h^{-1}h(z), 0) \\ &= \eta(h; \gamma(z), 0)\eta(h\gamma h^{-1}; h(z), 0)^{-1}J_{\delta}(\gamma, z)F(h(z), 0) \\ &= \eta(\gamma; z, 0)^{-1}\eta(h^{-1}; h(z), 0)^{-1}J_{\delta}(\gamma, z)F(h(z), 0) \\ &= J_{\delta}(\gamma, z)F^h(z) \end{aligned}$$

となる．一方， $F(z, w)$  の Fourier 展開から

$$\begin{aligned} F^h(z) &= \sum_{T, \lambda} a(T, \lambda) e\left(\text{tr}(Tz) + \langle \lambda, az + b \rangle + \frac{1}{2}\langle a, ax + b \rangle + t\right) \\ &= \sum_{T, \lambda} a(T, \lambda) e\left(\text{tr}\left(T - \frac{1}{2}{}^t\lambda\lambda + \frac{1}{2}(\lambda + a)(\lambda + a)\right)z + \langle \lambda, b \rangle\right) \\ &\quad \times e\left(\frac{1}{2}\langle a, b \rangle + t\right) \end{aligned}$$

となる．ここで  $a \in W'$  に対して  ${}^t a a \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W, W')$  を

$$\text{tr}({}^t a a)S = \langle a, aS \rangle \text{ for } \forall S \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$$

により定義する．よって次は同値である；

- 1)  $a(T, \lambda) \neq 0$  となるのは  $T - \frac{1}{2}{}^t\lambda\lambda \geq 0$  の場合に限る，
- 2) 任意の  $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$  と  $0 < y_0 \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$  に対して  $|F^h(z)|$  は  $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \text{Im } z \geq y_0\}$  で有界である．

$\mathbb{Z}$ -格子  $L', L$  が上の二条件 a), b) に加えて更に

$$\text{c) } L'^* = \{y \in W \mid \langle L', y \rangle \subset \mathbb{Z}\} \text{ において } L \subset 2L'^*$$

を満たすようにとる．(6) より  $z \in \mathfrak{H}_V$  を固定すると  $F(z, *) \in \mathcal{L}(Q_z, 1)$  となるから，定理 5.5.3 の基底を用いて

$$F(z, w) = \sum_{\dot{v} \in L^*/L} f_{\dot{v}}(z)\vartheta[v, 0](z, w)$$

とおく .  $f_{\dot{v}}(z)$  は  $z \in \mathfrak{H}_V$  の正則関数である . 任意の  $b \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$  をとると ,  $l \in L', v \in L^*$  に対して

$$\begin{aligned} \langle l+v, lb \rangle &= \langle l, (l+v)b \rangle \in \langle L', L^*b \rangle \subset \langle L', L \rangle \subset \langle L', 2L'^* \rangle \subset a\mathbb{Z}, \\ \langle l, vb \rangle &\in \langle L', L^*b \rangle \subset 2\mathbb{Z}, \\ \langle v, vb \rangle &\in \langle L^*, L^*b \rangle \subset \langle L^*, L \rangle \subset \mathbb{Z} \end{aligned}$$

より  $\langle l+v, (l+v)b \rangle \equiv \langle v, vb \rangle \pmod{2\mathbb{Z}}$  となるから

$$\vartheta[v, 0](z+b, w) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle v, vb \rangle\right) \cdot \vartheta[v, 0](z, w)$$

となる . よって  $F(z+b, w) = F(z, w)$  より

$$f_{\dot{v}}(z+b) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle v, vb \rangle\right) \cdot f_{\dot{v}}(z) \quad (v \in L^*)$$

となる . よって  $\tilde{f}_{\dot{v}}(z) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle v, vz \rangle\right) \cdot f_{\dot{v}}(z)$  とおくと , 任意の  $b \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$  に対して  $\tilde{f}_{\dot{v}}(z+b) = \tilde{f}_{\dot{v}}(z)$  となるから ,  $f_{\dot{v}}(z)$  の正則性から

$$\begin{aligned} f_{\dot{v}}(z) &= \sum_{T \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}^*(L^*, L)} a_v(T) \mathbf{e}\left(\text{tr}(Tz) - \frac{1}{2}\langle v, vz \rangle\right) \\ &= \sum_{T \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}^*(L^*, L)} a_v(T) \mathbf{e}\left(\text{tr}\left(T - \frac{1}{2}{}^t v v\right)z\right) \end{aligned}$$

を得る . よって

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \sum_{\dot{v} \in L^*/L'} f_{\dot{v}}(z) \vartheta[v, 0](z, w) \\ &= \sum_{\dot{v} \in L^*/L'} f_{\dot{v}}(z) \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l+v, (l+v)z \rangle + \langle l+v, w \rangle\right) \\ &= \sum_{\lambda \in L^*} f_{\dot{\lambda}}(z) \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda z \rangle + \langle \lambda, w \rangle\right) \\ &= \sum_{\lambda \in L^*} \sum_{T \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}^*(L^*, L)} a_{\lambda}(T) \mathbf{e}(\text{tr}(Tz) + \langle \lambda, w \rangle) \end{aligned}$$

となる . 即ち  $a(T, \lambda) = a_{\lambda}(T)$  ( $T \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}^*(L^*, L)$ ,  $\lambda \in L^*$ ) である . 以上を踏まえて Jacobi 形式と Jacobi 尖点形式を次のように定義する ;

**定義 7.3.1**  $V_{\delta}$  に値をとる  $\mathfrak{H}_{V, J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$  上の正則関数  $F$  が

1) 任意の  $g = (\gamma, h) \in \Gamma_J = \Gamma \times H(\Lambda)$  に対して変換公式

$$F(g(Z)) = \chi_J(g) \eta(g; Z)^{-1} J_{\delta}(\gamma, z) F(Z) \quad (Z = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V, J})$$

を満たし ,

2) 任意の  $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$  に対して

$$F^h(z) = \eta(h; (z, 0))F(h(z, 0)) \quad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

が 3.3 節の意味で重さ  $\delta$  の Siegel モジュラー形式となる

とき,  $F$  を  $\Gamma_J$  に関して指標  $\chi$  をもつ重さ  $\delta$  の Jacobi 形式と呼ぶ. 更に

3) 任意の  $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$  に対して  $F^h(z)$  ( $z \in \mathfrak{H}_V$ ) が 3.3 の意味で Siegel 尖点形式である

とき  $F$  を Jacobi 尖点形式と呼ぶ.

$\Gamma_J$  に関して指標  $\chi$  をもつ重さ  $\delta$  の Jacobi 形式全体は有限次元複素ベクトル空間をなす. Koecher の定理から,  $\dim_{\mathbb{R}} V > 2$  ならば, 上の定義の条件 2) は条件 1) から自動的に従う.  $\Gamma_J$  に関して指標  $\chi$  をもつ重さ  $\delta$  の Jacobi 尖点形式のなす複素ベクトル空間を  $S_{\delta}(\Gamma_J, \chi)$  と書く.  $F$  が Jacobi 尖点形式ならば

$$\int_{\Gamma_J \backslash \mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\text{Im } \widehat{0})^{-1} \text{Im } z) F(z, w), F(z, w))_{\delta} \kappa_z(w, w) d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w) < \infty$$

である ( $(\cdot, \cdot)_{\delta}$  は  $k \mapsto J_{\delta}(k, z_0)$  が  $K$  の既約ユニタリ表現となるように定めた  $V_{\delta}$  上の Hermite 内積). これにより  $S_{\delta}(\Gamma_J)$  に Hermite 内積が定義される. 逆に,  $m_n > n$  のとき, Jacobi 形式  $F$  に対して

$$\int_{\Gamma_J \backslash \mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\text{Im } \widehat{0})^{-1} \text{Im } z) F(z, w), F(z, w))_{\delta} \kappa_z(w, w) d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w) < \infty$$

ならば  $F$  は Jacobi 尖点形式となる.

**7.4**  $Sp(V)_V = Sp(V) \times H(V)$  は  $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$  に推移的に作用し,  $(z_0, 0) \in \mathfrak{H}_{V,J}$  の固定部分群は  $K \times Z(H(V))$  である. そこで  $K \times Z(H(V))$  の  $V_{\delta}$  上の既約ユニタリ表現  $(k, t) \mapsto J_{\delta}(k, z_0) \cdot e(-t)$  を  $\delta \otimes \bar{e}$  と書いて, 誘導表現  $\text{Ind}_{K \times Z(H(V))}^{Sp(V)_J}(\delta \otimes \bar{e})$  を  $\mathfrak{H}_{V,J}$  上の関数の空間に実現する. 即ち,

$$\int_{\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\text{Im } \widehat{0})^{-1} \text{Im } z) \varphi(z, w), \varphi(z, w))_{\delta} \kappa_z(w, w) d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z, w) < \infty$$

なる可測関数  $\varphi : \mathfrak{H}_{V,J} \rightarrow V_{\delta}$  全体  $E_{\delta \otimes \bar{e}}$  は

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\text{Im } \widehat{0})^{-1} \text{Im } z) \varphi(z, w), \psi(z, w))_{\delta} \kappa_z(w, w) d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z, w)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間である. 但し  $d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z, w) = d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w)$  は  $\mathfrak{H}_{V,J}$  上の  $Sp(V)_J$ -不変測度である. ここで

$$\mathbf{J}_{\delta \otimes \bar{e}}(g, Z) = J_{\delta}(\sigma, z) \eta(g; Z)^{-1} \quad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J, Z = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J})$$

とにおいて,  $E_{\delta \otimes \bar{e}}$  上の  $Sp(V)_J$  のユニタリ表現  $\pi_{\delta \otimes \bar{e}}$  が

$$(\pi_{\delta \otimes \bar{e}}(g)\varphi)(Z) = J_{\delta \otimes \bar{e}}(g^{-1}, Z)\varphi(g^{-1}(Z))$$

により定義すれば, 誘導表現  $\text{Ind}_{K \times Z(H(V))}^{Sp(V)_J}(\delta \otimes \bar{e})$  は  $(\pi_{\delta \otimes \bar{e}}, E_{\delta \otimes \bar{e}})$  とユニタリ同値である. ここで特に正則なる  $\varphi \in E_{\delta \otimes \bar{e}}$  のなす部分空間  $H_{\delta \otimes \bar{e}}$  は,  $E_{\delta \otimes \bar{e}}$  の  $Sp(V)_J$ -不変な閉部分空間で,  $H_{\delta \otimes \bar{e}}$  の  $Sp(V)_J$ -不変な閉部分空間は自明なものに限る.

さて  $Sp(V)_J$  のユニタリ表現  $(\pi_{\delta \otimes \bar{e}}, H_{\delta \otimes \bar{e}})$  を  $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V) \times H(V)$  のユニタリ表現とみれば, 5.4 節で定義した  $\widetilde{Sp}(V)$  の正則離散系列表現と  $\widetilde{Sp}(V)_J$  の既約ユニタリ表現  $\omega_{\chi, J}$  との関係が見えてくる. 即ち  $\varphi \in H_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$  と  $\psi \in \mathcal{H}_{z_0}$  に対して  $\mathfrak{H}_{V, J}$  上の関数  $\varphi \boxtimes \psi$  を

$$(\varphi \boxtimes \psi)(z, w) = \det(\text{Im } z)^{-1/4} \varphi(z) \cdot (U_{z, z_0} \psi)(w) \quad (z \in \mathfrak{H}_V, w \in W_{\mathbb{C}})$$

により定義すると,  $\varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \boxtimes \psi$  は  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現のユニタリ同値

$$(\pi_{\delta \otimes \det^{-1/2}}, H_{\delta \otimes \det^{-1/2}}) \widehat{\otimes} (\check{\omega}_{\chi, J}, \mathcal{H}_{z_0}) \xrightarrow{\sim} (\pi_{\delta \otimes \bar{e}}, H_{\delta \otimes \bar{e}}) \quad (7)$$

を与える. ここで  $\pi_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$  は自然な射影  $\widetilde{Sp}(V)_J \rightarrow \widetilde{Sp}(V)$  により  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現とみなしている. よって特に  $H_{\delta \otimes \bar{e}} \neq \{0\}$  となる必要十分条件は  $m_n > n$  なることであり, このとき  $(\pi_{\delta \otimes \bar{e}}, H_{\delta \otimes \bar{e}})$  は  $\widetilde{Sp}(V)_J$  の既約ユニタリ表現となる.

さて Jacobi 尖点形式  $F \in S_{\delta}(\Gamma_J, \chi)$  に対して  $Sp(V)_J$  上の関数  $f_F$  を

$$f_F(g) = \mathbf{J}_{\delta \otimes \bar{e}}(g; (z_0, 0))^{-1} F(g(z_0, 0)) \quad (g \in Sp(V)_J)$$

により定義すると

- 1) 任意の  $g' \in \Gamma_J$  に対して  $f_F(g'g) = \chi_J(g') f_F(g)$ ,
- 2) 任意の  $k \in K$  に対して  $f_F(gk) = \delta(k)^{-1} f_F(g)$ ,
- 3) 
$$\int_{\Gamma_J \backslash Sp(V)_J} |f_F(g)|^2 d(g) = \int_{\Gamma_J \backslash \mathfrak{H}_{V, J}} (\delta((\text{Im } \hat{0})^{-1} \text{Im } z) F(z, w), F(z, w))_{\delta} \kappa_z(w, w) d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w) < \infty$$

である. より正確には次の定理が成り立つ;

**定理 7.4.1**  $F \mapsto f_F$  は複素線形同型写像

$$S_{\delta}(\Gamma_J, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\delta}(\Gamma_J \backslash Sp(V)_J, \chi_J^{-1}, \pi_{\delta \otimes \bar{e}})$$

を与える. 従って  $F \in S_{\delta}(\Gamma_J, \chi)$  と  $\alpha \in V_{\delta}^*$  に対して

$$\theta_{F \otimes \alpha}(g) = (\dim \delta)^{1/2} \langle \alpha, f_F(g) \rangle \quad (g \in Sp(V)_J)$$

とおくと,  $F \otimes \alpha \mapsto \theta_{F \otimes \alpha}$  は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$S_\delta(\Gamma_J, \chi) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \xrightarrow{\sim} L^2(\Gamma_J \backslash Sp(V)_J; \chi_J; \tilde{\pi}_{\delta \otimes \bar{\epsilon}}, \check{\delta})$$

に延長される.

7.5 実斜交空間  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  をとり,  $\mathbb{Z}$ -格子  $L' \subset W', L \subset W$  は

$$L' = \{x \in W' \mid \langle x, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

なるものとして  $\Lambda = L' \oplus L$  とおく.  $H(\Lambda)$  のユニタリ指標

$$\chi_\Lambda : H(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}^1 \quad ((x, y), t) \mapsto e\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle\right)$$

に対して

$$Sp_0(\Lambda) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi_\Lambda(h^\gamma) = \chi_\Lambda(h) \text{ for } \forall h \in H(\Lambda)\}$$

は  $Sp(\Lambda)$  の部分群で, 十分大きな  $0 < N \in \mathbb{Z}$  をとれば  $Sp(\Lambda, N) \subset Sp_0(\Lambda)$  であるから,  $Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma \subset Sp_0(\Lambda)$  なる部分群  $\Gamma$  をとる.  $\Gamma_J = \Gamma \times H(\Lambda)$  のユニタリ指標

$$\chi_{\Lambda, J} : \Gamma_J \rightarrow \mathbb{C}^1 \quad ((\gamma, h) \mapsto \chi_\Lambda(h))$$

からの誘導表現  $\pi^{\chi_{\Lambda, J}} = \text{Ind}_{\Gamma_J}^{Sp(V)_J} \chi_{\Lambda, J}$  を考える.  $Sp(V)$  の二重被覆群

$$\varpi : \widetilde{Sp}(V) = \widetilde{Sp}(V; z_0) \rightarrow Sp(V)$$

に対して  $\tilde{\Gamma} - \varpi^{-1}(\Gamma) \subset \widetilde{Sp}(V)$  とおく.  $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V) \times H(V)$  とおき, 自然な射影  $\varpi_J : \widetilde{Sp}(V)_J \rightarrow Sp(V)_J$  を通して  $\tilde{\pi}^{\chi_{\Lambda, J}} = \pi^{\chi_{\Lambda, J}} \circ \varpi_J$  を  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現とみれば

$$\tilde{\pi}^{\chi_{\Lambda, J}} = \text{Ind}_{\tilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J} \tilde{\chi}_{\Lambda, J} \quad (\tilde{\Gamma}_J = \tilde{\Gamma} \times H(\Lambda), \tilde{\chi}_{\Lambda, J} = \chi_{\Lambda, J} \circ \varpi_J)$$

である.  $\tilde{\pi}^{\chi_{\Lambda, J}}$  に定理 4.5.1 を適用しよう. 実際,  $\widetilde{Sp}(V)$  の Weil 表現を  $\text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$  上に実現しておこう. このとき  $\varphi \in \text{Ind}_{\tilde{\Gamma}}^{\widetilde{Sp}(V)} \rho_\Lambda^{-1}$  と  $\psi \in \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$  に対して

$$(\varphi \boxtimes \psi)(\tilde{g}) = \varphi(\tilde{\sigma})(\omega_J(\tilde{g})\psi)(1) \quad (\tilde{g} = (\tilde{\sigma}, h) \in \widetilde{Sp}(V)_J)$$

とおくと,  $(\tilde{\gamma}, h') \in \tilde{\Gamma}_J$  に対して

$$\begin{aligned} (\varphi \boxtimes \psi)((\tilde{\gamma}, h')\tilde{g}) &= \varphi(\tilde{\gamma}\tilde{\sigma})(\omega_J(\tilde{\gamma}, h') \circ \omega_J(\tilde{g})\psi)(1) \\ &= \rho_\Lambda(\tilde{\gamma})^{-1} \varphi(\tilde{\sigma})(\rho_\Lambda(\tilde{\gamma})\mathbf{r}(\tilde{\gamma}) \circ \Pi(h') \circ \omega_J(\tilde{g})\psi)(1) \\ &= \varphi(\tilde{\sigma})(\omega_J(\tilde{g})\psi)(h') = \chi_\Lambda(h') \varphi(\tilde{\sigma})(\omega_J(\tilde{g})\psi)(1) \\ &= \tilde{\chi}_{\Lambda, J}(\tilde{\gamma}, h')(\varphi \boxtimes \psi)(\tilde{g}) \end{aligned}$$

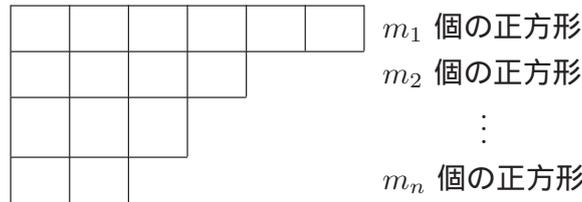
となるから  $\varphi \boxtimes \psi \in \text{Ind}_{\tilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J} \tilde{\chi}_{\Lambda, J}$  となる. 更に正確には

命題 7.5.1  $\varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \boxtimes \psi$  は  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現のユニタリ同値写像

$$(\text{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{Sp}(V)} \rho_{\Lambda}^{-1})_J \otimes \omega_J \xrightarrow{\sim} \text{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J} \widetilde{\chi}_{\Lambda, J}$$

に延長される .

さて  $GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の有限次元既約表現  $(\delta, V_{\delta})$  は Young 図形



に対応しているとして,  $m_n > n$  とする . このとき  $\widetilde{Sp}(V)_J$  のユニタリ表現のユニタリ同値(7) から反傾表現のユニタリ同値

$$\widetilde{\pi}_{\delta \otimes \det^{-1/2}} \otimes \omega_J \xrightarrow{\sim} \widetilde{\pi}_{\delta \otimes \bar{e}}$$

を得る . ここで  $\widetilde{\pi}_{\delta \otimes \bar{e}}$  の最小の  $\widetilde{K}$ -タイプ  $\check{\delta}$  は  $\widetilde{\pi}_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$  の最小の  $\widetilde{K}$ -タイプ  $\check{\delta} \otimes \det^{1/2}$  と  $\omega_J$  の最小の  $\widetilde{K}$ -タイプ  $\det^{-1/2}$  のテンソル積に対応する . ところで 5.3 節で見たように  $\psi \in \text{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_{\Lambda}$  を  $\det^{-1/2}$ -ベクトルとすると

$$(\omega_J(\tilde{g})\psi)(1) = \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\text{Im}\sigma(z_0))^{1/4} \vartheta(g(z_0, 0)),$$

$(\tilde{g} = (\tilde{\sigma}, h) \in \widetilde{Sp}(V)_J)$  である . 但し

$$\vartheta(z, w) = \sum_{l \in L'} e \left( \frac{1}{2} \langle l, lz \rangle + \langle l, w \rangle \right) \quad ((z, w) \in \mathfrak{H}_{V, J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}})$$

である . さて Jacobi 尖点形式  $F \in S_{\delta}(\Gamma_J, \chi_{\Lambda})$  と  $\alpha \in V_{\delta}^*$  に対して  $\theta_{F \otimes \alpha} \in \text{Ind}_{\Gamma_J}^{Sp(V)_J} \chi_J$  をみれば

$$\theta_{F \otimes \alpha}(g) = \theta_{f \otimes \alpha}(\tilde{\sigma}) \cdot (\omega_J(\tilde{g})\psi)(1) \quad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J)$$

なる  $f \in S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma}, \rho_{\Lambda}^{-1})$  が定まる . 即ち

$$\begin{aligned} & \eta(g; z_0, 0) J_{\delta}(\sigma, z_0)^{-1} F(g(z_0, 0)) \\ &= J_{1/2}(\tilde{\sigma}, z_0) J_{\delta}(\sigma, z_0)^{-1} f(\sigma(z_0)) \times \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\text{Im}\sigma(z_0))^{1/4} \vartheta(g(z_0, 0)) \end{aligned}$$

$(\tilde{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \widetilde{Sp}(V))$  , よって

$$F(z, w) = \det(2\text{Im} z_0)^{1/4} f(z) \vartheta(z, w) \quad ((z, w) \in \mathfrak{H}_{V, J})$$

である . よって定理 5.5.3 から次の定理を得る ;

定理 7.5.2  $m_n > n$  のとき, Jacobi 尖点形式  $F \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$  に対して

$$f(z) = \det(2\text{Im } z_0)^{-1/4} \det(2\text{Im } z)^{1/2} \\ \times \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} F(z, w) \overline{\vartheta(z, w)} \kappa_z(w, w) d_z(w) \quad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおくと,  $F \mapsto f$  は  $S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$  から  $S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\tilde{\Gamma}, \rho_\Lambda)$  への複素線形同型写像である.

7.6  $V = \mathbb{R}^{2n}$  上の交代形式を  $D(x, y) = x J_n {}^t y$  ( $J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$ ) により定義し, 実斜交空間  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  を

$$W' = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}$$

により定める.  $(x, 0) = x, (0, y) = y$  によりそれぞれ  $W' = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^n$  と同一視する.  $W', W$  の  $\mathbb{Z}$ -格子を

$$L' = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}^n\}, \quad L = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z}^n\}$$

として  $\Lambda = L' \oplus L$  とおく.  $f \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$  に対して

$$f'(z) = f(z/2) = f(\text{Ad}(\tau^{-1})z) \quad \left(\tau = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GSp(V)\right)$$

とおくと  $f' \in S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$  である. ここで

$$\Gamma = \tau \Gamma_0(4) \tau^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(\Lambda) \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

は  $Sp_0(\Lambda)$  の部分群であり,  $GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$  の既約表現  $\delta = \det^k$  をとる. 一方,  $F \in J_{k,1}^{\text{cusp}}$  に対して

$$F'(z, w) = F(2z, w) = F(\text{Ad}(\tau)(z, w))$$

とおくと, 任意の

$$g = (\gamma, h) \in \tau^{-1} Sp(\Lambda)_J \tau = \tau^{-1} Sp(\Lambda) \tau \times H(\Lambda \tau)$$

に対して

$$F'(g(z, w)) = \chi_\Lambda(h) \eta(g; z, w)^{-1} \det J(\gamma, z)^k F'(z, w)$$

となる. 更に

$$F''(z, w) = \sum_{h \in H(\Lambda \tau) \setminus H(\Lambda)} \chi_\Lambda(h)^{-1} \eta(h; z, w) F'(h(z, w))$$

とおくと  $F'' \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$  となるから, 定理 7.5.2 に従って  $F''$  に対応する  $S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$  の元を求めよう. ここで, 定理 5.5.3 から,  $r, s \in L'$  に対して

$$\begin{aligned} & \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda'_z} \theta_r(2z, w) \overline{\theta_s(2z, w)} \kappa_z(w, w) d_z(w) \\ &= \begin{cases} 2^n \det(2\text{Im } z)^{-1/2} & r \equiv s \pmod{2L'} \\ 0 & r \not\equiv s \pmod{2L'} \end{cases} \end{aligned}$$

( $\Lambda'_z = \{xz + y \mid x \in 2L', y \in L\}$ ) であることと

$$\vartheta(z, w) = \sum_{r \in L'/2L'} \theta_r(2z, w)$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} & \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} F''(z, w) \overline{\vartheta(z, w)} \kappa_z(w, w) d_z(w) \\ &= \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} \sum_{\lambda \in \Lambda_z/\Lambda'_z} F'(z, w + \lambda) \overline{\vartheta(z, w + \lambda)} \kappa_z(w + \lambda, w + \lambda) d_z(w) \\ &= \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda'_z} F'(z, w) \overline{\vartheta(z, w)} \kappa_z(w, w) d_z(w) \\ &= 2^n \det(2\text{Im } z)^{-1/2} \sum_{r \in L'/2L'} f_r(2z) \end{aligned}$$

となる. よって  $F'' \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$  には

$$\sum_{r \in L'/2L'} f_r(2z) \in S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$$

が対応する. 即ち  $\sum_{r \in L'/2L'} f_r(4z) \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$  が対応する.

## 8 有元素点での様子

8.1 局所コンパクト群上の帯球関数の一般論を復習しておく. 詳細は Tamagawa [18], Gaal [4] 等を参照のこと. 2.1 節の設定を思い出そう. 即ち,  $G$  は局所コンパクト・ユニモジュラー群で,  $K$  はそのコンパクト部分群,  $A$  は  $G$  の中心  $Z(G)$  の閉部分群として,  $\chi$  を  $A$  の連続なユニタリ指標とする.  $K$  の自明な一次元ユニタリ表現を  $1_K$  と書いて, 簡単のために  $\mathcal{H} = C_c(G/A, \chi; 1_K)$  とおく. 即ち,  $\mathcal{H}$  は  $G$  上の複素数値連続関数  $\varphi$  であって

- 1) 任意の  $a \in A$  に対して  $\varphi(ax) = \chi(a)^{-1} \varphi(x)$ ,
- 2)  $G/A$  上の関数  $\dot{x} \mapsto |\varphi(x)|$  の台はコンパクト,
- 3) 任意の  $k, k' \in K$  に対して  $\varphi(kxk') = \varphi(x)$

なるもののなす複素ベクトル空間を,  $G/A$  上の畳込み積

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{G/A} \varphi(xy)\psi(y^{-1})d_{G/A}(\dot{y})$$

により  $\mathbb{C}$ -代数としたものである. さて  $\theta$  を  $G$  上の複素数値連続関数として, 任意の  $a \in A$  に対して  $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$  であるとすると, 任意の  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対して

$$\widehat{\theta}(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(x)\theta(x)d_{G/A}(\dot{x}), \quad \check{\theta}(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(x)\theta(x^{-1})d_{G/A}(\dot{x})$$

が定義される. そこで  $G$  上の帯球関数を次のように定義する;

**定義 8.1.1**  $G$  上の複素数値連続関数  $\theta$  が

- 1) 任意の  $a \in A$  に対して  $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$ ,
- 2) 任意の  $k \in K$  に対して  $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$ ,
- 3)  $\widehat{\theta}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  は全射  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像

を満たすとき,  $\theta$  を中心指標  $\chi$  をもつ  $K$  に関する  $G$  上の帯球関数と呼ぶ.

上のような帯球関数の全体を  $\Theta(G/A, \chi, K)$  と書こう. 帯球関数の基本的な性質として

**命題 8.1.2**  $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$  に対して

- 1) 任意の  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対して  $\varphi * \theta = \theta * \varphi = \check{\theta}(\varphi) \cdot \theta$ ,
- 2)  $\theta$  は両側  $K$ -不変で  $\theta(1) = 1$ ,
- 3)  $\int_K \theta(xky)d_K(k) = \theta(x)\theta(y)$ .

逆にこれらの性質により帯球関数が特徴付けられる;

**定理 8.1.3**  $G$  上の複素数値可側関数  $\theta$  で, 任意の  $a \in A$  に対して  $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$  であり,  $G/A$  上の関数  $\dot{x} \mapsto |\theta(x)|$  が  $G/A$  上局所可積分であるとき, 次は同値である;

- 1)  $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$ ,
- 2)  $\theta$  は両側  $K$ -不変で  $\theta(1) = 1$  かつ, 任意の  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対して  $\varphi * \theta = \lambda_\varphi \cdot \theta$  ( $\lambda_\varphi \in \mathbb{C}$ ),
- 3)  $\theta \neq 0$  かつ  $\int_K \theta(xky)d_K(k) = \theta(x)\theta(y)$ ,
- 4) 任意の  $k \in K$  に対して  $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$  であって,  $\widehat{\theta}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  は全射  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像.

$\mathcal{H}$  に特殊な移送を導入しよう. コンパクト部分集合  $M \subset G/A$  をとり,  $\text{supp}[\dot{x} \mapsto |\varphi(x)|] \subset M$  なる  $\varphi \in \mathcal{H}$  の全体を  $\mathcal{H}_M$  と書くと,  $\mathcal{H}_M$  は  $|\varphi| =$

$\sup_{x \in G/A} |\varphi(x)|$  をノルムとする複素 Banach 空間となる． $\mathcal{H} = \bigcup_M \mathcal{H}_M$  だから，部分集合  $V \subset \mathcal{H}$  が  $\mathcal{H}$  における開集合であることを，任意のコンパクト部分集合  $M \subset G/A$  に対して  $V \cap \mathcal{H}_M$  が  $\mathcal{H}_M$  における開部分集合なることと定義する．すると任意の  $0 < r \in \mathbb{R}$  に対して， $\{\varphi \in \mathcal{H} \mid |\varphi| < r\}$  は  $\mathcal{H}$  の開部分集合となるから， $\mathcal{H}$  は局所凸 Hausdorff 空間となる．このとき

定理 8.1.4 1)  $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$  に対して， $\mathbb{C}$ -代数準同型写像  $\hat{\theta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  は連続である，  
2) 連続な全射  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して， $\hat{\theta} = \lambda$  なる  $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$  が唯一存在する．

保型形式の Hecke 作用素との関連で考えるときには， $K$  が  $G$  の開コンパクト部分群である場合が重要である．この場合には

命題 8.1.5  $K$  が  $G$  の開コンパクト部分群ならば， $\mathcal{H}$  から  $\mathbb{C}$  への全射  $\mathbb{C}$ -代数準同型写像は全て連続である．

従ってこの場合， $\theta \mapsto \hat{\theta}$  は  $\Theta(G/A, \chi, K)$  から  $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$  への全単射を与える．

8.2  $p \neq 2$  を有限素点として，加法群  $\mathbb{Q}_p$  の非自明なユニタリ指標を  $\chi = e_p$  とする．ここで

$$e_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ni t \mapsto e^{-2\pi\sqrt{-1}t} \in \mathbb{C}^1$$

である． $\mathbb{Q}_p$ -斜交空間  $(V, D)$  の偏極  $V = W' \oplus W$  を一つ固定しておく． $\mathbb{Z}_p$ -格子  $L \subset W$  をとり

$$L' = \{x \in W' \mid \langle x, L \rangle \subset \mathbb{Z}_p\} \quad (\langle x, y \rangle = D(x, y) \text{ for } x \in W', y \in W)$$

とおいて  $\mathbb{Z}_p$ -格子  $\Lambda = L' \oplus L \subset V$  を定める． $p \neq 2$  だから  $H[\Lambda] = \Lambda \times \mathbb{Z}_p$  は  $H(V)$  の開コンパクト部分群である．

$$K = \{\sigma \in Sp(V) \mid \Lambda\sigma = \Lambda\}$$

は  $Sp(V)$  の開コンパクト部分群であり， $H[\Lambda]$  に  $(x, t)^\sigma = (x\sigma, t)$  により作用して，半直積  $K_J = K \times H[\Lambda]$  は  $Sp(V)_J$  の開コンパクト部分群となる． $K_J$  の自明な 1 次元表現を  $\mathbf{1}_{K_J}$  とし，8.1 節の一般論に従って

$$\mathcal{H}_J = C_c(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi; \mathbf{1}_{K_J})$$

とおく．即ち， $\mathcal{H}_J$  は， $Sp(V)_J$  上の複素数値連続関数  $\varphi$  であって

$$1) \text{ 任意の } a \in Z(H(V)) = \mathbb{Q}_p \text{ に対して } \varphi(ag) = \chi(a)^{-1}\varphi(g),$$

- 2) 任意の  $k, k' \in K_J$  に対して  $\varphi(kgk') = \varphi(g)$ ,  
 3)  $Sp(V)_J/Z(H(V))$  上の連続関数  $\dot{g} \mapsto |\varphi(g)|$  の台はコンパクト

なるもの全体のなす複素ベクトル空間を畳込み積

$$(\varphi * \psi)(g) = \int_{Sp(V)_J/Z(H(V))} \varphi(gx^{-1})\psi(x)d_{Sp(V)_J/Z(H(V))}(\dot{g})$$

により  $\mathbb{C}$ -代数としたものである. ここで  $L$  の  $\mathbb{Z}_p$ -基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を一つ固定して  $v'_i \in L'$  を  $\langle v'_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  により定める. このとき  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$  に対して

$$p^\alpha \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W') \text{ s.t. } p^\alpha v'_i = p^{\alpha_i} v'_i, \quad p^\alpha \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W) \text{ s.t. } p^\alpha v_i = p^{\alpha_i} v_i$$

とおくと  ${}^t p^\alpha = p^\alpha$  となる. そこで  $d(p^\alpha) = \begin{bmatrix} p^\alpha & 0 \\ 0 & p^{-\alpha} \end{bmatrix} \in Sp(V)$  とおくと

$$Sp(V) = \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} Kd(p^\alpha)K \quad (\Upsilon = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0\})$$

である. 更に, 任意の  $\varphi \in \mathcal{H}_J$  に対して

$$\text{supp} \varphi \subset \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} K_J d(p^\alpha) K_J Z(H(V))$$

であることが示される. そこで任意の  $\alpha \in \Upsilon$  に対して,  $Sp(V)_J$  の開コンパクト部分集合  $K_J d(p^\alpha) K_J$  の特性関数を  $\varphi_\alpha$  とすると,  $\varphi_\alpha \in C_c(Sp(V)_J; \mathbf{1}_{K_J})^\circ$  だから, 7 頁の方法に従って  $\varphi_{\alpha, \chi} \in \mathcal{H}_J$  とおくと,  $\{\varphi_{\alpha, \chi}\}_{\alpha \in \Upsilon}$  が  $\mathcal{H}_J$  の  $\mathbb{C}$ -上の基底となる. ここで  $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix} \in GSp(n, \mathbb{Q}_p) = GSp(V)$  とおくと,  $g \mapsto g' = \varepsilon g^{-1} \varepsilon^{-1}$  が  $Sp(V)_J$  の反自己同型写像で  $\varphi_{\alpha, \chi}(g') = \varphi_{\alpha, \chi}(g)$  ( $\alpha \in \Upsilon$ ) となるから,  $\mathcal{H}_J$  は可換代数であることがわかる. 更に Murase [13] により  $\mathcal{H}_J$  の構造は詳しく調べられていて, 我々に必要な部分を書けば

命題 8.2.1  $\mathcal{H}_J$  は  $\mathbb{C}$  上有限生成な可換整域である.

8.3  $p \neq 2$  から  $k \in K$  に対して  $\mathbf{r}'_\chi(k) = (k, \mathbf{r}_\chi(k)) \in \widetilde{Sp}(V)$  であることが示される. そこで  $\widetilde{K} = \mathbf{r}'_\chi(K)$  とおくと, これは  $\widetilde{Sp}(V)$  の開コンパクト部分群である.  $p^\alpha \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$  ( $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ) に対して, (3) に従って  $\widetilde{d}(p^\alpha) \in \widetilde{Sp}(V)$  を定めれば

$$\widetilde{Sp}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} \widetilde{K} \widetilde{d}(p^\alpha) \widetilde{K} \text{Ker}(\varpi_\chi)$$

となる. そこで  $\alpha \in \Upsilon$  に対して,  $\widetilde{Sp}(V)$  のコンパクト開部分集合  $\widetilde{K} \widetilde{d}(p^\alpha) \widetilde{K}$  の特性関数を  $\psi_\alpha$  とおくと,  $\psi_\alpha \in C_c(\widetilde{Sp}(V); \mathbf{1}_{\widetilde{K}})^\circ$  だから, 7 頁の方式に従って  $\psi_{\alpha, \nu} \in \mathcal{H} = C_c(\widetilde{Sp}(V)/\text{Ker}(\varpi_\chi), \nu; \mathbf{1}_{\widetilde{K}})^\circ$  を定義する. ここで  $\nu$  は

$\text{Ker}(\varpi_\chi)$  の唯一の非自明なユニタリ指標である。  $\{\psi_{\alpha,\nu}\}_{\alpha \in \Upsilon}$  は  $\mathcal{H}$  の  $\mathbb{C}$  上の基底である。

さて  $(\omega_J, L^2(W'))$  は  $\widetilde{Sp}(V)_J$  に既約ユニタリ表現で,  $\widetilde{K}$ -不変ベクトルは  $L'$  の特性関数  $\varphi_{L'}$  の定数倍に限るから, 付随する  $\widetilde{Sp}(V)_J$  の帯球関数を  $\Phi(g) = (\omega_J(g)\varphi_{L'}, \varphi_{L'})$  ( $g \in \widetilde{Sp}(V)_J$ ) とおくと

- 1)  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  に対して  $\Phi(\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)) = (p^{1/2} \cdot \eta_p)^{-|\alpha|}$ , 但し  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$  及び  $\eta_p = \gamma_\chi(Q_1)\gamma_\chi(-p \cdot Q_1)$  とおく,
- 2)  $\text{supp}(\Phi) = \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} \widetilde{K}_J \widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha) \widetilde{K}_J \cdot (\text{Ker}(\varpi_\chi) \times Z(H(V)))$

である。次の命題は Shintani [17] による;

**命題 8.3.1**  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対して

$$\varphi_J(\sigma, h) = \varphi(\tilde{\sigma}) \cdot \overline{\Phi(\tilde{\sigma}, h)} \quad ((\sigma, h) \in Sp(V)_J, \tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V) \text{ s.t. } \varphi_\chi(\tilde{\sigma}) = \sigma)$$

とおくと,  $\varphi \mapsto \varphi_J$  は  $\mathcal{H}$  から  $\mathcal{H}_J$  への  $\mathbb{C}$ -代数の同型写像を与える。

**8.4** 二重被覆群  $\widetilde{Sp}(V)$  と Jacobi 群  $Sp(V)_J$  上の帯球関数の関係を考えよう。まず

**命題 8.4.1**  $\theta \in \Theta(\widetilde{Sp}(V)/\text{Ker}(\varpi_\chi), \nu, \widetilde{K})$  に対して,  $Sp(V)_J$  上の連続関数  $\theta_J$  を

$$\theta_J(\sigma, h) = \theta(\tilde{\sigma})\Phi(\tilde{\sigma}, h) \quad (\varpi(\tilde{\sigma}) = \sigma)$$

により定義すると,  $\theta_J \in \Theta(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$  である。

そこで  $\mathcal{H}_J$  と  $\mathcal{H}$  の  $\mathbb{C}$ -基底  $\{\varphi_{\alpha,\chi}\}_{\alpha \in \Upsilon}$  と  $\{\psi_{\alpha,\nu}\}_{\alpha \in \Upsilon}$  を用いて, 複素線形同型写像  $T: \mathcal{H}_J \rightarrow \mathcal{H}$  を  $T\varphi_{\alpha,\chi} = (p^{1/2} \cdot \eta_p^{-1})^{|\alpha|}\psi_{\alpha,\nu}$  ( $\alpha \in \Upsilon$ ) により定義しよう。すると

**定理 8.4.2** 1)  $T$  は  $\mathcal{H}_J$  から  $\mathcal{H}$  への  $\mathbb{C}$ -代数の同型写像で, 命題 8.3.1 で与えた同型写像の逆写像となる,

2) 任意の  $\theta \in \Theta(\widetilde{Sp}(V)/\text{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K})$  に対して  $\widehat{\theta} \circ T = \widehat{\theta}_J$  となる。

ここから直ちに次の系が得られる;

**系 8.4.3**  $\theta \mapsto \theta_J$  は  $\Theta(\widetilde{Sp}(V)/\text{Ker}(\varpi_\chi), \nu, \widetilde{K})$  から  $\Theta(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$  への全単射を与える。

$\widetilde{Sp}(V)$  の既約ユニタリ表現  $\tau$  で,  $\tau|_{\text{Ker}(\varpi)} = \nu$  かつ自明でない  $\widetilde{K}$ -不変ベクトルをもつもの全体を  $\mathcal{R}(\widetilde{Sp}(V)/\text{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K})$  とおく。又,  $Sp(V)_J$  の既約ユニタリ表現  $\pi$  で,  $\pi|_{Z(H(V))} = \chi$  かつ自明でない  $K_J$ -不変ベクトルをもつもの全体を  $\mathcal{R}(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$  とかく。 $\mathcal{H}, \mathcal{H}_J$  はともに可換だ

から，これらの既約表現の  $\tilde{K}$ -不変ベクトル，或いは  $K_J$ -不変ベクトルは 1 次元となり，既約表現は対応する帯球関数によって定まるから（定理 2.3.3）. 従って上で示したことから次の定理が示される；

定理 8.4.4  $\tau \mapsto \pi = \tau_J \otimes \omega_J$  は全単射

$$\mathcal{R}(\widetilde{Sp}(V)/\text{Ker}(\varpi), \nu, \tilde{K}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$$

を与え，対応する帯球関数は  $\theta_\pi = (\theta_\tau)_J$  となる．

## 参考文献

- [1] W.L.Baily, Jr. and A.Borel : *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains* (Ann. of Math. 84 (1966), 442–528)
- [2] J.Dixmier : *C\*-algebras* (North-Holland, 1982)
- [3] M.Eichler and D.Zagier : *Theory of Jacobi Forms* (Progress in Math. 55 (1985))
- [4] S.A.Gaal: *Linear analysis and representation theory* (Die Grund. math. Wiss. Einzel. 198, Springer-Verlag, 1973)
- [5] S.Gelbart, I.Piatetski-Shapiro, S.Rallis : *Explicit Constructions of Automorphic L-Functions* (Lecture Notes in Math. 1254, Springer-Verlag, 1980)
- [6] R.Godement : *Généralités sur les formes modulaires, I,II* (Séminaire H.Cartan, 1957/58)
- [7] Harish-Chandra : *Invariant eigen distributions on a semisimple Lie group* (Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 457-508)
- [8] Harish-Chandra (Notes by G. van Dijk) : *Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups* (Lecture Notes in Math. 162, Springer-Verlag, 1970)
- [9] R.Howe : *Transcending classical invarinat theory* (J. of American Math. Soc. 2 (1989), 535–552)
- [10] T.Ibukiyama : *On Jacobi forms and Siegelmodular forms of half integral weights* (Comment. Math. Univ. St. Pauli 41 (1992), 109–124)
- [11] J.-I.Igusa : *Theta Functions* (Die Grundlehren der math. Wiss. Einz. 194, Springer-Verlag, 1972)

- [12] G.Lion, M.Vergne : The Weil representation, Maslov index and Theta series (Progress in Math. vol.6, Birkhäuser, 1980)
- [13] A.Murase : *L-functions attached to Jacobi forms of degree  $n$ , Part I. The basic identity* (J. reine angew. Math. 401 (1989), 122–156)
- [14] I.Satake : *Caractérisation de l'espace des Spitzenformen* (Séminaire H. Cartan 1957/58)
- [15] I.Satake : *Factors of automorphy and Fock representations* (Advances in Math. 7 (1971), 83–110)
- [16] I.Satake : *Algebraic Structures of Symmetric Domains* (Math. Soc. Japan, Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980)
- [17] T.Shintani : unpublished nonte
- [18] T.Tamagawa : *On Selberg's trace formula* (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8 (1960), 363–386)
- [19] A.Weil : *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* (Acta math. 111 (1964), 143–211)