テータ関数の変換公式

宮崎 直*

1 はじめに

1.1 序文

本稿の目的は，新谷氏の論文 [Shn] に沿って，テータ関数の変換公式 (一般化された Poisson 和公式) を解説する事である．§2 で Weil 表現からテータ関数の変換公式が導出される過程について説明し，§3 でテータ関数を $SL(2, \mathbf{R}) \times SO(p,q)$ の被覆群に制限した場合についての具体的な計算を紹介する．§3 での計算は，保型形式のテータリフトの 1 種である織田リフトにおいて重要な役割を果たす．織田リフトについての詳細は，菅野氏による解説 [Su] を参照されたい．

本稿のおおまかな流れは [Shn] に従っているが，Heisenberg 群や Weil 表現の定義は現在よく使われているものに変更した．また，本稿を書くにあたっては，[Ta] を参考にさせて頂いた．

1.2 記号について

$z \in \mathbf{C}$ に対して，$\mathbf{e}[z] = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ とおき，$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$ を $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z^{\frac{1}{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる．さらに，$k \in \mathbf{Z}$ に対して，$z^{\frac{k}{2}} = (z^{\frac{1}{2}})^k$ とおく．$t \in \mathbf{R}^\times$ に対して，$\operatorname{sgn} t = t/|t|$ とおく．絶対値 1 の複素数のなす乗法群を $\mathbf{C}^1 = \{z \in \mathbf{C}^\times \mid |z| = 1\}$ と表記する．

$\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に対して，V 上の急減少関数のなす空間を $\mathcal{S}(V)$，滑らかな関数のなす空間を $C^\infty(V)$，2 乗可積分な関数のなす空間を $L^2(V)$ と表記する．また，正の整数 m に対して，$\mathbf{R}^m$ の元は行ベクトルとして扱うものとする．

2 テータ関数の変換公式

2.1 Heisenberg 群

W を $\mathbf{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間とし，$\langle , \rangle$ を W 上の非退化交代形式とする．$W = X \oplus X^*$ を W の偏極 (つまり，X, X^* は $\langle X, X \rangle = \langle X^*, X^* \rangle = 0$, $\dim_{\mathbf{R}} X = \dim_{\mathbf{R}} X^* = n$, $W = X \oplus X^*$

*Department of Mathematics, Rikkyo University, Nishi-Ikebukuro, Tokyo 171-8501, Japan
miyaza@ms.u-tokyo.ac.jp

をみたす W の部分空間) とし，固定しておく．以下，W の元 w が $w=x+x^*$ $(x\in X,\ x^*\in X^*)$ と分解されるとき，$w=x\oplus x^*$ と表記する事にする．

X の基底 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ と X^* の基底 $\{e_1^*,e_2^*\cdots,e_n^*\}$ を $\langle e_i,e_j^*\rangle=\delta_{i,j}$ となるようにとる．X 上の座標を $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ $(x_i\in\mathbf{R})$ で定めて，X 上の測度 dx を $dx=\prod_{i=1}^n dx_i$ で定義する．また，X^* 上の座標を $x^*=\sum_{i=1}^n x_i^*e_i^*$ $(x_i^*\in\mathbf{R})$ で定めて，X^* 上の測度 d^*x^* を $d^*x^*=\prod_{i=1}^n dx_i^*$ で定義する．ここで，dx_i,dx_i^* は $\mathbf{R}$ 上の通常の Lebesgue 測度であるとする．このとき，$f\in\mathcal{S}(X)$ に対して，Fourier 変換を

$$\hat{f}(x^*)=\int_X f(x)\mathbf{e}[-\langle x,x^*\rangle]dx \qquad (x^*\in X^*)$$

で定義し，$f\in\mathcal{S}(X^*)$ に対して，逆 Fourier 変換を

$$\check{f}(x)=\int_{X^*} f(x^*)\mathbf{e}[\langle x,x^*\rangle]d^*x^* \qquad (x\in X)$$

で定義すると，Fourier 反転公式 $\check{\hat{f}}=f$ が任意の $f\in\mathcal{S}(X)$ で成立する．

集合 $H(W)=W\times\mathbf{R}$ に演算を

$$(w,t)\cdot(w',t')=\left(w+w',\ t+t'+\frac{1}{2}\langle w,w'\rangle\right) \qquad (w,w'\in W,\ t,t'\in\mathbf{R})$$

で定める事で定義される群を Heisenberg 群という．このとき，$H(W)$ の中心は $Z(H(W))=\{(0,t)\in H(W)\mid t\in\mathbf{R}\}\simeq\mathbf{R}$ である．

任意の $r\in\mathbf{R}^\times$ に対して，$H(W)$ の $L^2(X)$ 上のユニタリ表現 U_r を

$$U_r(h)f(y)=\mathbf{e}\left[r\left(t+\frac{1}{2}\langle x,x^*\rangle+\langle y,x^*\rangle\right)\right]f(y+x)$$
$$(h=(x\oplus x^*,t)\in H(W),\ f\in L^2(X))$$

によって定義する．Heisenberg 群の表現を扱う上では，次の 3 つの定理は基本的である．

定理 2.1. 任意の $r\in\mathbf{R}^\times$ に対して，$(U_r,L^2(X))$ は $H(W)$ の既約ユニタリ表現である．

定理 2.2 (Stone-von Neumann の定理)**.** $r\in\mathbf{R}^\times$ とする．$H(W)$ の既約ユニタリ表現 (Π,V_Π) が $\Pi(0,t)=\mathbf{e}[rt]$ $(t\in\mathbf{R})$ をみたすとき，(Π,V_Π) は $(U_r,L^2(X))$ とユニタリ同値である．

定理 2.3 (Schur の補題)**.** $(\Pi,V_\Pi),(\Pi',V_{\Pi'})$ を $H(W)$ の既約ユニタリ表現とする．このとき，(Π,V_Π) から $(\Pi',V_{\Pi'})$ への連続 $H(W)$-準同型写像全体のなす空間は高々1 次元である．

今後，U_1 を U と略記する事にする．

2.2 R 上での Weil 表現

この節では，$\mathbf{R}$ 上での Weil 表現について復習する．詳しくは，松本氏による解説 [Ma] を参照されたい．

$Sp(W)$ を W 上の斜交群，すなわち，

$$Sp(W) = \{\sigma \in GL(W) \mid \langle w\sigma, w'\sigma\rangle = \langle w, w'\rangle \ (\forall w, w' \in W)\}$$

とする．ここで，$GL(W)$ は W に右から作用しているものとする．$Sp(W)$ の $H(W)$ への右作用を

$$h^\sigma = (w\sigma, t) \qquad\qquad (h = (w,t) \in H(W),\ \sigma \in Sp(W))$$

で定義しておく．

$L^2(X)$ のユニタリ自己同型写像 T 全体のなす群 $\mathrm{Aut}(L^2(X))$ は全ての $f \in L^2(X)$ に対して $T \mapsto Tf$ が連続となる最弱の位相に関して Hausdorff 位相群になる．$Mp(W)$ を

$$U(h^\sigma) = T^{-1} \circ U(h) \circ T \qquad\qquad (\forall h \in H(W)) \tag{2.1}$$

をみたす (σ, T) のなす $Sp(W) \times \mathrm{Aut}(L^2(X))$ の部分群とすると，$Mp(W)$ は部分位相によって局所 compact な Hausdorff 位相群となる．ここで，Stone-von Neumann の定理より，射影 $Mp(W) \ni (\sigma, T) \mapsto \sigma \in Sp(W)$ は全射である事に注意しておく．

$Mp(W)$ の部分群として，$Sp(W)$ の 2 重被覆群を構成しよう．そのために少し準備をする．$\sigma \in Sp(W)$ に対して，

$$w\sigma = (xa + x^*c) \oplus (xb + x^*d) \qquad\qquad (\forall w = x \oplus x^* \in W)$$

によって定まる $a \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X),\ b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X, X^*),\ c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X),\ d \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X^*)$ をとり，$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と行列表示する．また，$c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X)$ に対して，$\det^* c = \det(\langle e_i^* c,\ e_j^*\rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$ と定義する．

$\det^* c \neq 0$ となる $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(W)$ に対して，$\mathrm{r}_0(\sigma) \in \mathrm{Aut}(L^2(X))$ を

$$(\mathrm{r}_0(\sigma)f)(x) = |\det^* c|^{\frac{1}{2}} \int_{X^*} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\langle xa + x^*c, xb + x^*d\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x^*\rangle\right] f(xa + x^*c)d^*x^* \qquad (f \in \mathcal{S}(X))$$

を連続に拡張したものとして定義する．このとき，$\mathrm{r}(\sigma) = (\sigma, \mathrm{r}_0(\sigma)) \in Mp(W)$ であり，次の (1),(2) をみたす連続群準同型写像 $\Psi \colon Mp(W) \to \mathbf{C}^1$ が唯 1 つ存在する:

(1) $\Psi(1, t) = t^2 \quad (\forall t \in \mathbf{C}^1)$,

(2) $\Psi(\mathrm{r}(\sigma)) = (\sqrt{-1})^n \dfrac{\det^* c}{|\det^* c|} \quad \left(\forall \sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(W) \ \text{ s.t. } \det^* c \neq 0\right)$.

ここで，$\widetilde{Sp}(W) = \operatorname{Ker}\Psi$ とおくと，連続群準同型写像

$$\varpi\colon \widetilde{Sp}(W) \ni (\sigma, T) \mapsto \sigma \in Sp(W)$$

は全射で $\operatorname{Ker}\varpi = \{(1, \pm 1)\}$ であり，$\widetilde{Sp}(W)$ は $Sp(W)$ の非自明な 2 重被覆群になっている．

このとき，$\widetilde{Sp}(W)$ の $L^2(X)$ 上のユニタリ表現が

$$\omega\colon \widetilde{Sp}(W) \ni (\sigma, T) \mapsto T \in \operatorname{Aut}(L^2(X))$$

により定義される．このユニタリ表現 $(\omega, L^2(X))$ を Weil 表現という．

Ψ の性質 (1),(2) と Schur の補題より，$\varpi(\tilde{\sigma}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(\det^* c \neq 0)$ となる $\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(W)$ に対して，ある複素数 $\epsilon_\omega(\tilde{\sigma})$ が存在して，$\{\epsilon_\omega(\tilde{\sigma})\}^2 = \left((\sqrt{-1})^n \dfrac{\det^* c}{|\det^* c|}\right)^{-1}$ かつ $\omega(\tilde{\sigma}) = \epsilon_\omega(\tilde{\sigma})\mathrm{r}_0(\varpi(\tilde{\sigma}))$ が成立する．

2.3 誘導表現

L と L' をそれぞれ X と X^* の $\mathbf{Z}$-格子とし，$\psi\colon \Lambda \to \mathbf{C}^\times$ を $H(W)$ の部分群 $\Lambda = (L \oplus L') \times \mathbf{R}$ のユニタリ指標とする．ここで，ψ から誘導される $H(W)$ のユニタリ表現 $(\rho_\psi, I_\Lambda(\psi))$ を定義しよう．表現空間 $I_\Lambda(\psi)$ を

$$I_\Lambda(\psi)^\infty = \{\theta \in C^\infty(H(W)) \mid \theta(\lambda h) = \psi(\lambda)\theta(h)\ (\forall \lambda \in \Lambda)\}$$

を内積

$$\begin{aligned} \langle \theta_1, \theta_2 \rangle_\Lambda &= \int_{\Lambda\backslash H(W)} \theta_1(h)\overline{\theta_2(h)}dh \qquad (2.2) \\ &= \frac{1}{\operatorname{vol}(X^*/L')} \int_{(X/L)\times(X^*/L')} \theta_1(x \oplus x^*, 0)\overline{\theta_2(x \oplus x^*, 0)}dxd^*x^* \end{aligned}$$

について完備化した Hilbert 空間とし，$H(W)$ の作用を右移動

$$\rho_\psi(h)\theta(z) = \theta(zh) \qquad (h \in H(W),\ \theta \in I_\Lambda(\psi))$$

で定める．ここで，$\operatorname{vol}(X^*/L') = \displaystyle\int_{X^*/L'} d^*x^*$ とし，dh は (2.2) の 2 つめの等号が成立するような $\Lambda\backslash H(W)$ 上の右 $H(W)$ 不変測度とする．この dh の正規化の仕方は少し不自然だが，この後の議論をする上で都合が良い．

X の $\mathbf{Z}$-格子 L に対して，L の $\langle,\rangle$ に関する双対格子 $L^* = \{l^* \in X^* \mid \langle l, l^* \rangle \in \mathbf{Z}\ (\forall l \in L)\}$ をとる．M^* を L^* の部分格子とし，M^* の $\langle,\rangle$ に関する双対格子 $M = \{l \in X \mid \langle l, l^* \rangle \in \mathbf{Z}\ (\forall l^* \in M^*)\}$ をとる．つまり，

$$\begin{array}{ccccc} L & \subset & M & \cdots & X \text{ の } \mathbf{Z}\text{-格子} \\ \text{双対}\updownarrow & & \text{双対}\updownarrow & & \\ L^* & \supset & M^* & \cdots & X^* \text{の } \mathbf{Z}\text{-格子} \end{array}$$

とする．$\Lambda_0 = (L \oplus L^*) \times \mathbf{R}$, $\Lambda_1 = (L \oplus M^*) \times \mathbf{R} \subset H(W)$ とおく．Λ_1 のユニタリ指標 $\chi \colon \Lambda_1 \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\chi(\lambda) = \mathbf{e}\left[t + \frac{1}{2}\langle l, l^* \rangle\right] \qquad\qquad (\lambda = (l \oplus l^*, t) \in \Lambda_1)$$

で定義する．$\mu \in M/L$ に対して，Λ_0 のユニタリ指標 $\chi_\mu \colon \Lambda_0 \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\chi_\mu(\lambda) = \mathbf{e}\left[t + \frac{1}{2}\langle l, l^* \rangle + \langle \mu, l^* \rangle\right] \qquad\qquad (\lambda = (l \oplus l^*, t) \in \Lambda_0)$$

で定義する．このとき，$\chi_\mu|_{\Lambda_1} = \chi$ だから $I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ は $I_{\Lambda_1}(\chi)$ の $H(W)$-不変な閉部分空間であり，簡単な議論によって，

$$I_{\Lambda_1}(\chi) = \bigoplus_{\mu \in M/L} I_{\Lambda_0}(\chi_\mu) \tag{2.3}$$

と分解される事が分かる．実際，$\theta \in I_{\Lambda_1}(\chi)$ に対して，$\theta^\mu \in I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ を

$$\theta^\mu(h) = \frac{1}{\#(M/L)} \sum_{\lambda \in \Lambda_1 \backslash \Lambda_0} \chi_\mu(\lambda)^{-1} \theta(\lambda h)$$

で定義すると，$\theta = \sum_{\mu \in M/L} \theta^\mu$ が成立する．ここで，$\#(M/L)$ は M/L の位数を表す．

命題 2.4. 以下が成立する:

(1) $I_{\Lambda_1}(\chi)$ の分解 (2.3) は内積 $\langle , \rangle_{\Lambda_1}$ に関する直交分解である．

(2) $\mu \in M/L$ と $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，$\Theta_{\chi_\mu}(f) \in I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ を

$$\Theta_{\chi_\mu}(f)(h) = \sum_{l \in L} \mathbf{e}\left[t + \frac{1}{2}\langle x, x^* \rangle + \langle \mu + l, x^* \rangle\right] f(x + \mu + l) \quad (h = (x \oplus x^*, t) \in H(W))$$

で定義する．このとき，Θ_{χ_μ} を連続に拡張して $L^2(X)$ から $I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ へのユニタリ $H(W)$-同型写像が得られる．

(3) $\nu \in M/L$ と $\theta \in I_{\Lambda_1}(\chi)^\infty$ に対して，$F_{\chi_\nu}(\theta) \in L^2(X)$ を

$$F_{\chi_\nu}(\theta)(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(X^*/M^*)} \int_{X^*/M^*} \theta((x - \nu) \oplus x^*, 0) \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\langle x + \nu, x^* \rangle\right] d^*x^* \quad (x \in X)$$

で定義する．このとき，F_{χ_ν} を連続に拡張して $(\rho_\chi, I_{\Lambda_1}(\chi))$ から $(U, L^2(X))$ への連続 $H(W)$-準同型写像が得られる．

(4) (2),(3) で定義した Θ_{χ_μ} と F_{χ_ν} に対して，

$$F_{\chi_\nu} \circ \Theta_{\chi_\nu} = \mathrm{id}_{L^2(X)}, \qquad\qquad F_{\chi_\nu} \circ \Theta_{\chi_\mu} = 0 \quad (\nu \neq \mu)$$

が成立する．

この命題は Fourier 級数展開の理論と指標の直交性を用いれば，直接計算によって確かめる事ができる．分解 (2.3) において，$\langle , \rangle_{\Lambda_1}$ を各 $I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ に制限して得られる内積は，$\langle , \rangle_{\Lambda_0}$ と一致する．また，この命題と Schur の補題より，$(U, L^2(X))$ から $(\rho_\chi, I_{\Lambda_1}(\chi))$ への連続 $H(W)$-準同型写像は Θ_{χ_μ} 達の線型結合で表せる事に注意しておこう．

2.4 テータ関数の変換公式

$Sp(L \oplus M^*)$ を

$$(L \oplus M^*)\gamma = L \oplus M^*, \qquad \chi(\lambda^\gamma) = \chi(\lambda) \quad (\forall \lambda \in \Lambda_1)$$

をみたす $\gamma \in Sp(W)$ のなす $Sp(W)$ の部分群とし．$\widetilde{Sp}(L \oplus M^*) = \varpi^{-1}(Sp(L \oplus M^*))$ とおく．また，$\mu \in M/L$ と $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，$\widetilde{Sp}(W)$ 上のテータ関数 $\vartheta_f(\tilde{\sigma};\mu)$ を

$$\vartheta_f(\tilde{\sigma};\mu) = \Theta_{\chi_\mu}(\omega(\tilde{\sigma})f)(0,0) = \sum_{l \in L}(\omega(\tilde{\sigma})f)(x+\mu+l)$$

で定義する．

定理 2.5 (テータ関数の変換公式)**.** $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*)$ と $\mu \in M/L$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\gamma}\tilde{\sigma};\mu) = \sum_{\nu \in M/L} C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\vartheta_f(\tilde{\sigma};\nu) \qquad (\forall f \in \mathcal{S}(X)) \tag{2.4}$$

が成立するような複素数 $C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)$ $(\nu \in M/L)$ が存在する．

$M/L = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ $(N = \#(M/L))$ とおくと，行列 $C_{\tilde{\gamma}} = (C_{\tilde{\gamma}}(\mu_i,\mu_j))_{i,j=1,\cdots,N}$ はユニタリ行列であり，$C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2} = C_{\tilde{\gamma}_1}C_{\tilde{\gamma}_2}$ $(\forall \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*))$ が成立する．

さらに，$\varpi(\tilde{\gamma}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と表すと $\det^* c \neq 0$ となるとき，$C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)$ は，

$$\begin{aligned} &C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu) \\ &= \frac{\epsilon_\omega(\tilde{\gamma})|\det^* c|^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{vol}(X^*/M^*)} \sum_{l \in L/M^*c^*} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\langle \mu+l, (\mu+l)ac^{-1}\rangle - \langle \mu+l, \nu c^{-1}\rangle + \frac{1}{2}\langle \nu, \nu c^{-1}d\rangle\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

で与えられる．ここで，c^* は $\langle x_1^*c, x_2^*\rangle = \langle x_2^*c^*, x_1^*\rangle$ $(\forall x_1^*, x_2^* \in X^*)$ で定まる $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X)$ の元とする．

証明. 群準同型写像 $Sp(L \oplus M^*) \ni \gamma \mapsto \Xi_\gamma \in \mathrm{Aut}(I_{\Lambda_1}(\chi))$ を $(\Xi_\gamma\theta)(h) = \theta(h^\gamma)$ $(\theta \in I_{\Lambda_1}(\chi))$ で定義すると，$\Xi_\gamma \circ \rho_\chi(h^\gamma) = \rho_\chi(h) \circ \Xi_\gamma$ $(\forall h \in H(W))$ が成立する．よって，$\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*)$ に対して，$\gamma = \varpi(\tilde{\gamma})$ とおくと，$\Xi_{\gamma^{-1}} \circ \Theta_{\chi_\mu} \circ \omega(\tilde{\gamma})$ は $(U, L^2(X))$ から $(\rho_\chi, I_{\Lambda_1}(\chi))$ へのユニタリ $H(W)$-準同型写像になる．よって，ある複素数 $C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)$ $(\nu \in M/L)$ が存在して，

$$\Xi_{\gamma^{-1}} \circ \Theta_{\chi_\mu} \circ \omega(\tilde{\gamma}) = \sum_{\nu \in M/L} C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\Theta_{\chi_\nu} \tag{2.6}$$

が成立する．この両辺による $\omega(\tilde{\sigma})f$ $(\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(W), f \in \mathcal{S}(X))$ の像を考え，$(0,0) \in H(W)$ での値をとると (2.4) が得られる．

また，$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*)$ に対して，$\gamma_1 = \varpi(\tilde{\gamma}_1)$，$\gamma_2 = \varpi(\tilde{\gamma}_2)$ とおくと，

$$\Xi_{(\gamma_1\gamma_2)^{-1}} \circ \Theta_{\chi_{\mu_i}} \circ \omega(\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2) = \Xi_{\gamma_2^{-1}} \circ (\Xi_{\gamma_1^{-1}} \circ \Theta_{\chi_{\mu_i}} \circ \omega(\tilde{\gamma}_1)) \circ \omega(\tilde{\gamma}_2) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

となる．この両辺に (2.6) を用いると，左辺は $\sum_{j=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2}(\mu_i,\mu_j)\Theta_{\chi_{\mu_j}}$ となり，右辺は

$$\begin{aligned}\Xi_{\gamma_2^{-1}} \circ \left(\sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)\Theta_{\chi_{\mu_k}}\right) \circ \omega(\tilde{\gamma}_2) &= \sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)\left(\sum_{j=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_2}(\mu_k,\mu_j)\Theta_{\chi_{\mu_j}}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)C_{\tilde{\gamma}_2}(\mu_k,\mu_j)\right)\Theta_{\chi_{\mu_j}}\end{aligned}$$

となるから，$C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2}(\mu_i,\mu_j) = \sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)C_{\tilde{\gamma}_2}(\mu_k,\mu_j)$ を得る．これより，$C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2} = C_{\tilde{\gamma}_1}C_{\tilde{\gamma}_2}$ が得られる．

L^2-ノルムの値が 1 であるような $f \in \mathcal{S}(X)$ をとり，

$$\mathbf{V}_f = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbf{C}\Theta_{\chi_{\mu_i}}(f) \subset I_{\Lambda_1}(\chi)$$

とおくと，$C_{\tilde{\gamma}}$ は $\mathbf{V}_f$ 上の 2 種類の正規直交基底 $\{\Xi_{\gamma^{-1}}\Theta_{\chi_{\mu_i}}(\omega(\tilde{\gamma})f)\}_{i=1}^{N}$ と $\{\Theta_{\chi_{\mu_i}}(f)\}_{i=1}^{N}$ の変換行列であるから，ユニタリ行列である．

最後に (2.5) を示す．(2.6) の両辺による $\omega(\tilde{\gamma}^{-1})f$ $(f \in \mathcal{S}(X))$ の像を考えると，

$$\Xi_{\gamma^{-1}}\Theta_{\chi_\mu}(f) = \sum_{\nu \in M/L} C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\Theta_{\chi_\nu}(\omega(\tilde{\gamma}^{-1})f)$$

となる．さらに命題 2.4(4) より，

$$F_{\chi_\nu}(\Xi_{\gamma^{-1}}\Theta_{\chi_\mu}(f)) = C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\omega(\tilde{\gamma}^{-1})f. \tag{2.7}$$

この両辺を定義に基づいて計算して比較する事で，(2.5) が得られる． □

3 $\widetilde{SL}(2,\mathbf{R}) \times SO(Q)$ 上でのテータ級数の変換公式

3.1 簡約双対ペア $(SL(2,\mathbf{R}), O(Q))$

まず，$J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R})$ とおき，$\mathbf{R}^2$ 上の非退化交代形式 $\langle , \rangle_J$ を $\langle r, r' \rangle_J = rJ\,{}^t r'$ $(r, r' \in \mathbf{R}^2)$ で定義する．このとき，$\sigma \in SL(2,\mathbf{R})$ に対して，

$$\langle r\sigma, r'\sigma \rangle_J = \langle r, r' \rangle_J \qquad\qquad (\sigma \in SL(2,\mathbf{R}))$$

が成立する．また，$Q \in M_n(\mathbf{Q})$ を符号 (p,q) の非退化な対称行列，つまり，ある $g_Q \in GL(n,\mathbf{Q})$ が存在して $Q = g_Q \begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix} {}^t g_Q$ が成立するものとし，$p > 0$ と仮定する．$\mathbf{R}^n$ 上に非退化対称形式 $(,)_Q$ を $(x, x')_Q = xQ\,{}^t x'$ $(x, x' \in \mathbf{R}^n)$ で定義し，$(,)_Q$ に関する直交群 $O(Q)$ を

$$O(Q) = \{g \in GL(n,\mathbf{R}) \mid (xg, x'g)_Q = (x, x')_Q \ (\forall x, x' \in \mathbf{R}^n)\}$$

$$= \{g \in GL(n, \mathbf{R}) \mid gQ\,{}^t g = Q\}$$

で定義する．

基本的に，この章では前章と同じ記号を用いるが，W, $\langle , \rangle$, X, X^*, e_i, e_i^* は次のように具体的にとる．$W = \mathbf{R}^n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^2$ とし，W 上の非退化交代形式 $\langle , \rangle$ を

$$\langle x \otimes r, x' \otimes r' \rangle = (x, x')_Q \langle r, r' \rangle_J \qquad (x \otimes r, x' \otimes r' \in W)$$

で定義する．W の偏極 $W = X \oplus X^*$ を

$$X = \mathbf{R}^n \otimes_{\mathbf{R}} (1, 0), \qquad X^* = \mathbf{R}^n \otimes_{\mathbf{R}} (0, 1).$$

として固定し，$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間としての同型写像

$$X \ni x \otimes (1, 0) \mapsto x \in \mathbf{R}^n, \qquad X^* \ni x \otimes (0, 1) \mapsto x \in \mathbf{R}^n$$

によって X, X^* を共に $\mathbf{R}^n$ と同一視する．この同一視の下で，X の基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底 (つまり，e_i は第 i 成分が 1 で他の成分が 0 である $\mathbf{R}^n$ の元) とし，X^* の基底 $\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ を $e_i^* = e_i Q^{-1}$ によって定める．このとき，dx は $\mathbf{R}^n$ 上の通常の Lebesgue 測度であり，$d^*x = |\det Q| dx$ となる．$L^2(X)$ 上の Weil 表現は Q のとり方に依存して決まるため，今後，$\omega(\tilde{\sigma})$，$r_0(\sigma)$ をそれぞれ $\omega(\tilde{\sigma}, Q)$，$r_0(\sigma, Q)$ と書く事にする．

$SL(2, \mathbf{R})$ と $O(Q)$ は，それぞれ

$$\begin{aligned} (x \otimes r)\sigma &= x \otimes (r\sigma) && (x \otimes r \in W,\ \sigma \in SL(2, \mathbf{R})), \\ (x \otimes r)g &= (xg) \otimes r && (x \otimes r \in W,\ g \in O(Q)) \end{aligned}$$

によって定まる W への作用によって $Sp(W)$ の部分群と見なせる．このとき，$(SL(2, \mathbf{R}), O(Q))$ は $Sp(W)$ に含まれる簡約双対ペア，すなわち，

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbf{R}) &= \{\sigma \in Sp(W) \mid \sigma g = g\sigma \ (\forall g \in O(Q))\}, \\ O(Q) &= \{g \in Sp(W) \mid \sigma g = g\sigma \ (\forall \sigma \in SL(2, \mathbf{R}))\} \end{aligned}$$

をみたす．ここで，$SO(Q) = SL(n, \mathbf{R}) \cap O(Q)$ とおく．この章の目標は，$\varpi^{-1}(SL(2, \mathbf{R}))$ と $\varpi^{-1}(SO(Q))$ の構造を明らかにする事と，テータ関数 $\vartheta_f(\tilde{\sigma}; \mu)$ を $SL(2, \mathbf{R})SO(Q) (\subset Sp(W))$ の被覆群に制限した場合についてテータ関数の変換公式をより具体的な形に書き下す事である．

注意 3.1. 本稿では，簡単のためにテータ関数 $\vartheta_f(\tilde{\sigma}; \mu)$ を $SL(2, \mathbf{R})SO(Q)$ の被覆群に制限した場合について考えるが，テータリフトの一般論に従うならば $SL(2, \mathbf{R})O(Q)$ の被覆群に制限した場合について考えるべきである．

3.2 準備

X, X^* と $\mathbf{R}^n$ の同一視によって，$\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X), \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X, X^*), \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X), \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X^*)$ を全て $M_n(\mathbf{R})$ と同一視する．これにより，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $g \in O(Q)$ の $Sp(W)$ の元としての行列表示はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} a1_n & b1_n \\ c1_n & d1_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} g & O_n \\ O_n & g \end{bmatrix}$$

となる．また，$c \in M_n(\mathbf{R})$ に対して，$\det^* c = (\det Q)^{-1} \det c$ となる．これを踏まえると，$c \neq 0$ となる $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，

$$(\mathrm{r}_0(\sigma, Q)f)(x) = |c|^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|\det Q|} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{e}\left[\frac{a(x,x)_Q - 2(x,y)_Q + d(y,y)_Q}{2c}\right] f(y)dy$$

となる事が簡単な変数変換によって分かる．また，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $g \in O(Q)$ に対して，$\mathrm{r}_0(\sigma, Q)$ と $\mathrm{r}_0(g, Q)$ を

$$\mathrm{r}_0(\sigma, Q) = \mathrm{r}_0(\sigma J, Q)\,\mathrm{r}_0\left(J^{-1}, Q\right), \qquad \mathrm{r}_0(g, Q) = \mathrm{r}_0(gJ, Q)\,\mathrm{r}_0\left(J^{-1}, Q\right)$$

で定義すると，Fourier 反転公式より，$f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，

$$(\mathrm{r}_0(\sigma, Q)f)(x) = |a|^{\frac{n}{2}} \mathbf{e}\left[\frac{ab}{2}(x,x)_Q\right] f(xa), \qquad (\mathrm{r}_0(g, Q)f)(x) = f(xg)$$

となる．

一般線型群 $GL(n, \mathbf{R})$ の $L^2(X)$ への作用 R を

$$(R(g)f)(x) = \sqrt{|\det g|} f(xg) \qquad (g \in GL(n, \mathbf{R}), f \in L^2(X))$$

で定義する．このとき，$\mathrm{r}_0(g, Q) = R(g)$ $(\forall g \in O(Q))$ が成立する．また，$\sigma \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，上記の $\mathrm{r}_0(\sigma, Q)$ の作用の式より，

$$\mathrm{r}_0(\sigma, gQ\,{}^t g)R(g) = R(g)\mathrm{r}_0(\sigma, Q) \qquad (g \in GL(n, \mathbf{R})) \tag{3.1}$$

が成立する事も分かる．

3.3 $\varpi^{-1}(SL(2, \mathbf{R}))$ と $\varpi^{-1}(SO(Q))$ の構造

まず，$\varpi^{-1}(SL(2, \mathbf{R}))$ の明示的な記述を与えよう．そのために，少し準備をする．複素上半平面を $\mathfrak{H} = \{z = u + \sqrt{-1}v \mid u, v \in \mathbf{R},\ v > 0\}$ と書く．$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $z \in \mathfrak{H}$

に対して，

$$j(\sigma,z)=cz+d,\qquad \sigma\langle z\rangle=\frac{az+b}{cz+d},\qquad \epsilon(\sigma)=\begin{cases}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} & (c>0\text{ のとき}),\\ (\sqrt{-1})^{\frac{1-\mathrm{sgn}(d)}{2}} & (c=0\text{ のとき}),\\ (\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} & (c<0\text{ のとき}).\end{cases}$$

と定義しておく．$Q=g_Q\begin{pmatrix}1_p & \\ & -1_q\end{pmatrix}{}^tg_Q$ となるような $g_Q\in GL(n,\mathbf{R})$ をとり，正定値対称行列 R を $R=g_Q{}^tg_Q$ で定義する．$z=u+\sqrt{-1}v\in\mathfrak{H}$ に対して，$Q_z=uQ+\sqrt{-1}vR$ とおく．0 以上の整数 k に対して，$P_k(x)$ を次のような表示を持つ X 上の k 次同次多項式とする:

$$\begin{cases}1 & & k=0\text{ のとき},\\ rQ\,{}^tx & (r\in\mathbf{C}^n\ \text{s.t.}\ r(Q-R)=0) & k=1\text{ のとき},\\ \sum_r c_r(rQ\,{}^tx)^k & (c_r\in\mathbf{C},\ r\in\mathbf{C}^n\ \text{s.t.}\ r(Q-R)=0,\ rQ\,{}^tr=0) & k\geq 2\text{ のとき}.\end{cases}\tag{3.2}$$

(ただし，$p=1$ のときは $k\leq 1$ と仮定する．)

補題 3.2. $F_z(x)=\mathbf{e}\left[\frac{1}{2}xQ_z{}^tx\right]P_k(x)\in\mathcal{S}(X)$ とおく．このとき，

$$\mathrm{r}_0(\sigma,Q)F_z(x)=\epsilon(\sigma)^{p-q}j(\sigma,z)^{\frac{q-p}{2}-k}|j(\sigma,z)|^{-q}F_{\sigma\langle z\rangle}(x)$$

が任意の $\sigma\in SL(2,\mathbf{R})$ に対して成立する．

証明. $g\in GL(n,\mathbf{R})$ に対して，$R(g)F_z(x)$ は (3.2) の形の表示を持つある k 次同次多項式 $P'_k(x)$ を用いて，$R(g)F_z(x)=\mathbf{e}\left[\frac{1}{2}x(gQ\,{}^tg)_z{}^tx\right]\sqrt{|\det g|}P'_k(x)$ と表せる．よって，(3.1) より，$Q=\begin{pmatrix}1_p & \\ & -1_q\end{pmatrix}$，$R=1_n$ と仮定して良い．

$\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおく．$c=0$ のときは，§3.2 の $\mathrm{r}_0(\sigma,Q)$ の作用の式より，直ちに主張が得られる．また，$c\neq 0$ のときは §3.2 の $\mathrm{r}_0(\sigma,Q)$ の作用の式より，

$$\begin{aligned}&|c|^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\mathbf{e}\left[\frac{a(x,x)_Q-2(x,y)_Q+d(y,y)_Q}{2c}\right]F_z(y)dy\\ &=|c|^{-\frac{n}{2}}(v-\sqrt{-1}u-\sqrt{-1}d/c)^{-\frac{p}{2}}(v+\sqrt{-1}u+\sqrt{-1}d/c)^{-\frac{q}{2}}j(\sigma,z)^{-k}F_{\sigma\langle z\rangle}(x)\end{aligned}\tag{3.3}$$

を示せば良い事が分かる．$k=0$ のときは (3.3) の左辺を変数変換し，さらに Cauchy の積分定理によって積分路を変える事により，(3.3) の証明はよく知られた公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}dt=1$$

に帰着される．$k>0$ での (3.3) は，$k=0$ での (3.3) の両辺に

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k(az+b)^k}P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\qquad (x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\text{ とする})$$

を作用させる事で得られる．(左辺の計算では，部分積分を用いる．) □

$c \neq 0$ である $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，$\{\epsilon(\sigma)^{p-q}\}^2 = (\sqrt{-1})^n \dfrac{\det^*(c1_n)}{|\det^*(c1_n)|}$ であるから，Ψ の性質 (1),(2) より，$(\sigma, \epsilon(\sigma)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma, Q)) \in \widetilde{Sp}(W) = \mathrm{Ker}\,\Psi$ となる事が分かる．

また，Schur の補題より，$\sigma, \tau \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，

$$(\epsilon(\sigma)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma, Q)) \circ (\epsilon(\tau)^{q-p}\mathrm{r}_0(\tau, Q)) = c(\sigma, \tau)\epsilon(\sigma\tau)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma\tau, Q)$$

となる定数 $c(\sigma, \tau)$ が存在する．このとき，上の補題より，

$$c(\sigma, \tau) = \left\{ \frac{j(\sigma\tau, \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}{j(\sigma, \tau\langle\sqrt{-1}\rangle)^{\frac{1}{2}} j(\tau, \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} \right\}^{p-q}$$

となる事が分かる．

以上により，次の命題が得られた．

命題 3.3. 半直積 $SL(2, \mathbf{R}) \ltimes \{\pm 1\}$ に群演算を

$$(\sigma, t) \cdot (\sigma', t') = \left(\ \sigma\sigma',\ tt'c(\sigma, \sigma')\ \right) \qquad ((\sigma, t), (\sigma', t') \in SL(2, \mathbf{R}) \ltimes \{\pm 1\})$$

で定義する．(n が偶数のときは，普通の直積になる．) このとき，

$$\iota_1 \colon SL(2, \mathbf{R}) \ltimes \{\pm 1\} \ni (\sigma, t) \mapsto (\sigma,\ t\epsilon(\sigma)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma, Q)) \in \widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$$

は群同型写像になる．

次に，$\varpi^{-1}(SO(Q))$ について考える．Ψ の性質 (2) より，$g \in O(Q)$ に対して，

$$\begin{aligned} \Psi(g, \mathrm{r}_0(g, Q)) &= \Psi(gJ, \mathrm{r}_0\,(gJ, Q))\Psi(J^{-1}, \mathrm{r}_0\left(J^{-1}, Q\right)) \\ &= \left\{ (\sqrt{-1})^n \frac{\det^*(-g)}{|\det^*(-g)|} \right\} \left\{ (\sqrt{-1})^n \frac{\det^* 1_n}{|\det^* 1_n|} \right\} = \det g \end{aligned}$$

が成立する．これより，次の命題が得られる．

命題 3.4. $g \in SO(Q)$ に対して，$(g, \mathrm{r}_0(g, Q)) \in \widetilde{Sp}(W) = \mathrm{Ker}\,\Psi$ が成立する．また，群準同型写像

$$\iota_2 \colon SO(Q) \ni g \mapsto (g, \mathrm{r}_0(g, Q)) \in \widetilde{Sp}(W)$$

は被覆写像 $\varpi \colon \widetilde{Sp}(W) \to Sp(W)$ の $SO(Q)$ 上での切断である．

注意 3.5. 上の計算から分かるように，被覆写像 ϖ は $SO(Q)$ 上では自明であるが，$O(Q)$ 上では自明でない．

3.4　テータ関数の変換公式

L を $\mathbf{R}^n$ の $\mathbf{Z}$-格子，$L^* = \{l' \in \mathbf{R}^n \mid (l,l')_Q \in \mathbf{Z}\ (\forall l \in L)\}$ をその双対格子とし．$L^* \supset L$ であると仮定する．今，X, X^* を共に $\mathbf{R}^n$ と同一視しているため，L は前章での L と M^*，L^* は前章での L^* と M にあたる $\mathbf{Z}$-格子であると解釈できる．$f \in \mathcal{S}(X)$ と $\mu \in L^*/L$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\sigma}, g; \mu) = \sum_{l \in L} \omega(\iota_1(\tilde{\sigma})\iota_2(g)) f(\mu + l) \qquad (\tilde{\sigma} \in \widetilde{SL}(2,\mathbf{R}),\ g \in SO(Q))$$

と定義する．このとき，定理 2.5 と若干の計算により次が得られる:

定理 3.6. (1) $\gamma_2 \in SO(Q) \cap GL(n,\mathbf{Z})$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\sigma}, \gamma_2 g; \mu) = \vartheta_f(\tilde{\sigma}, g; \mu\gamma_2).$$

(2) $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z})$ が $ab(l,l)_Q \equiv cd(l,l)_Q \equiv 0 \mod 2 \quad (\forall l \in L)$ をみたすとする．このとき，$\tilde{\gamma}_1 = (\gamma_1, \varepsilon) \in \widetilde{SL}(2,\mathbf{R})$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\gamma}_1\tilde{\sigma}, g; \mu) = \sum_{\nu \in L^*/L} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu)\vartheta_f(\tilde{\sigma}, g; \nu)$$

が $\forall f \in \mathcal{S}(X)$ で成立する．ここで，$C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu)$ は以下で与えられる定数である:

$$C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(\sqrt{-1})^{(q-p)\frac{\operatorname{sgn} c}{2}}}{|c|^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\det Q|}\operatorname{vol}(\mathbf{R}^n/L)} \displaystyle\sum_{l \in L/cL} \mathbf{e}\left[\frac{a(\mu+l,\mu+l)_Q - 2(\mu+l,\nu)_Q + d(\nu,\nu)_Q}{2c}\right] & (c \neq 0 \text{ のとき}), \\ \varepsilon\delta_{\mu,a\nu}(\sqrt{-1})^{(q-p)\frac{1-\operatorname{sgn} d}{2}}\mathbf{e}\left[\dfrac{ab}{2}(\mu,\mu)_Q\right] & (c = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで，$\delta_{\mu,\mu'} = \begin{cases} 1 & (\mu = \mu' \text{のとき}), \\ 0 & (\mu \neq \mu' \text{のとき}) \end{cases}$ とする．

さらに計算を行う事で，次のような $C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu)$ の表示が得られる:

系 3.7. L の $\mathbf{Z}$-基底 $\{l_1, l_2, \cdots, l_n\}$ をとり，$D = \det((l_i,l_j)_Q)$ とおく．定理 3.6(ii) で，さらに $c \in 2\mathbf{Z},\ cL^* \subset L,\ cd \neq 0,\ c(l,l)_Q \equiv 0 \mod 2\ (\forall l \in L^*)$ と仮定すると，

$$\varepsilon(\sqrt{-1})^{(p-q)\frac{1-\operatorname{sgn} d}{2}\operatorname{sgn} c} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu) = \begin{cases} \delta_{\mu,d\nu}\mathbf{e}\left[\dfrac{ab}{2}(\mu,\nu)_Q\right]\varepsilon_d^{-n}(\sqrt{-1}\operatorname{sgn} c)^n \left(\dfrac{2c}{d}\right)^n \left(\dfrac{D}{-d}\right) & (d < 0 \text{ のとき}), \\ \delta_{\mu,d\nu}\mathbf{e}\left[\dfrac{ab}{2}(\mu,\nu)_Q\right]\varepsilon_d^{n} \left(\dfrac{-2c}{d}\right)^n \left(\dfrac{D}{d}\right) & (d > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成立する．ここで，$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき}), \\ \sqrt{-1} & (d \equiv 3 \mod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$ とし，$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ は志村氏が定義した平方剰余記号 ([Shm] 参照) とする．

3.5 $\mathfrak{H}\times SO(Q)$ 上のテータ関数

最後に，§3.4 の結果を新谷氏の原論文 [Shn] にある形に書き直しておこう．
$\widetilde{SL}(2,\mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群 $\widetilde{SO}(2)$ を

$$\widetilde{SO}(2)=\{(\kappa_t,\varepsilon)\mid t\in\mathbf{R},\ \varepsilon\in\{\pm1\}\}$$

で定義する．ここで，$\kappa_t=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\in SO(2)$ とする．また，$z=u+\sqrt{-1}v\in\mathfrak{H}$ に対して，$\tilde{\sigma}_z=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{v} & u/\sqrt{v}\\ & 1/\sqrt{v}\end{pmatrix},1\right)$ とおく．

整数 m と $f\in\mathcal{S}(X)$ を

$$\omega(\iota_1(\kappa_t,\varepsilon))f=\varepsilon(e^{-\sqrt{-1}t})^{-\frac{m}{2}}f \qquad (\forall(\kappa_t,\varepsilon)\in\widetilde{SO}(2)) \tag{3.4}$$

をみたすをみたすようにとり，$\mu\in L^*/L$ をとる．(例えば，$m=p-q+2k$ と $f=F_z$ は (3.4) をみたす．）このとき，$\mathfrak{H}\times SO(Q)$ 上のテータ関数 $\theta_f^{\mathfrak{H}}(z,g;\mu)$ を

$$\theta_f^{\mathfrak{H}}(z,g;\mu)=v^{-\frac{m}{2}}\theta_f(\tilde{\sigma}_z,{}^tg^{-1};\mu)$$

で定義する．

系 3.8. $\gamma_2\in SO(Q)\cap GL(n,\mathbf{Z})$ と定理 3.6 (2) の仮定をみたす $\gamma_1\in SL(2,\mathbf{Z})$ に対して，

$$j(\gamma_1,z)^{-\frac{m}{2}}\theta_f^{\mathfrak{H}}(\gamma_1z,\gamma_2g;\mu)=\sum_{\nu\in L^*/L}C_{(\gamma_1,1)}(\mu,\nu)\theta_f^{\mathfrak{H}}(z,g;\nu^t\gamma_2^{-1})$$

が成立する．

参考文献

[Ma] 松本久義. Weil 表現と Howe duality. (本報告集)

[Shm] Goro Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math. 97*, pp. 440–481, 1973.

[Shn] Takuro Shintani. On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. *Nagoya Math. J.*, Vol. 58, pp. 83–126, 1975.

[Su] 菅野孝史. Oda lift. (本報告集)

[Ta] 高瀬幸一. Weil 表現と古典的 theta 級数. 第 4 回整数論サマースクール報告集, pp. 44–62, 1996.