SAITO KUROKAWA LIFTING FOR LEVEL N

伊吹山知義

1. Introduction

サマースクールのときに解説した、レベル N のヤコービ形式から、レベル N のジーゲル保型形式への Saito Kurokawa lifting (この部分については Maass lift と呼ぶ人もいる）について述べるのが目的であるが、すでにアクセプトされた論文 [9] で詳細に論じており、そこで述べたことを日本語で繰り返すのも無駄なように思う。そこで、アウトラインと若干の注意だけ述べることにしたい。一方で、特にレベルが１でないヤコービ形式については、[13] 以外に、あまり詳細に論じた文献がなく、[13] も日本ではあまり知られていないと思うし、また論文 [9] などでも初等的な部分については論文という性格上詳細に論ずることはできなかった。そこで、この部分を敢えて少し詳しく解説することにする。

なお、Saito Kurokawa lift について述べた論文はこれが初めてというわけではない。他の著者の結果については、論文 [9] の文献および [3], [4], [12], [19] などを参照されたい。[9] で得られている結論はおおざっぱに言って次のとおりである。H_n を n 次のジーゲル上半空間とする。

(1) レベル N の指標付（trivial でもよい）の１次の index 1 のヤコービ形式（つまり $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数）からレベル N の指標付 の２次ジーゲル保型形式へのリフトが具体的に構成される。この構成による写像は単射である。
(2) もとのヤコービ形式がカスプ形式ならば、リフトされたものもカスプ形式である。
(3) 以上のリフトの L 関数の間の関係は具体的に記述される。
(4) 実際の構成を目指すならば、もとのレベル N のヤコービ形式が具体的に必要になるが、index が何であっても、このようなヤコービ形式を具体的に与える、わかりやすい Kramer の方法が存在する。実際に index 1 のときは、レベル５まではこの方法で決定した (cf. [9])。（ちなみにヤコービ形式は、たとえレベルが付いていても、半整数保型形式との自然な同型対応が存在するが、この方向の話とは少し異なる。）

2. １次のヤコービ形式

n 次のジーゲル上半空間 H_n を通常通り

$$H_n = \{Z = {}^tZ \in M_n(\mathbb{C}); Z = X + iY, X, Y \in M_n(\mathbb{R}), Y > 0\}$$

と定義する。n 次のシンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ をつぎで定義する。

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \{g \in M_{2n}(\mathbb{R}); gJ_n\,{}^tg = J_n\},$$

ここで、$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ また 1_n は n 次の単位行列とした。また $GSp^+(n,\mathbb{R})$ を次で定義する。

$$GSp^+(2,\mathbb{R}) = \{g \in M_{2n}(\mathbb{R}); gJ_n\,{}^tg = n(g)J_n, 0 < n(g) \in \mathbb{R}\}.$$

ヘッケ作用素などを考えるときには GSp^+ が必要となる。整数 k を固定する。 H_n 上の関数 $F(Z)$ の空間への $GSp^+(n,\mathbb{R})$ の作用を、$g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in GSp^+(n,\mathbb{R})$ に対して

$$(F|_k[g]) = \det(CZ+D)^{-k}F(gZ), \quad gZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

で定義する。

次に１次のヤコービ形式を定義したい。ヤコービ形式を定義するのにふさわしい実代数群は、$Sp(2,\mathbb{R})$ の極大放物型部分群で１次元カスプに対応するものの一部をとるのが自然である。つまり、次の群 $J(\mathbb{R})$ を実ヤコービ群と呼ぶことにする。

$$J(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset P_1(\mathbb{R}),$$

ただしここで、 $ad - bc = 1$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, $\lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{R}$ で

$$P_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{R}) \right\}$$

と置いた。任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して、$e(x) = exp(2\pi ix)$ と書こう。また $Z \in H_2$ に対して、その成分を $Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)$ と書く。$H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f(\tau,z)$ と $\omega \in H_1$ と正の整数 m に対して、$F(Z) = f(\tau,z)e(m\omega)$ を考えると任意の $g \in J(\mathbb{R}) \subset Sp(2,\mathbb{R})$ の元に対して、$F|_k[g] = \tilde{f}(\tau,z)e(m\omega)$ となる ω によらない函数 $\tilde{f}(\tau,z)$ が存在することが容易にわかる。このときの $f \to \tilde{f}$ が $J(\mathbb{R})$ の $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数の空間への作用を与える。(具体的な $\tilde{f}$ の形は 2.1 に書く。)

$J(R)$ の元を簡単に、$(g,((\lambda,\mu),\kappa))$ $(g \in SL_2(\mathbb{R}))$ と書くことにする。ここで成分が全部整数の部分群を $J(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})^J$ と書くことにする。$H(\mathbb{R}) = \{(1,((\lambda,\mu),\kappa)); \lambda,\mu,\kappa \in \mathbb{R}\}$ からなる部分群を Heisenberg group と呼ぶことがある。この群の元を簡単のために $((\lambda,\mu),\kappa)$ と書く。また κ は作用に関係しないことも多いので、特に、$\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ のときなどには、しばしば $(\lambda,\mu) = ((\lambda,\mu),0)$ と省略して書く。

ヤコービ形式を定義するときに、実のヤコービ群 $J(\mathbb{R})$ の離散部分群として何を取るべきかは、目的による。たとえば $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散群

Γ のジーゲル保型形式との関係で考えるならば、$\Gamma \cap J(\mathbb{R})$ を考えるのが自然である。ここで今

$$H(\mathbb{Z}) = \{(1, ((\lambda, \mu), \kappa); \lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと、一般に $\Gamma \cap J(\mathbb{R})$ は $H(\mathbb{Z})$ を含まず、たとえば、$H(\mathbb{Z})$ の元に適当な合同条件などをつけた小さな群などしか含まないことも多い。しかし $J(\mathbb{R})$ の離散群として $H(\mathbb{Z})$ を含まないものをとると、理論がいろいろな意味で面倒になるのは間違いない。このせいか、$H(\mathbb{Z})$ を含まないような群について、正面切って論じた文献は、よく知らない。とりあえずの我々の目的 (Saito-Kurokawa lift) には必要ないので、我々は

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}); c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

とおき、$\Gamma_0(N)^J = \{(g, 1); g \in \Gamma_0(N)\} \cdot H(\mathbb{Z})$ という半直積で定義される $J(\mathbb{Z})$ の部分群を考えて、これをレベル N のヤコービ群と呼ぶことにする。χ を modulo N の Dirichlet 指標として、これを $\chi(g) = \chi(d)$ として $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に拡張する。これは $\Gamma_0(N)^J$ にも自然に拡張される。以下一般論は述べずに $\Gamma_0(N)^J$ だけについて述べる。

2.1. **ヤコービ形式の定義.** 領域 $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f(\tau, z)$ に対して、次の作用を考える。$g \in GL_2(\mathbb{R})$ $(\det(g) = l > 0)$ と $((\lambda, \mu), \kappa) \in H(\mathbb{R})$ に対して、

$$(f|_{k,m}[g])(\tau, z) = (c\tau + d)^{-k} e^{ml} \left(-\frac{cz^2}{c\tau + d} \right) f \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{lz}{c\tau + d} \right),$$

$$(f|_m[((\lambda, \mu), \kappa)])(\tau, z) = e^m(\lambda^2 \tau + 2\lambda z + \lambda\mu + \kappa) f(\tau, z + \lambda\tau + \mu).$$

　また $(\tau, z) \in H_1 \times \mathbb{C}$ に対して、$q = e(\tau)$, $\zeta = e(z)$ と書く。

　$H_1 \times \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(\tau, z)$ は次の 3 つの条件を満たす時に、ウェイト k index m の $\Gamma_0(N)^J$ の指標 χ つきのヤコービ形式という。

(i) $f|_{k,m}[g] = \chi(g) f \quad (g \in \Gamma_0(N))$.

(ii) $f|_m[(\lambda, \mu)] = f \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{Z})$.

(iii) 任意の $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$f|_{k,m}[g] = \sum_{n, r \in \mathbb{Q}} c_g(n, r) q^n \zeta^r$$

とするとき、$4nm - r^2 \geq 0$ でないなら $c_g(n, r) = 0$ である。

　以上のヤコービ形式の空間を $J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ と書く。更にヤコービ形式 ϕ が上の条件の (iii) を次の条件 (iii') に置き換えたものを満たす時、ヤコービカスプ形式という。

(iii') 任意の $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$4nm - r^2 > 0$ でないならば $c_g(n, r) = 0$.

　ヤコービカスプ形式の空間を $J_{k,m}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ と書く。

　さて、level 1 のときはよく知られている次の補題 ([5]) を level N のときのも確認しておく。

Lemma 2.1. $f \in J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ とする。f はフーリエ展開

$$f(\tau, z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}, 4nm-r^2\geq 0} c(n,r) q^n \zeta^r$$

を持つが、フーリエ係数 $c(n,r)$ は $4nm - r^2$ および $r \bmod 2m$ のみによって決まる。特に $m = 1$ のときは $4n - r^2$ のみで決まる。

証明：関係式 $f(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e(-m(\lambda^2\tau + 2\lambda z))f(\tau, z)$ より、

$$\sum_{n,r} c(n,r) q^{n+m\lambda^2+r\lambda} \zeta^{r+2m\lambda} = \sum_{n,r} c(n,r) q^n \zeta^r$$

であるから、フーリエ展開の一意性より、任意の整数 λ について、

$$c(n,r) = c(n + m\lambda^2 + r\lambda, r + 2m\lambda) \tag{1}$$

となる。ここで、$n_1 = n+m\lambda^2+r\lambda$, $r_1 = r+2m\lambda$ とおくと、$4n_1m-r_1^2 = 4nm - r^2$, $r \equiv r_1 \bmod 2m$ となっている。一方で、$c(n,r) \neq 0$ となる組 (n,r) に対し、任意の整数の組 (n_1, r_1) が、$r \equiv r_1 \bmod 2m$ かつ、$4n_1m - r_1^2 = 4nm - r^2$ を満たすと仮定する。ここで、 $r_1 = r + 2m\lambda$ と整数 $\lambda \in \mathbb{Z}$ を定めると

$$4n_1m = r_1^2 + 4nm - r^2 = (r+2m\lambda)^2 + 4nm - r^2 = 4m\lambda^2 + 4mr\lambda + 4nm.$$

よって、$n_1 = n+mr\lambda+m\lambda^2$. ゆえに $c(n_1, r_1) = c(n+m\lambda^2+r\lambda, r+2\lambda) = c(n,r)$ である。特に $m = 1$ ならば $4n - r^2$ によって、 $r \bmod 2$ が確定するので、$c(n,r)$ は $4n - r^2$ のみによる。q.e.d.

2.2. **Theta expansion.** 自然数 m を固定する。任意の $\nu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ に対して、$H_1 \times \mathbb{C}$ 上のテータ関数を

$$\vartheta_{\nu,m}(\tau, z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e((p + \frac{\nu}{2m})^2 m\tau + (p + \frac{\nu}{2m})(2mz))$$

と定義する。テータ関数とかアーベル関数の理論でよく知られていることであるが、ヤコービ形式の定義の (ii) を満たすような $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f(\tau, z)$ は、$\mathbb{C}$ 上の関数として、これらのテータ関数の線形結合で書ける。つまり H_1 上の正則関数 $c_\nu(\tau)$ があって、

$$f(\tau, z) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} c_\nu(\tau)\vartheta_\nu(\tau, z). \tag{2}$$

ここで、$c_\nu(\tau)$ は $f(\tau, z)$ により一意的に決まる。f が (ii) を満たすだけならばここまでで話は終わりであるが、(i) の条件から $-1_2 \in \Gamma_0(N)$ の作用によって、$f(\tau, -z) = (-1)^k \chi(-1) f(\tau, z)$ という条件がつく。もし $m = 1$ ならば、$\vartheta_{\nu,1}(\tau, z)$ は z の偶関数なので、

$$\chi(-1) = (-1)^k$$

でなければ、$f = 0$ となる。$m \neq 1$ ならば、それほど単純ではなく、$\chi(-1) = (-1)^k$ か否かに応じて、f は z について、偶関数または奇関数になる。$\vartheta_{\nu,m}(\tau, -z) = \vartheta_{-\nu,m}(\tau, z)$ であるから、偶関数も奇関数もテータの線形結合で表すことができる。たとえば、$\chi(-1) = (-1)^k$ な

らば、偶関数という条件と、(2) の表示の一意性から、$c_\nu(\tau)=c_{-\nu}(\tau)$ となる。言い換えると、

$$f(\tau,z)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} c_\nu(\tau)\times(\vartheta_\nu(\tau,z)+\vartheta_{-\nu}(\tau,z))/2 \tag{3}$$

となるのである。$\nu\equiv-\nu \bmod 2m$ となるのは、$\nu\equiv 0 \bmod m$ のときのみだから、$\nu=0, \nu=m$ のときだけ $\vartheta_\nu(\tau,z)=\vartheta_{-\nu}(\tau,z)$ となる。以下の都合上、$0\leq\nu\leq m$ に対して、

$$\theta_\nu(\tau,z)=\frac{1}{2}(\vartheta_\nu(\tau,z)+\vartheta_{-\nu}(\tau,z))$$

と置き、あらためて

$$f(\tau,z)=\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

と書くのが分かりやすいと思う。これをテータ展開と呼ぶことにする。($f(\tau,z)$ が奇関数のときは、テータの差をとることになるので、$m-1$ 個の線形結合になる。これは別扱いにしなければならないが、どうせ同様なので以下でも偶関数の時のみを考える。)

2.3. Taylor expansion とヤコービ形式の求め方. ヤコービ形式 $f(\tau,z)$ は $z\in\mathbb{C}$ について正則な関数なので、$z=0$ の周りでテーラー展開できる。この時の展開係数は τ の関数であるが、これらは保型形式にかなり近い、というのが Eichler-Zagier の理論の一部で主張されている。同様のことは高次のヤコービ形式でも、形を変えて成り立っているが (cf. [10]) それはともかく、テーラー展開と前のテータ展開を組み合わせると、1変数保型形式の知識からヤコービ形式を構成することが可能になる。これは Saito-Kurokawa lift と直接的な関係は何もないが、意外に知られていないと思うので、あえて解説する。本質的には Eichler-Zagier に述べてあることだが、Kramer [13] はレベル N のときに丁寧に論じて、1変数保型形式の知識をどうヤコービ形式に反映させられるかを調べた。なぜか Kramer は「これを実際に適用して、ヤコービ形式を求める」という方向にはまったく行かなかったようなのは大変不思議である。

2.3.1. 1変数保型形式への写像. ヤコービ形式 $f(\tau,z)\in J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ が z に関して偶関数か奇関数かによって、Taylor 展開の述べ方が異なるが、面倒なので以下では偶関数のときのみを扱う。$g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$f|_{k,m}[g](\tau,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\chi_{l,g}(\tau)z^{2l}$$

と書く。ここで $\chi_{l,g}(\tau)$ は H_1 上の正則関数である。面倒なので、$g=1_2$ のときは $\chi_{l,1}=\chi_l$ と書くことにする。注意として、$f|_{k,m}[g]$ もヤコービ形式の定義の条件 (ii) を満たしている。これは $H(\mathbb{Z})$ の部分が $SL_2(\mathbb{Z})$ の積で不変であることによる。ここはなかなか微妙な仮定である。(ii)

を満たす以上、$f|_{k,m}[g]$ もテータ展開を持つ。また f が偶関数ならば、$f|_{k,m}[g]$ も偶関数である。(-1_2 は $SL_2(\mathbb{Z})$ と可換だから。）よって、

$$f|_{k,m}[g](\tau,z)=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

としてよい。ここで $\theta_\nu(\tau,z)$ は g とは関係ない量であることに注意する。1 と τ に関する基本平行四辺形内での $f(\tau,z)$ の z に関するゼロ点の個数は初等的な関数論とヤコービ形式の保型性より簡単に計算できて、重複度をこめて $2m$ である ([5])。よって、f は $\chi_l(\tau)$ $(l=0,\ldots,m)$ で決まっている。言い換えると $\chi_l(\tau)$ が $l=0,\ldots,m$ に対してすべてゼロならば $f=0$ である。これは $\chi_{l,g}(\tau)$ についても同様である。ここで、$\chi_l(\tau)$ の満たすべき性質をもう少し詳しく見る。$f(\tau,z)$ を一つ固定して、その Taylor 係数 $\chi_l(\tau)$ について、

$$\xi_{k,l}(\tau)=\sum_{\mu=0}^{l]}\frac{(k+2l-\mu-2)!}{\mu!(k+2l-2)!}(-2\pi im)^\mu\frac{d^\mu}{d\tau^\mu}\chi_{l-\mu}(\tau) \tag{4}$$

と定義すると、$\xi_{k,l}(\tau)\in A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ である。(Eichler-Zagier の記号では、これは $\xi_{2l}(\tau)$ と書かれている。）ここで、$A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ はウェイトが $k+2l$ の指標 χ, レベル N の１変数正則保型形式の空間である。以上により、

$$J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)\to A_k(\Gamma_0(N),\chi)\times A_{k+2}(\Gamma_0(N),\chi)\times\cdots\times A_{k+2m}(\Gamma_0(N),\chi)$$

なる単射線形写像が存在することになる。ここで一般にこの写像は全射ではない。たとえば $N=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ m=1,\ \chi=id$ ならば全射であるが、これは偶然であって、一般には全射でない方が普通である。$\xi_{k,2l}(\tau)$ の定義の式を逆に解いて、$\chi_l(\tau)$ で表すことができる。実際、Eichler-Zagier [5] p. 34 (12) にあるように

$$\chi_l(\tau)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(2\pi im)^\mu(k+2l-2\mu-1)!}{(k+2l-\mu-1)!\mu!}\xi^{(\mu)}_{k,l-\mu}(\tau)$$

となる。よって、ヤコービ形式から $(\xi_{k,2l}(\tau))_{0\le l\le m}$ への写像の像が分かれば、ヤコービ形式の空間は決定されていることになる。次節ではこれをもう少し詳しく、いつ $(\xi_{k+2l}(\tau))_{0\le l\le m}$ がヤコービ形式から来るかという問題意識で調べることにする。

2.3.2. **連立１次方程式.** 今、テーラー展開とテータ展開を組み合わせて、$c_\nu(\tau)$ と $\chi_l(\tau)$ の間の関係式を求めることにする。そこで、今、ヤコービ形式の定義の条件 (ii) を満たすような任意の正則関数 $f(\tau,z)$、および $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ についてテーラー展開

$$f(\tau,z)|_{k,m}[g]=\sum_{l=0}^{\infty}\chi_{l,g}(\tau)z^{2l}$$

とテータ展開

$$f(\tau,z)|_{k,m}[g]=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

の両方を考える。両辺を z で偶数回微分して、そののちに $z=0$ とおくという操作を考えると、$2m$ 階まで考えて、次の関係式を得る。

$$\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\partial_z^{2l}\theta_m(\tau,z)|_{z=0}=(2l)!\chi_{l,g}(\tau).\quad (0\le l\le m). \tag{5}$$

ここで、$\partial_z=\frac{\partial}{\partial z}$ としている。しかしテータ関数は heat equation を満たす、つまり

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta_m(\tau,z)=\frac{4m}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_m(\tau,z)$$

であるから、∂_z^{2l} は定数倍を除き、∂_τ^l に置き換えてよい。(ただし $\partial_\tau=\frac{\partial}{\partial\tau}$.) さて、我々は、今は $f(\tau,z)$ を未知として、これの情報を $\chi_{l,g}$ から得たいという立場なので、以上の関係式を、$c_{\nu,g}(\tau)$ を未知関数、$\chi_{l,g}(\tau)$ を既知関数とする連立１次方程式とみなす。連立１次方程式であるから、まず正方行列

$$A=(\partial_\tau^l\theta_\nu(\tau,z))_{0\le l\le m,0\le\nu\le m}$$

の行列式が何かは気になるところである。これは以下で必ずしも必要なわけではないが、一応求めておこう。結論は $\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ とおくとき、$\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ の 0 でない定数倍になる。この理由を下に説明する。今 τ_i $(0\le i\le m)$ を $m+1$ 個の H_1 を動く変数とする。$(\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_m)\in H_1^{m+1}$ 上の関数 $f(\tau_0,\ldots,\tau_m)$ に作用する微分作用素

$$\mathbb{D}=\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\ \partial_{\tau_0}&\cdots&\partial_{\tau_m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \partial_{\tau_0}^m&\cdots&\partial_{\tau_m}^m\end{vmatrix}$$

を考える。また H_1 上の関数 $h(\tau)$ と $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{R})$ に対して、$f|_k[g]=(c\tau+d)^{-k}f(g\tau)$ とかく。ここで k は整数または半整数として、半整数のときは分岐を一つ指定しておくことにする。この手の微分作用素の一般論 (cf. e.g. [8]) の簡単な応用問題として、任意の $g\in SL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}&Res_{\tau_l=\tau}(\mathbb{D}((\prod_{l=0}^{m}(c\tau_l+d)^{-k}f(g\tau_0,\ldots,g\tau_m))\\ &\qquad\qquad=(Res_{\tau_l=\tau}\mathbb{D}f(\tau_0,\ldots,\tau_m))|_{(m+1)k+m(m+1)}[g]\end{aligned}$$

となることがわかる。ここで $Res_{\tau_l=\tau}$ はすべての変数 τ_l を同じ τ 置き換える操作で、つまりは $H_1\to H_1\times\cdots\times H_1$ なる diagonal embedding の引き戻しとして定義している。またウェイトの変化は、もとのウェイトの作用が k のものが $m+1$ 個あるので、$(m+1)k$ がまずでて、それ以外

に微分一つにつきウェイトが 2 あがるので、$2+4+\cdots+2m=m(m+1)$ として求まる。今 $f(\tau_0,\ldots,\tau_m)=f_0(\tau_0)f_1(\tau_1)\cdots f(\tau_m)$ の場合を考えると、

$$Res_{\tau_l=\tau}\left(\mathbb{D}(f_0(\tau_0)\cdots f_m(\tau_m))\right)=\begin{vmatrix} f_0(\tau) & \cdots & f_m(\tau) \\ \partial_\tau f_0(\tau) & \cdots & \partial_\tau f_m(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_\tau^m f_0(\tau) & \cdots & \partial_\tau^m f_m(\tau) \end{vmatrix}.$$

さて、$f_\nu(\tau)=\theta_\nu(\tau,0)$ $(0\le\nu\le m)$ の場合を考えたい。

Lemma 2.2. $Res_{\tau_l=\tau}(\mathbb{D}(\theta_0(\tau)\cdots\theta_m(\tau))$ は $\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ の 0 でない定数倍である。

証明：保型性を見るために、$SL_2(\mathbb{Z})$ の作用を生成元について考えることにする。よく知られているように $SL_2(\mathbb{Z})$ は $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ で生成される。T については、$\theta_\nu(\tau+1)=e(\nu^2/4m)\theta_\nu(\tau)$ であるから、$\theta_0(\tau+1)\cdots\theta_m(\tau+1)=e((m+1)(2m+1)/24)\theta_0(\tau)\cdots\theta_m(\tau)$. 一方で J については、Igusa [11] II で非常に綺麗に解説されているテータ変換公式を応用すると、

$$\vartheta_\nu(-\tau^{-1})=\kappa(J)\sqrt{\tau/2m}\sum_{r\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}e(-r\mu/2m)\vartheta_r(\tau)$$

がわかる。ここで $\kappa(J)$ は $\sqrt{\tau}$ の分岐の取り方による定数であり、実際には 1 の 4 乗根である。ただし注意として、$\vartheta_\nu(\tau)$ はいわゆる第 2 種のテータ関数 (theta functions of the second kind) であり、Igusa に書いてあるテータ定数とはかなり違うので、その部分は、第 1 種のテータに帰着して変換の後にその意味を考えて、第 2 種の線形結合で表すなどして上手に書き換えなければならない。これにより、各 $\theta_\nu(-\tau^{-1})\tau^{-1/2}$ は $\theta_r(\tau)$ の $\mathbb{C}$ 係数線形結合であることがわかる。具体的には

$$\begin{aligned}
&\theta\nu(-\tau^{-1})(\tau)^{-1/2}\\
&=\kappa(J)\frac{1}{\sqrt{2m}}\sum_{r\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}\frac{e(-r\nu/2m)+e(r\nu/2m)}{2}\vartheta_r(\tau)\\
&=\kappa(J)\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\theta_0(\tau)+e(\nu/2)\theta_m(\tau)+\sum_{r=1}^{m-1}(e(-r\mu/2m)+e(r\mu/2m))\theta_r(\tau)\right)
\end{aligned}$$

と書けるが、具体的な表示はともかくとして、適当な定数行列があって、

$$(\theta_0(-\tau^{-1}),\ldots,\theta_m(-\tau^{-1}))\tau^{-1/2}=(\theta_0(\tau),\ldots,\theta_m(\tau))A$$

となるわけである。ここで $\tau^{1/2}$ の分岐は特に指定する必要もないのでしないが、この作用を 2 回繰り返すことにより、$A^2=\alpha 1_{m+1}$, $|\alpha|=1$ となるのは、何も計算しなくても明らかである。両辺を何回か微分して並べると、結局

$$Res(\mathbb{D}(\theta_0(\tau_0)\tau_0^{-1/2}\cdots\theta_m(\tau_m)\tau_m^{-1/2})=\det(A)Res(\mathbb{D}(\theta_0(\tau_0)\cdots\theta_m(\tau_m))$$

になるが、左辺は微分作用素の性質より

$$Res(\mathbb{D}(\theta_0(\tau_0)\cdots\theta_m(\tau_m))\big|_{(m+1)/2+m(m+1)}[J]$$

と等しいので、結局、$f(\tau):=\det(\frac{d^{2\nu}}{d\tau^{2\nu}}\theta_r)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する保型性がわかったことになる。ここでウェイトが半整数であるから、分岐が気になるので、より正確に言い換えると、任意の $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$f|_{(m+1)(2m+1)/2}[g]=c(g)f$ ($c(g)$ は定数）となるのである。しかし、$\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の multiplier つきの保型形式であって上半平面上ではどこでも消えないので、$f(\tau)/\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ はカスプ $i\infty$ のみで極を持つ可能性がある。一方で、$f(\tau)$ を定める行列式を見てみると、$\frac{d^{2l}}{d\tau^{2l}}\theta_\nu$ からは、$\nu\neq 0$ である限りは、$i\infty$ での展開は $q^{\nu^2/4m}$ から始まり、よって、$f(\tau)$ の位数も少なくとも $\sum_{\nu=1}^m(\nu^2/4m)=(m+1)(2m+1)/24$ である。これは $\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ の位数と等しい。よって $f(\tau)/\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ は $i\infty$ でも正則であり、よって、定数に等しい。なお、この定数がいくつかは基本的に Vandermonde の行列式だから書けないこともないが、あまり意味がないので（それに書いても間違えそうなので）ここでは述べない。(ただしゼロでないことは $q^{(m+1)(2m+1)/24}$ の係数が消えないことがわかればよい。ここは見る必要があるが、 Vandermonde の行列式を見ればよい。)

さて、Lemma 2.2 の意味するところは、連立方程式 (5) は一意的に解けるということであり、この方程式により $c_\nu(\tau)$ が決まる、ということは $\chi_l(\tau)$ $(0\leq l\leq m)$ で $f(\tau,z)$ が決まるということでもあり、前の関数論からの簡単な結果 ($2m$ 次まで消えていたら $f=0$ になる）を最証明していることにもなっている。実は次数の高いヤコービ形式 ($H_n\times\mathbb{C}^n$ 上のヤコービ形式）では簡単な関数論の結果というのはないので、どの程度テーラー係数が消えていたらヤコービ形式が消えるかというのはもっと複雑になり、今述べてきたような手法でないと確定できない。(実例は [10] を参照).

2.3.3. **ヤコービ形式になるための十分条件 (一般の index).** 我々はヤコービ形式から出発して連立方程式 (5)（の特に $g=1_2$ のとき）を得たのだが、逆に、$\chi_l(\tau)$ $(0\leq l\leq m)$ を適当に与えて、連立１次方程式 (5) を $g=1_2$ に対して解き、その解 $c_l(\tau)$ に対して

$$f(\tau,z)=\sum_{\nu=0}^m c_\nu(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

と定義したときに $f(\tau,z)$ がヤコービ形式になるかどうかを調べることにする。$\chi_l(\tau)$ の満たすべき十分条件については、後で述べることになるが、とりあえず $f(\tau,z)$ の変換に対する保型性とフーリエ係数の条件の２つにわけて調べよう。まず、保型性の定義の条件の (ii) であるが、これは、テータ展開で $f(\tau,z)$ を定義しているのだから明らかである。保型性の定義の条件 (i) は、まず $f|_{k,m}[g]$ も条件 (ii) は満たすことに注意する。これは、$g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し $gH(\mathbb{Z})=H(\mathbb{Z})g$ より明らかで

ある。よって、

$$f|_{k,m}[g] = \sum_{\nu=0}^{m} c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

となる H_1 上の正則関数 $c_{\nu,g}(\tau)$ が定まる。当然のことながら $c_{\nu,g}(\tau)$ と $c_\nu|_{k-1/2}[g]$ の間には直接の単純な関係はない（実際には複雑な線形結合ではあるが、今このことは使用しない。）しかし、$z=0$ での Taylor 展開の右辺と左辺に $|_{k,m}[g]$ を作用させてみれば、$c_{\nu,g}(\tau)$ を解に持つような連立１次方程式が得られる。Taylor 展開に対する作用 $\left(\sum_{l=0}^{\infty}\chi_l(\tau)z^{2l}\right)|_{k,m}[g]$ で Taylor 展開がどう変わるかは、結果的に言うと単純で、次のように記述される。前に述べた式 (4) で $\chi_l(\tau)$ から $\xi_{k,l}(\tau)$ を定義する。もとの $f(\tau,z)$ がヤコービ形式ならばこれは $A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ の元であるが、今はそうは仮定していなかった。そこで、逆に $\xi_{k,l}(\tau)\in A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ と仮定して、$\chi_l(\tau)$ を, (4) を逆に解いて、$\xi_{k,l}(\tau)$ を用いて定義することにする。また $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$\xi_{k,l,g}(\tau)=\xi_{k,l}(\tau)|_{k+2l}[g]$ と定義して、この $\xi_{k,l,g}(\tau)$ を用いて、同様の式で定義した関数を $\chi_{l,g}(\tau)$ と書くことにする。すると $f|_{k,m}[g]$ の Taylor 展開は $\sum_{l=0}^{\infty}\chi_{l,g}(\tau)z^{2l}$ になることがわかる。この事実の証明は、直接計算してしまうというのが一つのやり方であるが、そもそも $\xi_{k,l}$ を定義する微分作用素を $f(\tau,z)e(m\omega)$ なる H_2 上の関数への作用を対角 $H_1\times H_1\subset H_2$ に制限したものと解釈して、これが $(g,((0,0),0))\in J(\mathbb{R})\subset Sp(2,\mathbb{R})$ の作用と可換であることを用いるのが証明としては最もすっきりしている。これの詳しい説明は今は省略するが、いずれにしても、$f|_{k,m}[g]$ の Taylor 展開より、一般の $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対する連立１次方程式 (5) が得られる。この解 $c_{\nu,g}(\tau)$ は $\chi_l(\tau)$ により一意的に定まる。ということは $\xi_{k,l}(\tau)\in A_{k+2l}(\Gamma_0)$ であれば $g\in\Gamma_0(N)$ に対しては $\xi_{k,l}|_k[g]=\chi(g)\xi_{k,l}$ になるので、$c_{\nu,g}(\tau)=\chi(g)c_\nu(\tau)$ になり、$f|_{k,m}[g]=\chi(g)f$ となる。すなわち、f の $\Gamma_0(N)$ に対する保型性が証明されたことになる。よって、$\xi_{k,l}\in A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ と取る限りは、$f(\tau,z)$ はヤコービ形式の定義のうち、フーリエ係数の条件以外はすべて満たすことになる。フーリエ係数の条件はもっと複雑である。これの記述は節を改めて述べたい。念のために述べると、フーリエ係数の条件というのはあくまで１次のヤコービ形式 (つまり第１変数が H_1 に属するとき) に現れるものであって、高次の場合は Koecher 原理が成立するので (Ziegler [23])、条件は自動的に成立している。

2.3.4. **フーリエ係数の条件.** ヤコービ形式の定義の条件の (iii) (フーリエ係数の条件) というのは、任意の $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$f|_{k,m}[g]$ のフーリエ係数 $c_g(n,r)$ は $4mn-r^2\geq 0$ でないと消えるというものであった。ここで実際には g は $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})/P_0$ (P_0 は $SL_2(\mathbb{Z})$ の上三角行列全体）だけ動くとしても良いのはすぐわかる。つまり $\Gamma_0(N)$ のカスプの代表を動くとしておけばよい。さて、$g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$g^{-1}\Gamma_0(N)g\cap P_0 = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & n_g\mathbb{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

となる $0 < n_g \in \mathbb{Z}$ が存在する。このときフーリエ展開は

$$f|_{k,m}[g] = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_g(n,r) q^{n/n_g} \zeta^r$$

となるが、$4nm - r^2 \geq 0$ でないなら $c_g(n,r) = 0$ という条件がどうなるかを見てみよう。$\theta_\nu(\tau,z)$ $(0 \leq \nu \leq m)$ のフーリエ展開に出てくる項は $q^{mp^2 \pm p\nu + \nu^2/4m} \zeta^{2mp\pm\nu}$ からなっているから、ここからは $c_g(n,r)$ のうちで $r \equiv \pm\nu \bmod 2m$ のものだけが出てくる。逆に $c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$ からはこのような係数しか出てこない。$f|_{k,m}[g]$ は $\tau \to \tau + n_g$ で不変であるから、$c_\nu(\tau) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} a_\alpha q^\alpha$ とすると $\alpha + \nu^2/4m \in n_g^{-1}\mathbb{Z}$ であり、よって、

$$\alpha = \frac{n}{n_g} - \frac{\nu^2}{4m}$$

と書ける。ここでフーリエ係数についての関係式 (1) は $c_g(n,r)$ についても成り立つので、

$$c_g(\alpha + mp^2 \pm p\nu + \nu^2/4m, 2mp \pm \nu) = c_g(n/n_g, \pm\nu)$$

が成立する。ここでフーリエ係数の条件は $4nm/n_g - \nu^2 \geq 0$ でなければゼロという条件ということになる。言い換えると

$$c_{\nu,g}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{\nu,g}(n) q^{n/n_g - \nu^2/4m}$$

とするとき、$4n/n_g \geq \nu^2/m$ でなければ $a_{\nu,g}(n) = 0$ となるという条件といってもよい。言い換えると $(c_{\nu,g}(\tau))_\nu$ が g に対応するカスプで正則という条件である。（正確に言えば $c_{\nu,g}(\tau)$ は $c_\nu|_{k-1/2}[g]$ ではないが、ベクトル $(c_\nu(\tau))$ を multiplier つきのベクトル値保型形式と思えるので、これがカスプで正則という言い方の方が正当であろう。）今は χ_l を与えたのちに $c_{\nu,g}(\tau)$ が決まるのだから、この条件を満たしてくれるように χ_l（あるいは $\chi_{l,g}$ あるいは $\xi_{k,l}$ ）を指定するにはどうすればよいかという話になる。まずとりあえず $n < 0$ ならば $a_{\nu,g}(n) = 0$ であることを見てみよう。その前に、 $\chi_{l,g}(\tau)$ は保型形式 $\xi_{k,\mu}|_k[g]$ を何回か微分したもの線形結合で書けているのであるから、フーリエ展開にあらわれる q のべきは、非負である。$c_{\nu,g}(\tau)$ は連立１次方程式の解で、方程式の左辺の行列式の逆数は q で高々 $(m+1)(2m+1)/24$ 位の極をもつ。よって $c_{\nu,g}(\tau)$ は $i\infty$ で高々極であり、フーリエ展開の負のべきの項は高々有限個しかない。よってこの連立１次方程式を用いて、フーリエ係数を冪の低い方から順に求めていくことができる。実際、今どこかの $0 \leq \nu \leq m$ について $a_{\nu,g}(n) \neq 0$ となる最小の n を n_0 と書くと連立１次方程式は

$$\sum_{\nu=0}^{m} \nu^{2l} a_{\nu,g}(n_0) \quad (0 \leq l \leq m)$$

が右辺から決まる既知の数という形になる。係数は Vandermonde の行列式の形だから、解は一意的に定まる。（これはもともと $c_{\nu,g}(\tau)$ は一意的に決まっていたのだから、当たり前であるが。）右辺は q の負べ

きは存在しないから、$n_0 < 0$ ならば矛盾であり、$a_{\nu,g}(n) = 0$ if $n < 0$ がわかる。

さて問題は $0 \le n/n_g < \nu^2/4m$ となる n である。これらは全部消えていてほしいのである。しかし条件は ν によるので、むしろ次のように言い換えた方がよい。まず $n = 0$ で方程式を考える。$a_{0,g}(0)$ は何でもよいが $0 < \nu$ に対しては $a_{\nu,g}(0) = 0$ であるべきだ。今まで右辺を既知、左辺の $a_{\nu,g}(n)$ を未知と考えてきたが、右辺に条件を付けようとしているのだから、これを逆に考えて、右辺のフーリエ展開の係数を未知数と考えよう。よって、今は右辺のフーリエ展開の定数項を未知数と考えて、連立１次方程式を逆行列をかけて、定数項に関する方程式を思うと、$a_{\nu,g}(0) = 0$ $(0 < \nu)$ という条件を課した方程式の解がパラメータ付で書ける。次に $n = 1$ に対するフーリエ係数の間の方程式を考える。この方程式は $n = 0$ のときの係数によっているかもしれないが、そこはすでに解が書けているのでそれを代入して置き換えておく。するとまた $1 < n_g\nu^2/4m$ となる ν についての $a_{\nu,g}(1) = 0$ という条件を方程式で書くことができる。このようにして、n/n_g が $\nu^2/4m$ を超えるまで続ければ条件がすべて得られることになる。以上はすっきりした closed formula を与えているわけではないが、少なくとも与えられたウェイトと index を持つヤコービ形式を有限回の操作で決定する方法は与えている。（逆行列の係数を用いれば、もう少し具体的に書くこともできる。）

2.3.5. **ヤコービ形式になるための条件 (index1).** 以上の説明は少々わかりにくいかもしれないが、$m = 1$ の場合はもう少しよくわかるので、この場合に詳しく状況を見てみよう。$m = 1$ ならば $\nu = 0$ または $\nu = 1$ である。また $\theta_\nu(\tau, z) = \vartheta_\nu(\tau, z)$ でもある。記号を単純にするために、$\xi_{k,0}(\tau)$, $\xi_{k,1}(\tau)$ の代わりに $f_0(\tau) \in A_k(\Gamma_0(N), \chi)$, $f_1(\tau) \in A_{k+2}(\Gamma_0(N), \chi)$ という記号を使おう。これは $f_l|_{k+2l}[g] = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu,g}(n) q^{n/n_g}$ というフーリエ展開を持つ。この場合、前に考えた連立１次方程式 (5) は

$$
\begin{aligned}
&c_{0,g}(\tau)\vartheta_0(\tau) + c_{1,g}(\tau)\vartheta_1(\tau) = (f_0|_k[g])(\tau), \\
&c_{0,g}(\tau)\vartheta_0'(\tau) + c_{1,g}(\tau)\vartheta_1'(\tau) = \frac{1}{2k}(f_0|_k[g])'(\tau) + \frac{\pi i}{4k}(f_1|_{k+2}[g])(\tau).
\end{aligned}
$$

となる。ここで $'$ は τ に関する微分を意味する。本質的に $\nu = 1$ での $a_{1,g}(n) = 0$ $(n < n_g/4)$ という条件だけが問題になる。ここで

$$
\begin{aligned}
\vartheta_0(\tau, z) &= 1 + q(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + q^4(\zeta^4 + \zeta^{-4}) + \cdots \\
\vartheta_1(\tau, z) &= q^{1/4}(\zeta + \zeta^{-1}) + q^{9/4}(\zeta^3 + \zeta^{-3}) + \cdots
\end{aligned}
$$

であるが、これより、$f|_{k,m}[g]$ の q^{n/n_g} $(0 \le n/n_g < 1/4)$ における係数は、$1/4 < 1$ なので、ϑ_ν の最初の係数と $a_{\nu,g}(n)$ にしか関係しない（つまり q^{n/n_g+1} などは $(0, 1/4)$ という範囲を超えてしまうので、考えなくて良い）ということがわかる。この範囲での関係式は

$$
\begin{aligned}
a_{0,g}(n)+2a_{1,g}(n)&=b_{0,g}(n)\\
(2\pi i)^2 a_{1,g}(n)&=\frac{2\pi i n}{2kn_g}b_{0,g}(n)+\frac{\pi i}{4k}b_{1,g}(n)
\end{aligned}
$$

であり、よって、$f(\tau,z)$ がヤコービ形式であるためには, $a_{1,n}(n)=0$ $(0\le n<n_g/4)$ が条件だから、$f_{0,g}$, $f_{1,g}$ の係数の条件は

$$
b_{1,g}(n)=-\frac{4n}{n_g}b_{0,g}(n)\quad(0\le n<n_g/4)
$$

と書けることになる (cf. [13])。ここで $n=0$ ならば、右辺はゼロだから、$b_{1,g}(0)=0$ がすべての $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ について成り立つということになり、これは $f_1\in S_{k+2}(\Gamma_0(N),\chi)$ ということを表している。もし $n_g\le 4$ ならば条件はこれだけであり、この場合 $J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ から $A_k(\Gamma_0(N),\chi)\times S_{k+2}(\Gamma_0(N),\chi)$ への写像 $\phi\to(f_0,f_1)$ は全単射ということになる。この場合に $J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ を１変数保型形式の情報から書くことは易しい。また $N=1$ でこの写像が全単射であることは、すでに Eichler-Zagier [5] で注意されている。全単射にならない最小の N は $N=5$ である。この場合の index 1 の構造は、[9] を参照されたい。

3. Saito Kurokawa lift の定義

前置きがかなり長くなったが、Saito Kurokawa lift の定義を述べる。前に述べたように χ は任意の (原始的とは仮定しない) $\bmod N$ の Dirichlet character とする。

$$
\Gamma_0^{(2)}(N)=\left\{g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{Z});C\equiv 0 \bmod N\right\}
$$

とおき、$\chi(g)=\chi(\det(D))$ として χ を $\Gamma_0^{(2)}(N)$ の指標とみなす。

3.1. **Cusp forms.** ヤコービカスプ形式 $\phi(\tau,z)\in J_{k,1}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ を考える。Index 1 のヤコービ形式から、フーリエヤコービ展開を用いてジーゲル保型形式を作るには、Index が一般のヤコービ形式を構成しておくことが必要である。ヤコービ形式をヤコービカスプ形式に制限しておけば、index 0 のものを考えなくても済むという点が楽であり、この場合をまず解説する。まず index を変えるシフト作用素 V_l を定義する。普通の１変数のヘッケ作用素の理論を流用して

$$
\Delta_{N,0}(l)=\left\{g=\begin{pmatrix}a&b\\cN&d\end{pmatrix};a,b,c,d\in\mathbb{Z},\det(g)=l,(a,N)=1\right\},
$$

$$
\Delta_{N,0}=\bigcup_{l=1}^{\infty}\Delta_{N,0}(l).
$$

とおくと $\Delta_{N,0}$ は半群になる。$\Delta_{N,0}$ の元 $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ に対して、χ の値を $\chi(g)=\chi(a)^{-1}$ と定義すると、$g\in\Gamma_0(N)$ のときは $\chi(a)^{-1}=\chi(d)$

であるから、これは前の定義を一致している。次に $J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ 上の作用素 $V_{l,\chi}$ を

$$
\begin{aligned}
&(\phi|_{k,m}V_{l,\chi})(\tau,z)\\
&= l^{k-1}\sum_{g\in\Gamma_0(N)\backslash\Delta_{N,0}(l)}\chi(g)^{-1}\phi|_{k,m}[g]\\
&= l^{k-1}\sum_{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)\backslash\Delta_{N,0}(l)}\chi(a)(c\tau+d)^{-k}e^{lm}\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{lz}{c\tau+d}\right).
\end{aligned}
$$

と定義すると、これは $J_{k,ml}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ への写像になる。(ここの部分が B. Ramakrishnan の論文では間違っている。すべての論文で同じ間違いをしているのであまり偶然とは思えないが、そのあとの証明も明らかとしか書いていないので、よくわからない。)

これを用いて、$\phi(\tau,z)\in J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ に対して、

$$(L_{N,\chi}\phi)(Z)=\sum_{l=1}^{\infty}(\phi|_{k,1}V_{l,\chi})(\tau,z)e^l(\omega).$$

と定義する。念のために断っておくが、$\chi(-1)=(-1)^k$ でなければ、$\phi=0$ であるからこの写像はゼロになる。たとえば χ が trivial で k が奇数ならば、Saito-Kurokawa lift はそもそもゼロ以外にない。具体的にシフト作用素を半群の代表で表示して、フーリエ展開を書き下すと

$$\phi(\tau,z)=\sum_{n,r,4n-r^2>0}c(4n-r^2)q^n\zeta^r$$

とするとき、$Z=\begin{pmatrix}\tau&z\\z&\omega\end{pmatrix}\in H_2$ に対して、

$$(L_{N,\chi}\phi)(Z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n,r\in\mathbb{Z},4mn-r^2>0}\sum_{a|(n,m,r),(a,N)=1}\chi(a)a^{k-1}c\left(\frac{4nm-r^2}{a^2}\right)q^n\zeta^r e(m\omega)$$

となる。

Theorem 3.1. $L_{N,\chi}$ は $J_{k,1}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ から $S_k(\Gamma_0^{(2)}(N),\chi)$ への単射線形写像を与える。

証明のキーポイントは２つある。ひとつは離散群の生成元に関する補題である。次の記号を用意する。

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

また任意の $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $S = {}^tS \in M_2(\mathbb{R})$ に対して

$$u(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \iota(g)=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u(S)=\begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}.$$

そこで $\Gamma_0^{(2)}(N)$ の生成元は次で与えられる。

Lemma 3.2 (Aoki-Ibukiyama [2] p. 265 Lemma 6.2)**.** 任意の自然数 N に対して、群 $\Gamma_0^{(2)}(N)$ は次で生成される。R, $u(x)$, $u(S)$ および $\iota(M)$. ここで x, S, M は $x \in \mathbb{Z}$, $S = {}^tS \in M_2(\mathbb{Z})$, $M \in \Gamma_0(N)$ を動く。

補題の証明は省略する。

フーリエ展開の形から $L_{N,\chi}(\phi)$ は R の作用で不変であり、フーリエヤコービ展開から他の生成元でも不変である。(χ の部分を付ければ不変という意味である。）よって群の作用で不変なのは明らかである。カスプ形式であるのは次の補題による。まず 1 次元カスプに対応する $Sp(2,\mathbb{Q})$ の極大放物部分群 P_1 を前と同様

$$P_1(\mathbb{Q})=\left\{\begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{Q})\right\}$$

で定義する。

Lemma 3.3. ダブルコセット $\Gamma_0^{(2)}(N)\backslash Sp(2,\mathbb{Q})/P_1(\mathbb{Q})$ の代表は $P_1(\mathbb{Q})R$ の元にとることができる。ここで R は前に定義した通りである。

補題の証明は省略する。

この補題からわかることは、$A_k(\Gamma_0(N),\chi)$ の元 F をフーリエヤコービ展開したときに、index 0 の部分がゼロで、かつフーリエヤコービ係数がヤコービカスプ形式ならば、F はカスプ形式ということである。

注： サマースクールの講演中にはこのことを少し言い間違えて、$i1_2$ でのフーリエ展開 $F(Z)=\sum_T a(T)e(Tr(TZ))$ の係数 $a(T)$ が $T>0$ 以外で消えたらカスプ形式、と主張してしまった。これは軍司君の指摘によれば正しくない。言い換えるとフーリエヤコービ係数がカスプ形式という主張はこれよりも強い。

3.2. **non-cusp forms.** 出発点の ϕ がカスプ形式でなかったら、前の論法はそのままでは通用しない。どこが正しくないかというと、次の点である。$c(0)$ はゼロとは限らないので、$4nm-r^2=0$ のとき、$q^n\zeta^r e(m\omega)$ の係数 $c(4nm-r^2)=c(0)$ はゼロではない。しかし、今の $L_{N,\chi}\phi$ の定義では index が 1 以上のところしか動いていないので、$m \geq 1$ となっている。ここで $n=r=0$ のときの係数を考えると $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ の係数がゼロでなく、$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ がゼロになっているので R での不変性がなく

なっている。これを補うためには index 0 の関数、つまりは保型形式を補わなければならない。補い方は定数項を除けば、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ の係数から自動的に決まる。これが適当な定数項を加えれば 1 変数の保型形式、つまり $A_k(\Gamma_0(N),\chi)$ の元になることは証明が必要であるが、これは標準的な議論でできる（たとえば土井・三宅の本を見ればわかる。）よって、この場合にも適合するように $L_{N,\chi}\phi$ の定義を変更することができる。(詳しくは [9] を参照されたい。）よって、結局

Theorem 3.4. $J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ から $A_k(\Gamma_0^{(2)}(N),\chi)$ への単射線形写像 $L_{N,\chi}$ が存在して、フーリエ係数を用いて以上のように具体的に定義される。

注意 1: 以上の定義は関数 ϕ のみにではなく、N と χ の取り方にもよっている。つまり自然に $J_{k,1}(\Gamma_0(N_1)^J,\chi_1)\subset J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ となる場合を考えると、$\phi\in J_{k,1}(\Gamma_0(N_1)^J,\chi_1)$ に対して、$L_{N_1,\chi_1}\phi$ と $L_{N,\chi}\phi$ は一般に関数としては違うものなので、注意が必要である。(表現のレベルでは同じであるが。）たとえば Saito-Kurokawa lift を用いて、$A_k(\Gamma_0(N),\chi)$ の元を構成しようと思う時などには違う方がかえって都合がよいともいえるが、同じ表現空間に属しているものがすべてこれで構成できるわけでもないので、少し中途半端なところもあり、どのように考えるべきかは私はよく理解していない。

注意 2: Gritsenko によれば $J_{k,t}(SL_2(\mathbb{Z})^J)$ から paramodular form of level t への Saito-Kurokawa lift にあたるものが得られている。(類似のことをたぶん R. Schmidt が表現論的にやっている。）Skoruppa-Zagier [21] によれば、たとえば素数 p, k 偶数に対しては $J_{k,p}(SL_2(\mathbb{Z})^J)$ は $A_{2k-2}(\Gamma_0^*(p))$ ($\Gamma_0^*(p)$ は $\Gamma_0(p)$ の normalizer) と対応しているので、ここからは同時に $A_k(\Gamma_0^{(2)}(N))$ への Saito Kurokawar lift があるはずである。一方で、たとえば $J_{k,p}(SL_2(\mathbb{Z}))$ から $J_{k,1}(\Gamma_0(p)^J)$ への単射を直接構成することができる ([9])。よって、全体をスムーズに理解するためには、ヤコービ形式の方で、index の変更をこめた new form, old form 等の理論がもっと整備される方が好ましいと思うが、今のところ、たぶんきちんとした一般論は無いのではないかと思う。

4. Hecke theory と L 関数の比較

ヤコービ形式上の index を変えないヘッケ作用素と、ジーゲル保型形式上のヘッケ作用素を定義して、L 関数の関係についてみる。レベルを割る素数 p に対して、L 関数のヘッケ作用素をどう定義するかは、局所的な表現によるので、一般に一律に述べることはできないと思うが、とりあえずの定義を述べておく。ヤコービ形式 ϕ に作用するヘッケ作用素について、index を割る素数は bad prime であって、これは当然面倒であるので、$\phi\in J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ に限定して述べる。

$p\nmid N$ のとき

$$\phi|_{k,\chi}T_J(p)=p^{k-4}\sum_{g_\nu}\sum_{(\lambda,\mu)\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2}\chi(a_\nu)\phi|_{k,1}[g_\nu/p]|_1[\lambda,\mu] \tag{6}$$

と定義する。ここで a_ν は g_ν の $(1,1)$ 成分であり、また g_ν は

$$\Gamma_0(N)\backslash\{g \in \Delta_{0,N}(p^2); gcd(g) = \square\}. \tag{7}$$

の代表を渉る。ただし、$\square$ は平方数、$gcd(g)$ は g の成分の最大公約数を表す。

$p|N$ のときは、ヘッケ作用素 $U_J(p)$ を (6) と同じ式だが、g_ν の動く範囲を

$$\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^2\end{pmatrix}\Gamma_0(N) = \bigcup_{b \bmod p^2}\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & p^2\end{pmatrix}. \tag{8}$$

としたもので定義する。ϕ が $T_J(p)$ と $U_J(p)$ の同時固有関数のときは、その固有値を $\lambda_J(p)$ と書く。

次にジーゲル保型形式 $F \in A_k(\Gamma_0^{(2)}(N), \chi)$ と、群の元 $g \in GSp^+(2,\mathbb{Q}) \cap M_4(\mathbb{Z})$ で決まるダブルコセット

$$T = \Gamma_0^{(2)}(N) g \Gamma_0^{(2)}(N) = \bigcup_\nu \Gamma_0^{(2)}(N)\begin{pmatrix}A_\nu & B_\nu\\ C_\nu & D_\nu\end{pmatrix}.$$

に対して、

$$F|_{k,\chi}T = n(g)^{2k-3}\sum_\nu \chi(\det(A_\nu))\det(C_\nu Z+D_\nu)^{-k}F((A_\nu Z+B_\nu)(C_\nu Z+D_\nu)^{-1}).$$

と定義する。さて、 $p \nmid N$ なる素数 p について、$a+c=b+d$ のとき

$$T_S(p^a,p^b,p^c,p^d) = \Gamma_0^{(2)}(N)\begin{pmatrix}p^a & 0 & 0 & 0\\ 0 & p^b & 0 & 0\\ 0 & 0 & p^c & 0\\ 0 & 0 & 0 & p^d\end{pmatrix}\Gamma_0^{(2)}(N).$$

と書く。さらに $T_S(p) = T_S(1,1,p,p)$, $T_S(p^2) = T_S(1,p,p^2,p) + T(1,1,p^2,p^2) + T_S(p,p,p,p)$ と置く。一方で $p|N$ なる素数 p に対して

$$U_S(p) = \Gamma_0^{(2)}(N)\mathrm{diag}(1,1,p,p)\Gamma_0^{(2)}(N)$$

とおく。F が $T_S(p)$, $T_S(1,p,p^2,p)$, $U_S(p)$ の固有関数のときに、対応する固有値を $\lambda(p)$, $\omega(p^2)$, $\mu(p)$ と書き、F の L 関数（いわゆる Spinor L) を

$$L(s,F) = \prod_{p|N}(1-\mu(p)p^{-s})^{-1}\prod_{p\nmid N}Q_p(p^{-s})^{-1}$$

と定義する。ただしここで、

$$\begin{aligned} Q_p(p^{-s}) &= 1-\lambda(p)p^{-s} + (p\omega(p^2) + (p^2+1)\chi(p)^2p^{2k-5})p^{-2s}\\ &\quad -\lambda(p)\chi(p)^2p^{2k-3-3s} + \chi(p)^4p^{4k-6-4s}. \end{aligned}$$

と置いた。

Theorem 4.1. $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ が $T_J(p)$ $(p \nmid N)$, $U_J(p)$ $(p|N)$ の同時固有関数として、これらの固有値を $\lambda_J(p)$ と書くことにする。このとき $L_{N,\chi}\phi$ も $T_S(p)$, $T_S(p^2)$, $U_S(p)$ の同時固有関数であり、

$$\begin{aligned} L(s, L_{N,\chi}\phi) &= L(s-k+1,\chi)L(s-k+2,\chi) \\ &\quad \times \prod_{p|N}(1-\lambda_J(p)p^{-s})^{-1}\prod_{p\nmid N}(1-\lambda_J(p)p^{-s}+\chi(p)^2p^{2k-3-2s})^{-1} \end{aligned}$$

となる。ただし、$L(s,\chi)$ は *Dirichlet* の L 関数である。

とくに ϕ の定数項がゼロでないときは

$$L(s, L_{N,\chi}\phi) = \zeta(s)L(s-2k+3,\chi^2)L(s-k+1,\chi)L(s-k+2,\chi),$$

となる。ここで $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数である。

また、右辺の $p \nmid N$ でのオイラー因子は、$J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ の Kohnen plus space $A^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4N),\chi) \subset A_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ との１対１を考え、更に Shimura 対応を通じて $A_{2k-2}(\Gamma_0(N),\chi^2)$ と対応させたときの、$A_{2k-2}(\Gamma_0(N),\chi^2)$ のオイラー因子の形をしており、もともとの Saito-Kurokawa lift の形と一致している。

証明は、ヘッケ作用素の定義と $L_{N,\chi}(\phi)|T_S(p)$ などのフーリエ係数の ϕ の係数による表示をもとに、定義通りに延々と場合分けして計算することにつきる。ヘッケ作用素を決めるコセットの代表元とそのフーリエ係数への作用の仕方などは、昔から Andrianov などによりよく知られている。この計算はかなり面倒であるが、証明の方針ははっきりしているので、結果を信じる限りは、計算を完遂しきることはそれほど困難ではない。Eichler-Zagier では、lift された空間がヘッケ作用素で不変であるということについて Andrianov [1] に依拠しているので、その分やさしくなっているが、レベル一般ではこの部分も補わねばならないのが証明が長くなる理由である。詳しくは [9] を参照されたい。

References

[1] A. N. Andrianov, Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture, Invent Math. **53** (1979), no.3, 267–280.

[2] H. Aoki and T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products, Internat. J. Math. 16(2005), 249–279.

[3] T. Arakawa, Saito-Kurokawa lifting for odd weights. Comment. Math. Univ. St. Paul. 49 (2000), no. 2, 159–176.

[4] W. Duke and Ö. Imamoḡlu, A converse theorem and the Saito-Kurokawa lift, Internat. Math. Res. Notices (1996), no.7, 347–355.

[5] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, Birkhäuser, 1985, Boston-Basel-Stuttgart.

[6] V. Gritsenko, Irrationality of the moduli spaces of polarized abelian surfaces, in *Abelian Varieties* ed. W. Barth, K. Hulek, H. Lange, de Gruyter(1995), 63–81.

[7] 伊吹山知義、A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoḡlu, 第５回整数論サマースクール「Siegel 保型形式入門」報告集、(1997), 134–176.

[8] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials, Commentarii Math. Univ. St. Pauli 48(1999), 103–118.
[9] T. Ibukiyama, Saito Kurokawa liftings of level N and practical construction of Jacobi forms, to appear in Kyoto J. Math. Vol. 52 No. 1(2012).
[10] T. Ibukiyama, Taylor expansions of Jacobi forms and applications to explicit structures of degree two. to appear in Publication RIMS.
[11] J. Igusa, On the graded ring of theta constants, Amer. J. Math. 86(1964), 219–246; (II) ibid. 86(1966), 221–236.
[12] H. Kojima, On construction of Siegel modular forms of degree two, J. Math. Soc. Japan **34**(1982), no. 3, 393–412.
[13] J. Kramer, Jacobiformen und Thetareihen, Manusctipta Math. **54** (1986), 279–322.
[14] N. Kurokawa, Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Invent. Math. **49**(1978), no.2, 129–165.
[15] H. Maaß, Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades, Math. Ann. **232**, (1978), 163–175.
[16] H. Maaß, Über eine Spezialshar von Modulformen zweiten Grades, Invent Math. **52**(1979) no.1 95–104; (II) ibid. **53**(1979), no.3 249–253; (III)ibid. **53** (1979), no.3, 255–265.
[17] H. Maaß, Über ein Analogon zure Vermutung von Saito-Kurokawa, Invent. Math. **60** (1980), 85–104.
[18] I. Makino, Dirichlet series corresponding to Siegel modular forms of degree 2, level N, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **28**(1978), no.1, 21–49. Correction: ibid.,**29** (1979), no.1, 29–30.
[19] C. Poor ande D. Yuen, A lift into Siegel modular forms over the theta group in degree two and the chiral superstring measure, MPI preprint series 2010(64).
[20] 清水英男、「保型関数」I, II, III. 岩波基礎数学講座、岩波書店
[21] N.-P. Skoruppa and D. Zagier, Jacobi forms and a certain space of modular forms. Invent. Math. 94 (1988), no. 1, 113–146.
[22] D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa(d'après H. Maass), Seminaire Delange Pisot-Poitou, Paris 1979-80, Progr. Math. 12, Birkhäuser, Boston, Mass. (1981), 371–394.
[23] C. Ziegler, Jacobi forms of higher degree, Abh. Math. Scm. Univ. Hamburg 59 (1989), 191–224.

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail address: `ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp`