第 19 回
整数論サマースクール報告集
「保型形式のリフティング」

2011 年 9 月 5 日〜9 月 9 日

於 静岡県田方群　富士箱根ランド・スコーレプラザホテル

まえがき

第 19 回整数論サマースクール「保型形式のリフティング」は 2011 年 9 月 5 日から 9 月 9 日までの 5 日間、静岡県の富士箱根ランド・スコーレプラザホテルにて行われました。本報告集には、サマースクールでの講演をもとに、講演の方に執筆して頂いた原稿を収録してあります。

今回のテーマである保型形式のリフティングは、単に大きな群の保型形式を構成するための手段としてだけではなく、それが自然に引き起こす L-関数の関係は数論的に非常に意義の深いものと言えます。またリフティングが存在する背景には、テータ対応などの表現論的な側面や、Langlands 関手性といった現代数学の最先端の理論が現れてきます。そして、リフティングの具体的な構成や基礎理論の発展に、多くの日本人数学者が関係しているのも大きな特徴です。

サマースクールでは、いくつかの代表的なリフティングの構成法や性質を理解するとともに、背景にある保型表現的な解釈を通して、どのような原理でリフティングが与えられるのかについて理解してもらうことを目標としました。今回のテーマは、世話人のひとりである軍司がこの分野を勉強してみたいという思いから選ばれたものです。専門家でないゆえ、プログラムの組み方等に拙い部分もあったかもしれません。しかし、講演者の方々が世話人の漠然としたお願いにも快く応じてくださり、おかげで分かりやすく奥の深い講演を聞くことができました。また、決して初学者向けとはいえない難しいテーマであるにもかかわらず、70 名を超える多くの方々に参加していただきました。リフティングはまだまだ発展段階にある研究テーマであり、本サマースクール及び本報告集が皆様の研究の一助となり、この分野の研究がますます活発になることを願っております。

今回のサマースクールは多くの方々のご協力を得て開催されました。講演者の方々には講演のための準備や報告集の作成に、大変な労力を割いて頂きました。また当日の受付・会場の準備などでは、院生や若手の方々にお手伝いをして頂きました。会場費および参加者の旅費の援助につきましては、科学研究費基盤研究 (A) 多様な手法による多変数保型形式の数論的研究 (課題番号: 10109415、代表者 織田孝幸先生)、若手研究 (B) 保型形式の構成および、その数論的性質の研究 (課題番号: 23740029、代表者: 軍司圭一) の援助を受けております。また本報告集の印刷費には池田保先生にご援助頂きました。この場を借りて厚く御礼申し上げます。どうもありがとうございました。

第 19 回整数論サマースクール世話人
軍司圭一・成田宏秋

第 19 回(2011 年度)整数論サマースクール
「保型形式のリフティング」プログラム

日時　2011 年 9 月 5 日(月)から 9 月 9 日(金)まで
場所　富士箱根ランド・スコーレプラザホテル

9 月 5 日(月)

10:00-12:00	GL2 の保型形式と表現論　(軍司圭一)
14:00-15:30	志村対応その 1　(坂田裕)
15:45-17:15	志村対応その 2　(坂田裕)
17:30-18:30	accidental isogeny について (成田宏秋)
20:00-21:00	Siegel 保型形式と Hecke 作用素　(軍司圭一)

9 月 6 日(火)

9:30-10:30	Weil 表現 (松本久義)
10:45-12:15	Howe 対応 (松本久義)
14:00-15:00	Jacobi 形式 (高瀬幸一)
15:15-16:45	Saito-Kurokawa リフト 1 (高瀬幸一)
17:00-18:30	Saito-Kurokawa リフト 2 (伊吹山知義)
20:00-21:30	院生・若手の時間

9 月 7 日(水)

9:00-10:00	theta 関数の変換公式 (宮崎直)
10:15-12:15	Oda リフト (菅野孝史)
14:00-16:00	Borcherds リフト (青木宏樹)
16:15-17:00	Eisenstein 級数の Fourier 係数 (軍司圭一)
17:15-18:45	Ikeda リフト (河村尚明)

9 月 8 日(木)

14:00-15:30	Langlands 関手性 (吉田敬之)
16:00-18:00	Seesaw dual pair と内積公式 (山名俊介)

9 月 9 日(金)

9:00-10:30	theta 対応に現れる cohomological 表現 (早田孝博)
10:45-12:15	二つの楕円保型形式からの重さ半整数 Siegel 保型形式へのリフト(林田秀一)

参加者リスト

北海道大学	河村尚明
室蘭工業大学	桂田英典
東北大学	太田和惟
	小林真一
	長瀬聡宏
	廣瀬康隆
宮城教育大学	高瀬幸一
山形大学	早田孝博
東京大学	織田孝幸
	甲斐亘
	鍛治匠一
	鈴木航介
	平野雄一
	松本久義
	宮崎弘安
	芳木武仁
東京工業大学	内藤聡
東京理科大学	青木宏樹
	加塩朋和
慶応義塾大学	大槻玲
	小野雅隆
	萩原啓
早稲田大学	岡本亮彦
	兵藤史武
	広中由美子
	森澤貴之
	柳内武志
早稲田大学高等学院	坂田裕
工学院大学	斎藤正顕
	長谷川武博
立教大学	佐藤文広
	宮崎直
成蹊大学	石井卓
	若林功
明治大学	対馬龍司
横浜国立大学	原下秀士
千葉工業大学	軍司圭一
	杉山和成
金沢大学	菅野孝史
名古屋大学	伊東杏希子
	小倉一輝
京都大学	池田保
	石塚裕大
	大下達也
	岡田健
	佐々木健太
	竹森翔
	千田雅隆
	林芳樹
	安田正大
	吉田敬之
京都産業大学	槇山賢治
	山上敦士
大阪大学	伊吹山知義
	落合理
	北山秀隆
	喜友名朝也
	源嶋孝太
	杉山真吾
	林田秀一
	原隆
	兵庫慶則
	前田恵
近畿大学	菊田俊幸
	長岡昇勇
大阪市立大学	森本和輝
	山名俊介
広島大学	飯島優
香川大学	内藤浩忠
徳島大学	水野義紀
九州大学	池松泰彦
	小笠原健
	高田芽味
	三柴善範
熊本大学	成田宏秋
鹿児島大学	山内卓也

以上　76 名

敬称略、所属は参加申請時のとおり

目次


POLY

GL_2 上の保型形式と表現論

軍司圭一

1　はじめに

本稿では上半平面上の関数として定義される保型形式を，実 Lie 群 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の関数やアデール群 $GL(2,\mathbb{A})$ 上の関数として持ち上げ，表現論の言葉でどのように理解されるかについて解説する．サマースクールの目的の一つに，リフティングの理論的背景を理解するというのがあるが，背景のほとんどは表現論の言葉で記述される．本稿を通して「保型形式とは表現のことである」との感覚を少しでも持っていただければ嬉しい．

参考文献は数多く存在する．本稿は基本的には Gelbart の教科書 [Ge] の 1 から 3 章を抜粋したものである．これはコンパクトにまとまっていてとっつきやすいが，細かな間違いや説明不足も多く，すべてを読むには自分で補う力が要求される．[Ge] の最終目標は Jacquet-Langlands 理論の解説であるが，本格的に勉強したいならばはじめから原書 [JL] を読んでもよいかと思う．

他には，大部になるが Bump の教科書 [Bu] はしっかり書かれていて読みやすい．アデール上の話は全く書いていないが，Borel([Bo]) も評判の良い本である．また本稿の内容は過去のサマースクールでも解説されており，今野 ([Ko])，森山 ([Mo]) などが参考になると思う．特に [Mo] は，ほぼ同じ内容がより表現論に近い立場から解説されている．

2　保型形式の復習

2.1　定義

保型形式の定義を復習する．記号の準備として，$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ を上半空間とし，$\Gamma\subset SL(2,\mathbb{Z})$ を合同部分群とする．すなわち Γ はある N に対するレベル N の主合同部分群

$$\Gamma(N)=\{\gamma\in SL(2,\mathbb{Z})\mid \gamma=1_2 \bmod N\}$$

を含むと仮定する．$g\in SL(2,\mathbb{R})$ と $\mathbb{H}$ 上の関数 f に対して，

$$f|_k g(z)=j(g,z)^{-k}f(g(z)),\quad g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ j(g,z)=cz+d,\ g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

と定める．$j(g_1g_2,z)=j(g_1,g_2(z))j(g_2,z)$ より $(f,g)\mapsto f|_k g$ は G の $\mathbb{H}$ 上の関数のなす空間への作用を定める．

定義 2.1 $\mathbb{H}$ 上の関数 f が次の 3 条件を満たすとき，$SL(2,\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対する重さ k の保型形式であるという．

(1) f は $\mathbb{H}$ 上正則である．

(2) $\gamma \in \Gamma$ に対して $f|_k\gamma = f$ が成り立つ．

(3) f は $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の各 cusp で正則．すなわち任意の $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して $f|_k\gamma$ は

$$f|_k\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} a_\gamma(n) e^{2\pi i n z/N}$$

の形の Fourier 展開を持つ．

さらに条件 (3) において，すべての $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して $a_\gamma(0) = 0$ であるとき f を cusp 形式という．保型形式全体のなす空間を $M_k(\Gamma)$, cusp 形式全体のなす空間を $S_k(\Gamma)$ と書く．これらは有限次元ベクトル空間である．

命題 2.1 $f \in M_k(\Gamma)$ が cusp 形式であることの必要十分条件は，ある定数 M が存在して

$$y^{k/2}|f(z)| < M$$

が成り立つことである．

保型形式は，Γ に関する保型性という非常に高い対称性を持っているため，その Fourier 係数には大きな制約がかかる．Hecke による「自明評価」，すなわち「$f \in S_k(\Gamma)$ に対して $|a(n)| = O(n^{k/2})$」などはその顕著な例である．一方で保型形式の例として Eisenstein 級数や theta 級数があげられるが，その Fourier 係数はそれぞれ「約数のべき乗和」や「二次形式の解の個数」といった数論的情報を含んでいる．保型形式が整数論に応用される一つの例である．

以下 Γ として

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

を考える．ψ を N を法とした Dirichlet 指標 (原始的とは限らない) とすると，ψ は $\Gamma_0(N)$ の指標に

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \psi(d)$$

で拡張される．レベルが N である指標付きの保型形式の空間を

$$M_k(\Gamma_0(N),\psi) = \{ f \in M_k(\Gamma(N)) \mid f|_k\gamma = \psi(\gamma) f,\ \forall \gamma \in \Gamma_0(N) \}$$

で定義する．

保型形式の Fourier 係数から自然に得られる Dirichlet 級数を用いて L 関数が定義できる．

定義 2.2 (L 関数の定義その 1) $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ とする．$s \in \mathbb{C}$ と Fourier 展開 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz}$ に対して

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

とおき，f に付随する L 関数と呼ぶ．これは上記の自明評価により $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいところで収束する

保型 L 関数は Mellin 変換を用いて，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(iy)y^{s-1}\,dy &= \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-2\pi ny}y^{s-1}\,dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)(2\pi n)^{1-s}\int_0^{\infty} e^{-2\pi ny}(2\pi ny)^{s-1}\,dy \\ &= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)\end{aligned} \tag{2.1}$$

表すことができる．この積分表示から以下の定理は容易に導かれる．

定理 2.2 (1) $L(s,f)$ は全複素 s 平面に正則に解析接続される．

(2) $\Lambda(s,f) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$ は関数等式

$$\Lambda(s,f) = i^k\Lambda(k-s,\widetilde{f})$$

を満たす．ここに $\widetilde{f}(z) = (\sqrt{N}z)^{-k}f(-(Nz)^{-1})$ である．

(3) $\Lambda(s,f)$ は任意の $C>0$ に対する帯状領域 $V(C) = \{s \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(s)| < C\}$ で有界．

2.2 Hecke 理論

保型形式の Fourier 係数は整数論的に非常に重要な意味をもつものであるが，さらに Hecke 作用素を用いることで各係数の間の関係性などが見えてくる．Hecke 作用素 T_p は，両側剰余類 $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma_0(N)$ を $\Gamma_0(N)$ で左から割った集合の代表系の作用として書かれるが，Fourier 係数への作用をみると以下のように記述される．

定義 2.3 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz} \in S_k(\Gamma^0(N),\psi)$ に対して, $T_pf(z)$ を以下で定める．

i) $(p,N)=1$ のとき

$$T_pf(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a(np) + \psi(p)p^{k-1}a\left(\frac{n}{p}\right)\right)e^{2\pi inz}, \quad (\text{ただし } p \nmid n \text{ のときは } a\left(\frac{n}{p}\right) = 0)$$

ii) $p|N$ のとき

$$T_pf(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(np)e^{2\pi inz}.$$

このとき，いずれの場合も $T_pf\in S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ が成り立つ．

注 Atkin-Lehner [AL] では ii) を U_p-作用素と呼んで区別している．

このとき各 T_p-作用素たちは可換であり，かつ $(p,N)=1$ なる p に対しては，T_p は Petersson 内積に関する双対作用素と可換である．よって $S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ の基底として，すべての T_p $(p\nmid N)$ の同時固有関数からなるものをとることができる．Atkin-Lehner により定義された "new form の空間" $S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N),\psi)$ に空間を制限すれば $p|N$ なる p も含めたすべての T_p の同時固有関数からなる基底をとることができる．

定義 2.4 (L 関数の定義その 2) f をすべての T_p の同時固有関数とする．T_p の固有値を λ_p とするとき

$$L(s,f)=a(1)\prod_p(1-\lambda_pp^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1}$$

とおく．ただし $a(1)$ は f の Fourier 展開の $e^{2\pi iz}$ の係数である．右辺は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で収束する．

定理 2.3 $f\in S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ をすべての T_p-作用素に関する同時固有関数とする．このとき定義 2.2 と定義 2.4 は同じ関数を与える．さらに 2.2 で定義された L 関数が定義 2.4 の形の Euler 積表示を持つのは，f が同時固有関数であるときに限る．

通常は L 関数の定義を 2.2 で与え，"f が同時固有関数であれば 2.4 の形の Euler 積表示を持つ" と説明されることが多い．しかし多変数の保型形式を考える場合，むしろ 2.4 こそが「正しい」L 関数の定義であり，たまたま "SL_2 の場合はその Dirichlet 級数の係数が Fourier 係数と一致している" と見る方がよい．なお Siegel 保型形式の場合，2.2 に対応する Dirichlet 級数は Koecher-Maass 級数と呼ばれ，別の数学的対象として研究されている．

定義 2.2 と 2.4 の表示を見比べて，容易に次が分かる．

系 2.4 (重複度 1 定理) 二つの関数 $f,g\in S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ がすべての T_p に対して同じ固有値の固有関数であれば，f と g は定数倍を除いて一致する．

3 $SL_2(\mathbb{R})$ の表現論と保型形式

3.1 群への持ち上げ

$\Gamma=\Gamma_0(N)$ とする．この節では $f\in M_k(\Gamma)$ を $G=SL_2(\mathbb{R})$ 上の関数に持ち上げることを考える．$K=SO(2)\subset G$ とおく．f は $\mathbb{H}$ 上の関数であり，自然な同型 $G/K\simeq\mathbb{H}, g\mapsto g(i)$ があるのでこの写像を通して f は G 上の関数と思うことができる．しかし実際には「保型因子」分を考慮して持ち上げた方が都合がよいため，そのような持ち上げを考えることにする．

定義 3.1 $f \in S_k(\Gamma)$ に対して，G 上の関数 φ_f を次で定義する．

$$\varphi_f(g) = j(g,i)^{-k} f(g(i))$$

このとき $\varphi_f \in C^\infty(G)$ であるが，さらに次が成り立つ．

命題 3.1 φ_f は次の性質を満たす．

(1) φ_f は左 Γ-不変．すなわち $\gamma \in \Gamma$ に対して $\varphi_f(\gamma g) = \varphi_f(g)$

(2) $K \ni r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対して，$\varphi_f(gr_\theta) = e^{ik\theta}\varphi_f(g)$

(3) φ_f は緩増大である．すなわちある定数 C と M が存在して $|\varphi_f(g)| < C\|g\|^M$ (ただし $\|g\| = \mathrm{Tr}({}^t gg)$ と定める) を満たす．

(4) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の元 $X_- = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ の作用によって，$X_- \cdot \varphi_f = 0$ となる．($X_- \cdot \varphi_f$ の定義は後述)

さらに f が cusp 形式であるときは次が成り立つ．

(5) $\delta \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して $\Gamma^\delta = \delta^{-1}\Gamma\delta$ とおく．すべての $\delta \in SL(2,\mathbb{Z})$ と $g \in G$ に対して

$$\int_{N\cap\Gamma^\delta\backslash N} \varphi_f\,(\delta n g)\; dn = 0.$$

ここで $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ とおいた．

(4) の意味は後ほど解説するが，これは定義 2.1 の (1)「f が正則」から従う性質である．X_- の作用は Cauchy-Riemann の微分作用に他ならない．(1) は f の保型性, (2) は K が i の固定部分群であること, (3) は定義 2.1 の (3)「f の cusp での正則性」に対応している．

証明) (1), (2) は直接計算すればよい．興味のある読者には自分で確かめることをお勧めする．(3) については，任意の $g \in G$ はある $z = x + yi \in \mathbb{H}$ ($|x| \le 1/2$, $|z| > 1$) に対して

$$g = \delta g_z r_\theta, \quad \delta \in SL(2,\mathbb{Z}),\ g_z = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

と表せることに注意すると，$\varphi_f(g) = y^{k/2}e^{-ik\theta} f|_k\delta(z)$ が成り立つ．よって緩増大は $y < C\|g\|^M$ となること及び，$f|_k\delta$ の Fourier 展開が $n \ge 0$ から始まるという性質より従う．(4) は後ほど説明するので，(5) を証明しよう．

$$N \cap \Gamma^\delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & hm \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

となる h をとる．このとき $z = g(i) \in \mathbb{H}$ と書くと

$$\begin{aligned}
\int_{N\cap\Gamma^\delta\backslash N} \varphi_f(\delta n g)\, dn &= \int_0^1 \varphi_f\left(\delta \begin{pmatrix} 1 & hn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dn \\
&= \int_0^1 f\left(\delta \begin{pmatrix} 1 & hn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g(i)\right) j\left(\delta \begin{pmatrix} 1 & hn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g, i\right)^{-k} dn \\
&= \int_0^1 f(\delta(z+hn)) j(\delta, z+hn)^{-k} j(g,i)^{-k}\, dn \\
&= j(g,i)^{-k} \int_0^1 (f|_k\delta)(z+hn)\, dn
\end{aligned}$$

であり，最後の積分は $f|_k\delta$ のフーリエ係数の定数項に他ならない．よって f が cusp 形式であることと，この積分が消えることは同値である． $\square$

この命題の意味することを考えてみよう．まず (1) より φ_f は $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ の元と見なせる．この空間には G が右正則表現として作用している．すなわち $g \in G$ と $\psi \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ に対して，$g\psi(h) = \psi(hg)$ で $g\psi \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ が定まる．(2) の条件は φ_f が K の作用で定数倍にしかならないこと，言い換えれば $\mathbb{C}\varphi_f$ という 1 次元空間が K の作用で閉じていることを意味している．また (4) は G のリー環の複素化の作用をあらわしている．

3.2 表現論を用いた解釈

上で説明したことから，保型形式の理論は表現論を用いてとらえられそうだということが見えてくる．そこで，表現論の立場からの準備をしよう．

G を Lie 群とし，以下 G の表現といったら Hilbert 表現を考えることにする．G の表現そのもの，すなわち G-加群を考えるのが最も自然に見えるが，実はこれは余り扱いやすい対象ではない．以下に説明する $(\mathfrak{g}, K)$-加群を考えることで，表現の代数的取り扱いが可能になり，より扱いやすくなる．

Lie 群 G の表現を考える際に，まず表現を極大コンパクト部分群 K に制限して K-表現として分解しておく．コンパクト群の表現は完全可約であり，既約表現はすべて有限次元表現であるから (Peter-Weyl の定理) 扱いやすい．G-表現 (π, H) を K-表現で分解したとき

$$H = \hat{\bigoplus_{\delta\in\widehat{K}}} m(\delta) H_\delta, \quad m(\delta) < \infty$$

となる，すなわち K-表現で分解したときの重複度が有限であるとき，この表現は許容的 (admissible) であるという．

今の場合 $K = SO(2)$ はアーベル群であり，すべての既約表現は 1 次元である．既約指標は $m \in \mathbb{Z}$ を用いて $K \ni r_\theta \mapsto e^{im\theta}$ の形で与えられる．これにより $SO(2)$ の既約表現の同値類全体を $\mathbb{Z}$ と同一視する．

さらに G の表現よりもその Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ の表現のほうが扱いやすいという事情がある．G は一般には非可換な群であり，例えば生成元などを求めるのも簡単ではないが，ベクトル空間である $\mathfrak{g}_0$ ならば基底を書くのも容易である．

G の Hilbert 表現 (π, H) に対して，$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G)$ は H のすべての元には作用しない．$v \in H$ をとったとき，$X \in \mathfrak{g}_0$ に対して

$$\frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))v\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi(\exp(tX))v - v}{t} \tag{3.1}$$

が存在するとき，v を H の微分可能な元という．無限回微分可能な元全体を H^∞ で表すとき，$\mathfrak{g}_0$ は H^∞ に Lie 環として作用している．この作用を自然に $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の作用に拡張する．

まとめると，G の表現 (π, H) を考える際，G-作用すべてを考えるのではなく，代わりに $\mathfrak{g}$-作用と K-作用 (K は G の極大コンパクト部分群) の組を考える方が扱いやすい．この表現空間は H^∞ でもよいが，さらに少しだけ小さくして K-有限なベクトルの空間

$$H_K = \{v \in H \mid \dim(\pi(K)v) < \infty\}$$

を考えた方がよい．例えば H が許容的のとき，K 表現で分解して $H = \hat{\bigoplus}_\delta m(\delta)H_\delta$ と表わされるならば，$H_K = \bigoplus_\delta m(\delta)H_\delta$ である．$H_K \subset H^\infty$ かつ，H_K は H の中で dense であることが示される．

このようにして与えられる $\mathfrak{g}$ と K の作用の入ったベクトル空間 H_K を一般に $(\mathfrak{g}, K)$-加群と呼ぶ．H が G-表現として既約であることと H_K が $(\mathfrak{g}, K)$-加群として既約であることは同値である．なお抽象的な $(\mathfrak{g}, K)$-加群の定義は [Ma] を参照のこと．

以上の表現論的な準備を踏まえて，$f \in M_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して $X_- \cdot \varphi_f = 0$ が成り立つことを証明してみよう．$X_- \in \mathfrak{g}$ の作用は (3.1) で与えられている．$z = x + yi \in \mathbb{H}$ に対して，$g_z = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$ とおくと $g_z(i) = z$ である．岩澤分解から任意の $g \in G$ は $g = g_z r_\theta$ と書けるが，φ_f に K が指標で作用すること及び $r_\theta X_- r_\theta^{-1} = e^{-2i\theta}X_-$ に注意すると，結局 $g = g_z$ について調べれば十分であることが分かる．

$$X_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と分解して，各行列を簡単のため A, B, C で表す．このとき

$$\begin{aligned} A \cdot \varphi_f(g) &= \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(e^{kt}y^{k/2}f(x + iye^{2t})\right) \\ &= \frac{k}{2}y^{k/2}f(z) + y^{k/2+1}\frac{\partial}{\partial y}f(z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B\cdot\varphi_f(g) &= \frac{i}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} y^{k/2}f(x-ty+iy) \\
&= -\frac{iy^{k/2+1}}{2}\frac{\partial}{\partial x}f(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\cdot\varphi_f(g) &= \frac{i}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(-ti+1)^{-k}y^{k/2}f\left(x-\frac{ty}{t^2+1}+i\frac{y}{t^2+1}\right) \\
&= -\frac{k}{2}y^{k/2}f(z)-\frac{iy^{k/2+1}}{2}\frac{\partial}{\partial x}f(z)
\end{aligned}
$$

である．よって f の正則性より

$$
X_-\cdot\varphi_f(g) = -iy^{k/2+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z)=0
$$

が成り立つ． □

3.3 表現論からみた保型形式の空間

$f\in S_k(\Gamma_0(N))$ とすると，命題 2.1 から $\varphi_f\in L^2(\Gamma\backslash G)$ であることが分かる．すでに述べたように G は Hilbert 空間 $L^2(\Gamma\backslash G)$ に右正則表現として作用しているから，その K-有限部分空間 $L^2(\Gamma\backslash G)_K$ は $(\mathfrak{g},K)$-加群になっている．では，φ_f によって生成される $(\mathfrak{g},K)$-加群は，一体どのようなものであろうか? 実は以下のようにして与えられるような，既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群が存在する．

正則離散系列

$$
H=-i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad X_+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1\end{pmatrix},\quad X_-=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1\end{pmatrix}
$$

とおく．これは $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底であるが，さらにいわゆる SL_2-triple の関係式

$$
[X_+,X_-]=H \qquad [H,X_+]=2X_+ \qquad [H,X_-]=-2X_-
$$

を満たす．$\exp(i\theta H)=r_\theta\in K$ に注意すると，$(\mathfrak{g},K)$-加群 V の元 v がウェイト m の固有ベクトル，つまり $r_\theta v=e^{im\theta}v$ を満たすならば，$Hv=mv$ であり，X_+v, X_-v はそれぞれウェイトが $m+2$, $m-2$ のベクトルになっていることが分かる．

整数 $k\geq 1$ に対して，次の性質を満たす無限次元既約ユニタリ $(\mathfrak{g},K)$-加群が存在する:

- 表現空間は $V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{C}v_{k+2m}$ であり，各 v_n は $r_\theta v_n = e^{in\theta}v_n$，よって $Hv_n = nv_n$ を満たす．
- $X_+v_n \in \mathbb{C}v_{n+2}$ かつ $X_-v_n \in \mathbb{C}v_{n-2}$，特に $X_-v_k = 0$ である．

この表現を $\mathcal{D}_k^+$ であらわし，$k \geq 2$ のとき**正則離散系列**(holomorphic discrete series)，$k = 1$ のときは**離散系列の極限**(limit of discrete series) と呼ぶ．離散系列かそうでないかの違いは，$L^2(G)_K$ の部分表現 ($L^2(G)$ の K-有限部分) として実現できるかできないかの違いである．ウェイトが最小となるベクトル v_k を lowest weight vector と呼ぶ．

$\mathcal{D}_k^+$ のより詳細な説明や表現の実現などについては，例えば [Kn, Chapter II, §5-6] を参照のこと．

注　この表現の X_+ と X_- の役割を取り替えたような表現も存在し，表現空間は $V = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}v_{-k-2m}$ となる．これを**反正則離散系列**(anti-holomorphic discrete series) といい $\mathcal{D}_k^-$ であらわす．

注　$\mathcal{D}_k^+$ と同様な $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の作用を持ち，lowest weight k が $k \leq 0$ となるような既約表現を構成しようとすると有限次元表現になってしまう．有限次元表現は自明表現を除いてユニタリにならない．

さて，$f \in S_k(\Gamma)$ に対して $\varphi_f \in L^2(\Gamma\backslash G)$ を考えると，命題 3.1 より φ_f は $\mathcal{D}_k^+$ の lowest weight vector になっていることが分かる．以上をまとめて次を得る．

定理 3.2 次の同型射がある．

$$S_k(\Gamma) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathcal{D}_k, L^2(\Gamma\backslash G))$$

この同型射は，$f \in S_k(\Gamma)$ に対し $\mathcal{D}_k$ の lowest weight vector を φ_f に写すような $(\mathfrak{g},K)$-準同型として与えられる．

これで保型形式と $L^2(\Gamma\backslash G)$ の既約部分表現との間に対応ができたが，G の既約表現は正則離散系列だけではなく，主系列表現と呼ばれるものなど他にもある．それらを扱うために，“保型形式” の概念を少し拡張することにする．

そのために，命題 3.1 の性質のうち $X_- \cdot \varphi_f = 0$ を別な表し方にしておくと都合がよい．$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環を表すとき，$\Delta \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を

$$\Delta = -\frac{1}{4}(H^2 + 2X_+X_- + 2X_-X_+)$$

で定める (行列演算ではなく $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の中での演算であることに注意)．この Δ は Casimir 元と呼ばれ，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ とおくと $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\Delta]$ であることが知られている．さてこのとき $f \in M_k(\Gamma)$ に対して

$$\left(\Delta - \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\right)\varphi_f = 0$$

が成り立つ．

注　$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\Delta]$ であるから，Schur の補題より Δ は既約表現に対しては常に定数倍で作用している．X_- の作用を見るよりも Δ の作用を見るほうが，表現論的にはより正統的な考え方であるといえる．

上記結果を踏まえたうえで，G 上の保型形式を次のように定義する．

定義 3.2 G 上の関数 f が保型形式であるとは次の性質を満たすことである．

(1) f は左 Γ-不変．すなわち $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$ に対して $f(\gamma g) = f(g)$.

(2) f は右 K-有限．すなわち各 $g \in G$ に対して

$$\dim\langle f(gk) \mid k \in K\rangle_{\mathbb{C}} < \infty$$

(3) f は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-有限．すなわちある 0 でない多項式 $p(x)$ が存在して，$p(\Delta)f = 0$.

(4) f は緩増大．すなわちある定数 C, M が存在して

$$|f(g)| < C\|g\|^M.$$

この空間を $\mathcal{A}(\Gamma, K)$ で表す．さらに f が cuspidal 条件

$$\int_N f(ng) = 0 \quad \text{a. a. } g,$$

を満たすとき，f を cusp 形式という．cusp 形式の元全体を $\mathcal{A}_0(\Gamma, K)$ で表す．

注　(3) の条件は f が微分可能でないと定義されないように見えるが，実際には超関数と見ることで，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の作用はより一般の関数に拡張される．(2)，(3) の条件から f が通常の意味で smooth であることが示される (cf. [Bo, Theorem 2.13])．

以下，表現論の立場から得られる事実をまとめるため，いくつか用語を定義する．$\psi \in L^2(\Gamma\backslash G)$ が命題 3.1 の (5) の性質

$$\int_N \psi(ng)\,dn = 0$$

を満たすとき φ は cuspidal であるといい，cuspidal な元全体を $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash G)$ で表す．これは G の作用で閉じた空間である．次に $L^2(\Gamma\backslash G)_K$ の部分表現の直和を $L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash G)_K$ で表す．すなわち

$$L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash G)_K = \bigoplus_{\substack{V \subset L^2(\Gamma\backslash G)_K \\ V:\text{既約}}} V$$

である．$L^2(\Gamma\backslash G)$ は一般に完全可約な表現ではないので，$L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash G)_K \neq L^2(\Gamma\backslash G)_K$ である．

定理 3.3 (1) $L^2_0(\Gamma\backslash G)$ は $(\mathfrak{g}, K)$-加群に重複度有限で既約分解される．すなわち

$$L^2_0(\Gamma\backslash G)_K = \bigoplus_{\pi:\ \text{既約}} m(\pi)V_\pi, \quad m(\pi) < \infty$$

である．

(2) $(\mathfrak{g}, K)$-加群の直和分解

$$L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash G)_K = L^2_0(\Gamma\backslash G)_K \oplus H_{\mathrm{res}}$$

が成り立つ．ここで H_{res} は Eisenstein 級数の residue から決まる部分空間であり，自明表現といくつかの補系列表現との直和で表される．特に $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ のときは自明表現 $\mathbb{C}$ と一致する．

後半の主張は例えば [Bo, Theorem 16.6] 参照.

4 アデール上の保型形式

4.1 アデール上への持ち上げ

前節で保型形式を $SL(2,\mathbb{R})$ 上の関数に持ち上げて解析をしたが，Hecke 理論，L-関数などを取り扱うためにはさらにこれをアデール上に持ち上げると便利である．Hecke 作用素は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ の形の行列を取り扱うため，$SL(2)$ よりも $GL(2)$ の方が都合がよい．

以下前節までと記号を変えて，$G = GL(2)$ とし, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_Q$ を $\mathbb{Q}$ 上のアデール環, $\mathbb{A}_f = \prod'_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$, $G_\mathbb{Q} = GL(2,\mathbb{Q})$ とおく．また，$G_\infty = GL(2,\mathbb{R})$, $G_\infty^+ = GL^+(2,\mathbb{R}) := \{\gamma \in GL(2,\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ とし，$G_{\mathbb{A}_f}$ で $G_\mathbb{A}$ の G_∞-成分が 1 であるものを表す.

K_0 を $G_{\mathbb{A}_f}$ の開コンパクト部分群で，$\det : K_f \to \mathbb{A}^\times$ が全射であるものとする．このとき，以下の分解が成り立つ (**強近似定理**).

$$G_\mathbb{A} = G_\mathbb{Q} G_\infty^+ K_0 \tag{4.1}$$

この分解がアデール上での理論を展開する一つの大きなキーポイントである．

命題 4.1 上記の仮定の下で $\Gamma' = K_0 \cap SL(2,\mathbb{Q})$ を数論的部分群とすると，解析的同相

$$\Gamma'\backslash\mathbb{H} \simeq G_\mathbb{Q} R_+^\times \backslash G_\mathbb{A}/K_0$$

が成り立つ.

ここまで見てきたとおり，アデール上で理論を展開する場合，実リー群上での話と大きく違ってくるのが離散部分群の取り扱いである．リー群上では $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$ という空間上での関数を考察したが，$G_\mathbb{A}$ の離散部分群は $G_\mathbb{Q}$ であり，レベル構造はここからは見えてこない．アデール上ではコンパクト部分群が大きな役割を果たし，レベル構造を考えることは「どのようなコンパクト群の表現で分解するか」という問題に帰着される．別の言い方をすれば，多くの離散群の場合を統一的に扱えるのがアデール上での理論ということができる．

Example 4.2 N を自然数とし，

$$K_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \widehat{\mathbb{Z}}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\} = \prod_{p \nmid N} GL_2(\mathbb{Z}_p) \times \prod_{p \mid N} K'_p$$

(ただし $K'_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}_p) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod p \right\}$) とする．このとき

$$\Gamma' = K_0(N) \cap SL(2, \mathbb{Q}) = \Gamma_0(N)$$

となる．

上記の同相写像を用いて，古典的な保型形式をアデール上の関数として持ち上げることができる．

状況をはっきりさせるため，以下では指標付きの保型形式を扱う．すなわち ψ を mod$N$ の Dirichlet 指標として，$f \in M_k(\Gamma_0(N), \psi)$ を考える．このとき ψ は $\mathbb{A}^\times$ 上の指標 ω_ψ を

$$\omega_\psi \colon \mathbb{A}^\times \to \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_+^\times = \prod \mathbb{Z}_p^\times \to \prod_{p \mid N} \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}_1^\times$$

のようにして引き起こす．ω_ψ はまた $K_0(N)$ の指標

$$\omega_\psi \colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \omega_\psi(d) \in \mathbb{C}_1^\times$$

に拡張される．

命題 4.3 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数 Φ_f を以下のように定める．(4.1) の分解に従い $G_{\mathbb{A}} \ni g = \gamma g_\infty k_0$ と書くとき

$$\Phi_f(g) = f(g_\infty(i)) j(g_\infty, i)^{-k} \omega_\psi(k_0)^{-1}$$

と定める．これは well-defined であり，さらに次の性質を満たす．

(i) $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ (左 $G_{\mathbb{Q}}$-不変)

(ii) $k_0 \in K_0(N)$ に対して $\Phi_f(gk_0) = \Phi(g)\omega_\psi(k_0)^{-1}$

(iii) $\Phi_f(gr_\theta) = e^{ik\theta}\Phi_f(g)$

(iv) Φ_f は G_∞^+ 上の関数と見なすと smooth であり

$$\Delta\Phi_f = \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\Phi_f$$

が成り立つ．

(v) $z \in Z_{\mathbb{A}} \simeq \mathbb{A}^\times$ に対して $\Phi_f(zg) = \omega_\psi(z)^{-1}\Phi(g)$

(vi) Φ_f は以下の意味で緩増大．すなわち任意の $c > 0$ と $G_{\mathbb{A}}$ のコンパクト集合 Ω に対してある C と N が存在し，$g \in \Omega$ 及び $|a| > c$ なる $a \in \mathbb{A}^\times$ に対して

$$\Phi_f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \leq C|a|^N$$

が成り立つ．

(vii) $f \in S_k(\mathit{\Gamma}_0(N), \psi)$ であるならば，

$$\int_{\mathbb{Q}/\mathbb{A}} \Phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0 \quad \text{a.a. } g$$

が成り立つ．

上記の命題で，(ii), (iii) を $K = K_\infty K_0(1)$-有限，(vi) を $Z(\mathfrak{g})$-有限という条件に置き換えれば，より一般の保型形式の定義が得られる．

上の命題から次が分かる．ω を Hecke 指標 $\omega\colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{C}_\times^1$ とするとき $L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ を以下の条件を満たす $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数のなす空間とする．

1. $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$
2. $z \in Z_{\mathbb{A}}$ に対して $\Phi(zg) = \omega(z)\Phi(g)$
3. $\displaystyle\int_{Z_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}} |\Phi(g)|^2\, dg < \infty$

すると，$f \in S_k(\mathit{\Gamma}_0(N), \psi)$ に対して $\Phi_f \in L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega_\psi^{-1})$

4.2 $G_{\mathbb{A}}$ の表現と Hecke 作用素

上の議論から，表現論的に保型形式を捉えるためには，$L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ という空間への $G_{\mathbb{A}}$ の右移動による表現を考えればよいことが分かる．ごく大雑把に言うと $G_{\mathbb{A}}$ の適切な表現は，$G_\infty = GL(2, \mathbb{R})$ の表現と $G_p = GL(2, \mathbb{Q}_p)$ との表現の無限個のテンソル積で表示することができる．このうち G_∞ の表現については命題 4.3 の (iii), (iv) などから分かる通り，第 2 節で見てきた理論がほぼそのまま使える．よって G_p の表現がどうなるかを考えよう．

G_p の表現についても，$(\mathfrak{g}, K)$-加群で考えたのと同様に「許容的」という概念がある．すなわち G_p の表現 (π, V) を $K_p = GL(2, \mathbb{Z}_p)$ の表現で分解したとき

$$V = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{K}_p} V(\sigma), \quad \dim V(\sigma) < \infty$$

の形に表わされるとき，V を許容的であるという (最初から代数的直和を考えていることに注意)．このときコンパクト台を持つ両側 K-不変な局所定数関数 f をとると (このような f 全体に畳み込みで積を入れたものを G_p の Hecke 環と呼ぶ) と

$$\pi(f)v = \int_{G_p} f(g)\pi(g)v\,dg$$

は実質有限和となり意味を持つ．特に (π, V) として $L^2(G_Q\backslash G_A, \omega)$ を考えると $\pi(f)\Phi$ は $\widehat{f}(g) = f(g^{-1})$ と Φ の畳み込みになることに注意する．

次の命題により，G_p の表現は Hecke 環の作用に対応していることが分かる．

命題 4.4 $\Phi \in L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}})$ に対して (中心指標 ω は自明であるとする) $\widetilde{T}(p)\Phi$ を Φ と $H_p = K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p$ の特性関数との畳み込みをとったものとする．すなわち

$$\widetilde{T}(p)\Phi = \int_{H_p} \Phi(gh)\,dh \tag{4.2}$$

このとき $f \in S_k(\mathit{\Gamma}_0(N))$ に対して

$$p^{k/2-1}\widetilde{T}(p)\Phi_f = \Phi_{T_p f}$$

が成り立つ．

証明) $f \in S_k(\mathit{\Gamma}_0(N))$ に対して (4.2) の積分を計算する．$g \in G_{\mathbb{A}}$ を (4.1) に従い $g = \gamma g_\infty k$ ($\gamma \in G_{\mathbb{Q}},\ g_\infty \in G_\infty,\ k \in K_0(N)$) と分解する．$\Phi_f$ は左 $G_{\mathbb{Q}}$ 不変より $\gamma = 1_2$ としてよい．また，h を適当に変数変換すれば，k の p-成分ははじめから 1_2 であると仮定してよい．$p \nmid N$ とする ($p|N$ の場合も同様)．H_p を左から K_p で分解すると

$$H_p = \coprod_{b=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p \amalg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K_p$$

となる．中心指標 $\omega = \omega_\psi^{-1}$ が自明であるから，(4.2) の積分は

$$\widetilde{T}(p)\Phi_f(g) = \sum_{b=0}^{p-1} \Phi_f\left(g\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \Phi_f\left(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right)$$

となる．ここで K_p 上の Haar 測度は $\mathrm{vol}(K_p) = 1$ となるようにとっている．関数 Φ_f を f を使って書きなおすため，中身を $G_{\mathbb{Q}}G_\infty K_0(N)$ の形で記述したい．$\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は p-成分のみこの形であり，他の成分は 1_2 であるような $G_{\mathbb{A}}$ の元であることに注意．$g \in G_{\mathbb{A}}$ の p-成分は 1_2 であると仮定したから，$\gamma = \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{Q}}$ ととればよい．よって

$$g\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_\infty k_p \begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} p^{-1} & bp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\infty g_\infty k_0' k_0$$

となる．ただし k_0' は p-成分が 1_2，その他の成分が $\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ となるような $K_0(N)$ の元である．これより

$$\Phi_f\left(g\begin{pmatrix} p & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = p^{k/2-1}f\left(\frac{z+b}{p}\right)$$

が成り立つ (ただし $g_\infty(i) = z$ とおいた)．同様にして

$$\Phi_f\left(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right) = p^{k/2}f(pz)$$

も成り立つので命題を得る． □

注 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ に対して上記の命題を考えるには，少し修正がいる．$L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega_\psi^{-1})$ への $G_{\mathbb{A}}$ の右移動による表現を R と書き，H_p 上に台を持つ関数 h を

$$h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \omega_\psi(d)$$

で定義したとき，$R(h)\Phi_f$ がスカラー倍のずれを除いて Hecke 作用素になっていることが分かる．

最後に第 1 節の系 2.4 に対応するものを述べておこう．$L_0^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ で $L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ の cuspidal な関数全体を表す．これの $G_{\mathbb{A}}$ への右移動による表現を R_ω^0 で表すことにする．

定理 4.5 (重複度 1 定理) $G_{\mathbb{A}}$ の表現 $(R_\omega^0, L_0^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega))$ は既約表現の直和に分解され，各既約表現の重複度は高々1 である．

この証明は，Φ の Fourier 展開の係数が Whittaker 関数になること，及び Whittaker 模型の一意性を示すという方針で行われる．詳しくは [Ko] などを参考にされたい．なお Whittaker 模型の一意性に関して，実素点上ではこれは，本質的に微分方程式の緩増大な解の一意性の問題に帰着される．

参考文献

[AL] A.O.L. Atkin and J. Lehner "Hecke operators on $\Gamma_0(m)$", Math. Ann. **185** (1970), p134-160.

[Bo] A. Borel, "Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$", Cambridge Tracts in Mathematics, **130**. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

[Bu] D. Bump, "Automorphic forms and representations", Cambridge University Press, (1997).

[Ge] S.S.Gelbart. “Automorphic forms on adele groups”, Annals of Math.Studies. Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, N.J., **83**, 1975.

[JL] H. Jacquet, and R.P. Langlands, “Automorphic forms on $GL(2)$., Lecture notes in Mathematics 114, (1970) Springer Verlag.

[Kn] A.W. Knapp, “Representation theory of semisimple groups”, An overview based on examples. Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.

[Ko] 今野拓也, 「GL2 上の保型形式とその標準 L 函数」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), p37-136.

[Ma] 松本久義, 「Weil 表現と Howe duality」, 本報告集.

[Mo] 森山知則, 「保型形式の空間と Hecke 作用素」, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバー跡公式入門」報告集 (2010), p1-20.

Shimura 対応

坂田　裕（早稲田大学高等学院）

1　導入

Riemann zeta 関数の関数等式に自然に現れる Theta 級数や，無限積表示から諸分野で重要な働きをする Dedekind η 関数などは, 整数ウエイトの保型形式の様な変換法則をみたす．そこで，この様な関数達も保型形式の一部として取り扱うことで，変換公式を満たす正則関数全体を体系的に理解しようとする発想は極めて自然であるといえよう．ただ，これらのウエイトは一般的に整数にならないために，保型因子の具体的記述や Hecke 理論の構築など様々な面で大きな困難が生じてしまい，保型形式の一般論を整数ウエイトの場合の様に展開出来なくさせている．

志村 [14] はこの様な関数を全て Metaplectic 群上の保型形式として捉え直し，それ上で保型形式の一般論を展開することに成功した．さらに，この Metaplectic 群上の保型形式から整数ウエイトの保型形式を具体的に構成してみせたのである（志村対応）．この志村対応の発見により，今日では，Metaplectic 群上の保型形式が整数ウエイトの保型形式を深く理解する上でも必要不可欠なものになってきている．

そこで，本論説では志村対応について概説していく．なお，志村対応については，志村 [14] の他に Koblitz[3] とその邦訳 [4] および第 4，8 回整数論サマースクール報告集などの詳細な論説が既に数多くあるため，本稿では証明の細部までには立ち入らず，大まかな流れが掴める様に簡潔に記述していきたい．そこで，詳細な証明や具体例，および志村対応の様々な応用についてはこれらの文献を是非参照して頂きたい．

2　半整数ウエイトの保型形式

2.1　記号の準備

$a \in \mathbb{Z},\ b \in 2\mathbb{Z}+1\,(b \neq 0)$ に対して，$\left(\frac{a}{b}\right)$ は志村によって定義された 2 次剰余記号を表わす；

(1)　$(a,b) \neq 1$ ならば, $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

(2)　b が奇素数ならば, $\left(\frac{a}{b}\right)$ は通常の平方剰余記号を表わす.

(3)　$b > 0$ ならば，$a \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$ は b を法とする指標を与える．

(4)　$a \neq 0$ ならば，$b \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ の判別式を導手に持つ指標を与える．

(5)　$a > 0$ (resp. $a < 0$) のとき $\left(\frac{a}{-1}\right) = 1$ (resp. -1).

(6)　$\left(\frac{0}{\pm 1}\right) = 1$.

なお，2 次剰余記号の定義同様，自然数 N を法とする Dirichlet 指標 χ に対しても，$(n,N) > 1$ ならば $\chi(n) = 0$ と定義しておく．

複素数 z, x に対して，$\mathrm{e}(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ かつ $z^x = \exp(x\log(z))$ とおく．ただし，$\log(z)$ の分岐は常に $-\pi < \arg(z) \leqq \pi$ にとるものとする．また，$\mu(*)$ で Möbius 関数を表わす．

複素上半平面，複素 1 次元トーラスをそれぞれ $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\mathbb{C}_1^\times = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ で表わす．

$\mathfrak{H}$ 上には一般線形群 $GL_2^+(\mathbb{R})$ が次の様に作用する;

$$\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ z \in \mathfrak{H}.$$

自然数 N に対して，レベル N の合同部分群，主合同部分群を

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ \middle|\ c \equiv 0 \pmod N \right\}, \\
\Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \ \middle|\ a \equiv d \equiv 1 \pmod N \right\}, \\
\Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N) \ \middle|\ b \equiv 0 \pmod N \right\}
\end{aligned}$$

でそれぞれ表わし，N を法とする Dirichlet 指標 χ の $\Gamma_0(N)$ での値を

$$\chi(\gamma) = \chi(d), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

で定義する．また，$\Gamma_\infty = \left\{ \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ とおき，群指数 $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(M)]$ を i_M とおく．

本論説を通して中心的な役割を果たす theta 級数を

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}(n^2 z) \quad z \in \mathfrak{H}$$

で定義する．

2.2 整数ウエイトの保型形式

k は整数, Γ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の有限指数部分群，$\chi : \Gamma \to \mathbb{C}_1^\times$ は有限位数の指標とする．$\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f が次の条件 (1),(2) を共に満たすとき，f を重さ k，指標 χ の Γ に関する正則保型形式とよぶ；

(1) 任意の $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して，$(cz+d)^{-k} f(\alpha(z)) = \chi(\alpha) f$.

(2) f は Γ の全ての cusp で正則である．

特に，Γ の全ての cusp で零値をとる正則保型形式を cusp 形式とよぶ．重さ k，指標 χ の Γ に関する正則保型形式全体や cusp 形式全体のなすベクトル空間をそれぞれ $M_k(\Gamma,\chi)$, $S_k(\Gamma,\chi)$ で表わす．

2.3 Metaplectic 群

整数 k に対して，$GL_2^+(\mathbb{R})$ の被覆群 $\mathfrak{G}$ を次の様に定義する；

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G} &= \mathfrak{G}(k+1/2) \\
&= \left\{ (\alpha, \varphi(z)) \ \middle|\ \alpha \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ \varphi(z) = t(\det\alpha)^{-k/2-1/4}(cz+d)^{k+1/2} \quad (t \in \mathbb{C}_1^\times) \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{G}$ の群演算は $(\alpha_1, \varphi_1(z)) \cdot (\alpha_2, \varphi_2(z)) = (\alpha_1\alpha_2, \varphi_1(\alpha_2(z))\varphi_2(z))$ で与える．$\mathfrak{G}$ から $GL_2^+(\mathbb{R})$ への射影 Pr : $\mathfrak{G} \to GL_2^+(\mathbb{R})$ に対して，$\mathrm{Ker(Pr)} \cong \mathbb{C}_1^\times$ となることから，$\mathfrak{G}$ は $GL_2^+(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C}_1^\times$ による中心拡大になっている．

$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{H}$ 上定義された複素数値関数 f に次の様に作用する；

$$f|\xi = \varphi(z)^{-1} f(\alpha(z)), \quad \xi = (\alpha, \varphi(z)) \in \mathfrak{G}.$$

$\mathfrak{G}$ の群演算の定義から，$\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{G}$ に対して常に $f|(\xi_1\xi_2) = (f|\xi_1)|\xi_2$ が成り立つことに注意する．

Definition 1. $\mathfrak{G}$ の部分群 $\widetilde{\Gamma}$ が次の条件 (1),(2),(3) を満たすとき，$\widetilde{\Gamma}$ を $\mathfrak{G}$ の Fuchs 群とよぶ；
(1) $\mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の有限指数部分群になる．
(2) $\mathrm{Pr} : \widetilde{\Gamma} \to \mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})$ は全単射を与える．
(3) $-1 \in \mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})$ ならば，$\mathrm{Pr}\,|_{\widetilde{\Gamma}}^{-1}(-1) = \{(-1, 1)\}$.

Example 1. $4|N$ の仮定の下で，$\mathfrak{G}$ 上の *Fuchs* 群を構成する．

$$j(\alpha, z) = \frac{\theta(\alpha(z))}{\theta(z)}, \quad \alpha \in \Gamma_0(4),\ z \in \mathfrak{H}$$

とおけば，その定義から $j(\alpha_1\alpha_2, z) = j(\alpha_1, \alpha_2 z) j(\alpha_2, z)$ が成り立ち，さらに *Poisson formula* から

$$j(\alpha, z) = \left(\frac{-1}{d}\right)^{-1/2} \left(\frac{c}{d}\right) (cz+d)^{1/2}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

も得られる．そこで, N を法とする *even* な *Dirichlet* 指標 χ から定まる写像 $\Gamma_0(N) \ni \gamma \mapsto (\gamma, \chi(\gamma) j(\gamma, z)^{2k+1}) \in \mathfrak{G}$ は単射準同型を与えて，かつ $\chi(-1) j(-1, z)^{2k+1} = 1$ をみたすため,

$$\widetilde{\Gamma}_0(N, \chi) = \left\{ (\alpha, \chi(d) j(\alpha, z)^{2k+1}) \;\middle|\; \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

は $\mathfrak{G}$ の *Fuchs* 群となる．以後，$\alpha \in \Gamma_0(N)$ の $\mathfrak{G}$ のへの埋め込みを

$$\alpha^* = (\alpha, \chi(d) j(\alpha, z)^{2k+1})$$

とおき，$\widetilde{\Gamma}_0(N, \chi)$ の主合同部分群を $\widetilde{\Gamma}(N) = \left\{ \alpha^* \;\middle|\; \alpha \in \Gamma(N) \right\}$ で定義する．

2.4 半整数ウエイトの保型形式

Definition 2. k を整数とし，$\widetilde{\Gamma}$ を $\mathfrak{G}$ の Fuchs 群とする．$\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f が次の条件 (1),(2) を満たすとき，f を重さ $k + 1/2$ の $\widetilde{\Gamma}$ に関する (正則) 保型形式とよぶ；
(1) 任意の $\xi \in \widetilde{\Gamma}$ に対して，$f|\xi = f$.
(2) f は $\mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})$ の全ての cusp で正則である．
特に, $\mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})$ の全ての cusp で零値をとる正則保型形式を cusp 形式とよぶ．重さ $k + 1/2$ の $\widetilde{\Gamma}$ に関する正則保型形式全体や cusp 形式全体のなすベクトル空間をそれぞれ $M_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma}),\ S_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma})$ で表わす．

また，$4|N$ である場合，$M_{k+1/2}(N, \chi) = M_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N, \chi))$, $S_{k+1/2}(N, \chi) = S_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N, \chi))$ とそれぞれおく．

よく知られている様に，$S_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma})$ は Petersson 内積

$$< f, g >= \frac{1}{[SL_2(\mathbb{Z}) : \mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})]} \int_{\mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)\overline{g(\tau)} \mathrm{Im}\tau^{k+1/2} \frac{dxdy}{y^2}, \quad f, g \in S_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma})$$

に関して，内積空間になる．

Example 2. ψ を r を法とする原始指標とし，ν を $\psi(-1)=(-1)^\nu$ をみたす 0 か 1 の整数とする．球関数付き *Theta* 級数を

$$h(z;\psi)=\frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\psi(m)m^\nu \mathrm{e}(m^2z)$$

で定義するとき，

$$h(z;\psi)\in M_{\nu+1/2}(4r^2,\psi_\nu),\quad \psi_\nu(d)=\psi(d)\left(\frac{-1}{d}\right)^\nu \text{ は } 4r^2 \text{ を法とする指標}$$

が知られている．特に，$\psi=1$ ならば $h(z;1)=\frac{1}{2}\theta(z)\in M_{1/2}(4,1)$ となり，また $\psi(m)=\left(\frac{3}{m}\right)$ ならば,

$$h(z;\psi)=\eta(24z)=\mathrm{e}(z)\prod_{n\geq 1}(1-\mathrm{e}(24nz))\in M_{1/2}(4r^2,\psi)$$

となることにも注意したい.

2.5 半整数ウエイトの保型形式上の Hecke 理論

$\widetilde{\Gamma}$ を $\mathfrak{G}$ の Fuchs 群とし，$\mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})=\Gamma$ とおく．$\mathrm{Pr}|_{\widetilde{\Gamma}}$ は $\widetilde{\Gamma}$ から Γ の上への群同型写像であるため，この逆同型写像 $\mathrm{Pr}|_{\widetilde{\Gamma}}^{-1}$ を $L:\Gamma\to\widetilde{\Gamma}$ で表わす.

$\alpha\in GL_2^+(\mathbb{R})$ を Γ と $\alpha\Gamma\alpha^{-1}$ が通約可能になるものとし，$\xi\in\mathfrak{G}$ を $\mathrm{Pr}(\xi)=\alpha$ を満たすものとする.

$\gamma\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ に対して，$\mathrm{Pr}(L(\alpha\gamma\alpha^{-1}))=\mathrm{Pr}(\xi Ł(\gamma)\xi^{-1})$ が成り立つことから,

$$L(\alpha\gamma\alpha^{-1})=\xi L(\gamma)\xi^{-1}\cdot(1,t(\gamma)),\quad \gamma\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$$

が得られる．ここで，$\mathrm{Ker(Pr)}=\{(1,t)\,|\,t\in\mathbb{C}_1^\times\}$ が $\mathfrak{G}$ の中心に入るために $t(\gamma)$ は ξ の選び方に依らず，写像 $t:\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha\to\mathbb{C}_1^\times$ が与えられる.

Proposition 1. 上記記号の下で，$\widetilde{\Gamma}\cap\xi^{-1}\widetilde{\Gamma}\xi=L(\mathrm{Ker}(t))$ が成り立つ.
従って，$[\Gamma:\mathrm{Ker}(t)]<\infty$ ならば，$\widetilde{\Gamma}$ と $\xi\widetilde{\Gamma}\xi^{-1}$ は通約可能，すなわち

$$\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}=\coprod_{\nu:\text{有限直和}}\widetilde{\Gamma}\xi_\nu$$

と分解出来る.

さて，α は上記条件および $[\Gamma:\mathrm{Ker}(t)]<\infty$ を満たすと仮定する．このとき，任意の $f\in M_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma})$ に対して,

$$f|[\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}]=\sum_{\nu:\text{有限和}}f|\xi_\nu$$

と定義すれば，この右辺は代表元 ξ_ν の取り方に依らず，$M_{k+1/2}(\widetilde{\Gamma})$ の元を与えることが分かる.

そこで，この写像をさらに具体的に計算してみる.

(1) t が非自明な準同型写像の場合.

$$\Gamma=\coprod_{\nu:\text{有限直和}}(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)\gamma_\nu,\quad \Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha=\coprod_{\mu:\text{有限直和}}\mathrm{Ker}(t)\delta_\mu$$

と分解出来るため,

$$\widetilde{\Gamma}=\coprod_{\nu}L(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)L(\gamma_\nu)=\coprod_{\nu,\mu}L(\mathrm{Ker}(t))L(\delta_\mu\gamma_\nu)=\coprod_{\nu,\mu}(\widetilde{\Gamma}\cap\xi^{-1}\widetilde{\Gamma}\xi)L(\delta_\mu\gamma_\nu).$$

従って, $\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}=\coprod_{\nu,\mu}\widetilde{\Gamma}\xi\cdot L(\delta_\mu\gamma_\nu)$ を得る. こうして,

$$\begin{aligned}f|[\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}] &= \sum_{\nu}\left(\sum_{\mu}f|\xi L(\delta_\mu)\right)|L(\gamma_\nu)\\ &= \left(\sum_{\mu}t(\delta_\mu)\right)\left(\sum_{\nu}f|\xi L(\gamma_\nu)\right)=0.\end{aligned}$$

(2) t が自明な準同型写像の場合.
$L(\alpha\gamma\alpha^{-1})=\xi L(\gamma)\xi^{-1}\quad(\gamma\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$ が成り立つため, Pr は $\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}$ と $\Gamma\alpha\Gamma$ の間の全単射を与える.
そこで, $\Gamma\alpha\Gamma=\coprod_{\nu}\Gamma\alpha_\nu$ と分解出来た場合, $\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}=\coprod_{\nu}\widetilde{\Gamma}\xi_\nu$, $\mathrm{Pr}(\xi_\nu)=\alpha_\nu$ をみたす $\xi_\nu\in\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}$ が必ずとれる. こうして, 代表系 $\{\xi_\nu\}$ を $\{\alpha_\nu\}$ から具体的に構成することで, 写像 $[\widetilde{\Gamma}\xi\widetilde{\Gamma}]$ を明示することが出来る.

Example 3. $m,n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{C}_1^\times$, $4|N$ とし,

$$\alpha=\begin{pmatrix}m&0\\0&n\end{pmatrix},\quad \xi=\left(\alpha,t\cdot(n/m)^{k/2+1/4}\right)\in\mathfrak{G}$$

とおく. ここで, $m'=m/(m,n)$, $n'=n/(m,n)$ とおくとき,

$$\xi\gamma^*\xi^{-1}=(\alpha\gamma\alpha^{-1})^*\left(1,\left(\frac{m'n'}{d}\right)\right),\quad \gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4)\cap\alpha^{-1}\Gamma_0(4)\alpha$$

が成り立つ. そこで, $m'n'$ が平方数, すなわち mn が平方数でないならば, $t(\gamma)=\left(\frac{m'n'}{d}\right)$ は非自明となり, $f\in M_{k+1/2}(N,\chi)$ に対して, $f|[\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\xi\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)]=0$ が得られる. 次に, mn が平方数である場合, $t=1$, $m=1$, $n=p^2\quad$ (p は 素数) の場合に限って $f|[\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\xi\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)]$ を計算してみる.
　最初に $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N)$ の代表系を具体的に与え, それらの元を個々に被覆群 $\mathfrak{G}$ 上に持ち上げることで $\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\xi\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)$ を分解する;

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\\ =&\begin{cases}\displaystyle\coprod_{m\in\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\widetilde{\begin{pmatrix}1&m\\0&p^2\end{pmatrix}}\coprod\left(\coprod_{m\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times}\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\widetilde{\begin{pmatrix}p&m\\0&p\end{pmatrix}}\right)\coprod\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\widetilde{\begin{pmatrix}p^2&0\\0&1\end{pmatrix}}\\ \qquad\qquad\cdots(p,N)=1\text{ のとき}\\ \displaystyle\coprod_{m\in\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\widetilde{\begin{pmatrix}1&m\\0&p^2\end{pmatrix}}\qquad\cdots p|N\text{ のとき.}\end{cases}\end{aligned}$$

ここで，各代表元の持ち上げは $\xi=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)$ を $\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)$ の元でずらして構成する；

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\begin{pmatrix}1&m\\0&p^2\end{pmatrix}} &= \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}^* = \left(\begin{pmatrix}1&m\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right),\\
\widetilde{\begin{pmatrix}p&m\\0&p\end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix}1&0\\Nps&1\end{pmatrix}^*\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\begin{pmatrix}p&m\\-Ns&r\end{pmatrix}^* \quad (pr+Nsm=1)\\
&= \left(\begin{pmatrix}p&m\\0&p\end{pmatrix},\overline{\chi}(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^{-(k+1/2)}\left(\frac{-m}{p}\right)\right),\\
\widetilde{\begin{pmatrix}p^2&0\\0&1\end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix}p^2&-t\\N&d\end{pmatrix}^*\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\begin{pmatrix}p^2d&t\\-N&1\end{pmatrix}^* \quad (p^2d+Nt=1)\\
&= \left(\begin{pmatrix}p^2&0\\0&1\end{pmatrix},p^{-(k+1/2)}\overline{\chi}(p^2)\right).
\end{aligned}
$$

次に，この片側剰余類分解から，$f\in M_{k+1/2}(N,\chi)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&f\left|\left[\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\right]\right.\\
&=\begin{cases}
\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} f\left|\left(\begin{pmatrix}1&m\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\right. + \sum_{m\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} f\left|\left(\begin{pmatrix}p&m\\0&p\end{pmatrix},\overline{\chi}(p)\left(\frac{-1}{p}\right)^{-(k+1/2)}\left(\frac{-m}{p}\right)\right)\right.\\
\qquad + f\left|\left(\begin{pmatrix}p^2&0\\0&1\end{pmatrix},p^{-(k+1/2)}\overline{\chi}(p^2)\right)\right. & \cdots\ p\nmid N \text{ のとき},\\
\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} f\left|\left(\begin{pmatrix}1&m\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\right. & \cdots\ p|N \text{ のとき},
\end{cases}
\end{aligned}
$$

が得られる．これら各項の *Fourier* 係数を個別に計算することで，次の *Theorem* が得られる．

Theorem 1. ([Shimura[14]:Theorem 1.7])
$k\in\mathbb{Z}$, $4|N$, 素数 p に対して，$M_{k+1/2}(N,\chi)$ 上の p^2-*th Hecke* 作用素を

$$
\widetilde{T}(p^2):=p^{k-3/2}\left[\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix},p^{k+1/2}\right)\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\right]
$$

で定義する．このとき，$f=\sum_{n\geq 0}a(n)\mathrm{e}(nz)\in M_{k+1/2}(N,\chi)$ に対して，$f|\widetilde{T}(p^2)=\sum_{n\geq 0}b(n)\mathrm{e}(nz)$ の *Fourier* 係数 $b(n)$ は次式で与えられる；

$$
b(n)=\begin{cases}
a(p^2n)+\chi_1(p)\left(\dfrac{n}{p}\right)p^{k-1}a(n)+\chi(p^2)p^{2k-1}a(n/p^2) & \cdots\ p\nmid N \text{ のとき},\\
a(p^2n) & \cdots\ p|N \text{ のとき},
\end{cases}
$$

ただし，$\chi_1(m)=\chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k$ は N を法とする *Dirichlet* 指標であり，$p^2\nmid n$ の場合，$a(n/p^2)=0$ であるとする．

さて，素数 p を動かすとき，$\Gamma_0(N)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p^2\end{smallmatrix}\right)\Gamma_0(N)$ は互いに可換となるため，$\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p^2\end{smallmatrix}\right), p^{k+1/2}\right)\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)$，即ち $\widetilde{T}(p^2)$ もまた互いに可換となる．従って，全ての素数 p に対する $\widetilde{T}(p^2)$ の同時固有関数が $M_{k+1/2}(N,\chi)$ 上に存在する．

Theorem 2. ([Shimura[14]:Corollary 1.8]) 任意素数 p に対して，

$$f|\widetilde{T}(p^2) = \omega_p f, \quad \omega_p \in \mathbb{C}$$

をみたす保型形式 $f = \sum_{n\geq 0} a(n)\mathrm{e}(nz) \in M_{k+1/2}(N,\chi)$ がとれる．すなわち，$p|N$ か $p^2 \nmid t$ という仮定の下で $(n,p)=1$ をみたす n に対して，漸化式

$$\begin{aligned}
\omega_p a(tn^2) &= a(tn^2p^2) + \chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1}a(tn^2),\\
\omega_p a(tp^{2m}n^2) &= a(tn^2p^{2m+2}) + \chi(p^2)p^{2k-1}a(tp^{2m-2}n^2), \quad (m\geq 1)
\end{aligned}$$

をみたす $a(n)$ を *Fourier* 係数に持つ保型形式 f が存在する．ただし，$p|N$ でかつ χ が自明の場合は，$\chi(p)=0$ とする．

Theorem 2 の漸化式から，$\widetilde{T}(p^2)$ (p は素数) の同時固有関数 $f = \sum_{n\geq 0} a(n)\mathrm{e}(nz) \in M_{k+1/2}(N,\chi)$ と $(N,t)=1$ をみたす平方因子を持たない自然数 t から与えられる形式的 Dirichlet 級数 $\sum_{n\geq 1} a(tn^2)n^{-s}$ は Euler 積表示を持つ．

実際，この Dirichlet 級数は，任意の素数 p に対して

$$\sum_{n\geq 1} a(tn^2)n^{-s} = \sum_{(n,p)=1}\left(\sum_{l\geq 0} a(tn^2p^{2l})p^{-sl}\right)n^{-s} = \sum_{(n,p)=1} H_{n,p}(p^{-s})n^{-s}$$

の様に，形式的冪級数 $H_{n,p}(x) = \sum_{m\geq 0} a(tp^{2m}n^2)x^m$ を用いて表わされる．

他方，この形式的冪級数は上記漸化式から

$$\begin{aligned}
\omega_p x\cdot H_{n,p}(x) &= \omega_p a(tn^2)x + \sum_{m\geq 1}\omega_p a(tp^{2m}n^2)x^{m+1}\\
&= \left(a(tn^2p^2) + \chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1}a(tn^2)\right)x\\
&\quad + \sum_{m\geq 1}\left(a(tp^{2m+2}n^2) + \chi(p^2)p^{2k-1}a(tp^{2m-2}n^2)\right)x^{m+1}\\
&= H_{n,p}(x) - a(tn^2) + \chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1}a(tn^2)x + \chi(p^2)p^{2k-1}x^2H_{n,p}(x)
\end{aligned}$$

すなわち，

$$H_{n,p}(x)\left(1-\omega_p x + \chi(p^2)p^{2k-1}x^2\right) = a(tn^2)\left(1-\chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1}x\right)$$

をみたす．

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} a(tn^2)n^{-s} &= \left(\sum_{(n,p)=1} a(tn^2)n^{-s}\right)\times\left(1-\chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1-s}\right)\\
&\quad \times\left(1-\omega_p p^{-s} + \chi(p^2)p^{2k-1-2s}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

が得られる．次に，$\sum_{(n,p)=1} a(tn^2)n^{-s}$ に対して異なる素数毎にこの操作を繰り返していけば，次の結果が得られる．

Theorem 3. **([Shimura[14]:Theorem 1.9])** t は 1 以外の N と素な平方因子を持たない自然数とする．任意素数 p に対して，

$$f|\widetilde{T}(p^2) = \omega_p f, \quad \omega_p \in \mathbb{C}$$

をみたす保型形式 $f = \sum_{n\geq 0} a(n)\mathrm{e}(nz) \in M_{k+1/2}(N,\chi)$ から得られる形式的 *Dirichlet* 級数 $\sum_{n\geq 1} a(tn^2)n^{-s}$ は次の *Euler* 積を持つ；

$$\sum_{n\geq 1} a(tn^2)n^{-s} = a(t)\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1-s}\right)\left(1-\omega_p p^{-s}+\chi(p^2)p^{2k-1-2s}\right)^{-1}.$$

この Euler 積の分母

$$\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\omega_p p^{-s}+\chi(p^2)p^{2k-1-2s}\right)^{-1}$$

は t に依らず，また，$M_{2k}(N',\chi^2)$ 上の Hecke 固有形式から与えられる Dirichlet 級数の Euler 積表示と同じかたちをしている．この事実に気付いた志村は $f \in S_{k+1/2}(N,\chi)$ の場合におけるこの分母が実際に $M_{2k}(N',\chi^2)$ 上の Hecke 固有形式 F (の Dirichlet 級数) を与えることを証明し，f から F を与える写像 (Shimura 対応) を具体的に構成したのである．

そこで，この対応について次節で詳しく説明していく．

3 Shimura 対応

3.1 Shimura 対応

本節では $f(z) \in S_{k+1/2}(N,\chi)$ とし，$f(z)$ が Theorem 3 と同じ条件をみたすと仮定する．このとき，Theorem 3 から

$$\begin{aligned}
a(t)\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\omega_p p^{-s}+\chi(p^2)p^{2k-1-2s}\right)^{-1} &= \prod_{p:\text{素数}}\left(1-\chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{k-1-s}\right)^{-1}\sum_{n\geq 1}a(tn^2)n^{-s} \\
&= \left(\sum_{m\geq 1}\chi_1(m)\left(\frac{t}{m}\right)m^{k-1-s}\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 1}a(tn^2)n^{-s}\right) \\
&= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)\left(\frac{t}{d}\right)a(tn^2/d^2)d^{k-1}\right)n^{-s} \\
&= \sum_{n\geq 1}A_t(n)n^{-s}
\end{aligned}$$

が得られる．そこで，この Dirichlet 級数から与えられる $F_t(z) = \sum_{n\geq 1} A_t(n)\mathrm{e}(nz)$ が $M_{2k}(N_t,\chi^2)$ (ただし，N_t は t から定まる自然数) の元になることを Weil の逆定理を用いて示してみよう．

3.2 Shimura 対応の証明

最初に Weil の逆定理を準備する (この定理の証明は [10]§4.5 を参照せよ)．

Theorem 4 (Weil). 自然数 M を法とする *Dirichlet* 指標 φ に対し，*Dirichlet* 級数 $D(s)=\sum_{n\geqq 1} a(n)n^{-s}$, $(a_n \in \mathbb{C})$ が次の *3* 条件を全て満たすとき，$\sum_{n\geqq 1} a(n)\mathrm{e}(nz) \in M_{2k}(M,\varphi)$ が成り立つ．

(1) $D(s)$ はある右半平面 $\mathrm{Re}(s)>\sigma$ で絶対収束する．

(2) $(a,b)=1,\ b>0$ を満たす任意の等差数列 $\{a+bn \mid n \geqq 0\}$ と必ず交わりを持つ素数集合 $\mathcal{P}$ をとる．$r \in \{1\} \cup \mathcal{P}$ かつ $(r,M)=1$ を満たす任意の r を法とする原始指標 ψ に対して

$$R(s,\psi)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n\geqq 1}\psi(n)a(n)n^{-s}$$

とおくとき，$R(s,\psi)$ は全 s 平面上に解析接続され，任意垂直帯状領域 $\sigma_1<\mathrm{Re}(s)<\sigma_2$ で有界になる．

(3) ある右半平面 $\mathrm{Re}(s)>\sigma'$ で絶対収束する Dirichlet 級数 $\sum_{n\geqq 1} b(n)n^{-s}$ が存在して，(2) で与えた全ての ψ に対し，関数等式

$$R(2k-s,\psi)=\left(\frac{\psi(M)\varphi(r)\mathfrak{g}(\psi)^2}{r}\right)(r^2M)^{s-k}\sum_{n\geqq 1}\overline{\psi}(n)b(n)n^{-s}$$

が成り立つ．ただし，$\mathfrak{g}(\psi)=\sum_{i=1}^{r}\psi(i)\mathrm{e}(i/r)$ とする．

Remark 1. *Theorem 4* において，*Dirichlet* 級数 $D(s)$ が $\mathrm{Re}(s)<2k$ となる s でも絶対収束するならば，$\sum_{n\geqq 1} a(n)\mathrm{e}(nz) \in S_{2k}(M,\varphi)$ が成り立つ．

次に，いよいよ Shimura 対応の証明に取り掛かる． ここでは

$$\sum_{n\geq 1} A_t(n)n^{-s}=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)\left(\frac{t}{d}\right)a(tn^2/d^2)d^{k-1}\right)n^{-s}$$

が Theorem 4 の 3 条件をそれぞれ満たすことを示すことで $F_t(z)=\sum_{n\geq 1} A_t(n)\mathrm{e}(nz) \in M_{2k}(N_t,\chi^2)$ になることを証明する．なお，$f(z)=\sum_{n\geqq 1} a(n)\mathrm{e}(nz) \in S_{k+1/2}(N,\chi)$ の条件は全て Theorem 3 と同じとする．

(1) $\sum_{n\geq 1} A_t(n)n^{-s}$ の絶対収束性． $\cdots$ $a(n)=O(n^{k/2+1/4})$ に注意すれば，

$$\sum_{n\geq 1}\left|a(tn^2)n^{-s}\right| \leq \sum_{n\geq 1}\left|a(tn^2)\right| n^{-\mathrm{Re}(s)} \leq const. \times t^{k/2+1/4} \times \sum_{n\geq 1} n^{(k+1/2)-\mathrm{Re}(s)}.$$

よって，$\sum_{n\geq 1} a(tn^2)n^{-s}$ は $\mathrm{Re}(s)>k+3/2$ で絶対収束する．また，$\sum_{m\geq 1}\chi_1(m)\left(\frac{t}{m}\right)m^{k-1-s}$ も $\mathrm{Re}(s)>k$ で絶対収束するため，$\sum_{n\geq 1} A_t(n)n^{-s}$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s)>k+3/2$ で絶対収束する．

(2) 1 または N を割らない奇素数 r を法とする原始指標 ψ に対して，

$$\boldsymbol{D_t(s,\psi)=\sum_{n\geq 1}\psi(n)A_t(n)n^{-s}}$$

の，全 s 平面への正則関数としての解析接続性および任意の垂直帯状領域上での有界性． $\cdots$
t が一般の場合は $t=1$ の場合に帰着させられるため，$t=1$ の場合を示せばよい．形式的な計算から

$$D_1(s,\psi)=\sum_{n\geq 1}\psi(n)A_1(n)n^{-s}=\left(\sum_{m\geq 1}\psi(m)\chi_1(m)m^{k-1-s}\right)\cdot\left(\sum_{m\geq 1}\psi(m)a(m^2)m^{-s}\right)$$

が得られるため，右辺の Dirichlet 級数を Rankin の手法に従って積分表示してみる．

$$\begin{aligned}
&(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m\geq 1}\psi(m)a(m^2)m^{-s}\\
=&\int_0^\infty\left(\int_0^1 f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi})dx\right)y^{s-1}dy\\
=&\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi})y^{s+1}\frac{dxdy}{y^2}\\
=&\int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(Nr^2)} f(\gamma(z))\overline{h}(\gamma(z);\overline{\psi})\mathrm{Im}(\gamma(z))^{s+1}\frac{dxdy}{y^2}\\
=&\int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi})y^{s+1}\left(\sum_{\substack{(c,d)=1,\ c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ Nr^2)\\ c>0\ \mathrm{if}\ c\neq 0,\ d=1\ \mathrm{if}\ c=0}}\varphi(d)(cz+d)^{k-\nu}|cz+d|^{2\nu-1-2s}\right)\frac{dxdy}{y^2},
\end{aligned}$$

ただし，$\varphi(d)=\chi(d)\psi(d)\left(\frac{-1}{d}\right)^k$, と変形出来る．そこで，

$$\begin{aligned}
&2\cdot(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n\geq 1}\psi(n)A_1(n)n^{-(2s-\nu)}\\
=&\int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi})y^{s+1}\left(\sum_{m\geq 1}\varphi(m)m^{k+\nu-1-2s}\right)\\
&\times\left(\sum_{\substack{m.n\in\mathbb{Z}\\ (Nr^2m,n)=1}}\varphi(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu}\left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}\right)\frac{dxdy}{y^2}\\
=&\int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi})y^{s+1}\left(\sum_{\substack{m.n\in\mathbb{Z}\\ (m,n)\neq(0,0)}}\varphi(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu}\left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}\right)\frac{dxdy}{y^2}.
\end{aligned}$$

となる．この積分内の無限級数

$$C(z,s)=\sum_{\substack{m.n\in\mathbb{Z}\\ (m,n)\neq(0,0)}}\varphi(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu}\left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}$$

は解析的 Eisenstein 級数であり，φ が原始指標である場合，その性質が詳しく調べられている；

Lemma 1. ([Shimura[14];Lemma 3.1]) A は正整数とし，φ は A を法とする原始指標とする．α は非負整数とし，さらに $A=1$ の場合は $\alpha>0$ と仮定する．このとき，

$$H_\alpha(s,z,\varphi)=\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{\substack{m.n\in\mathbb{Z}\\ (m,n)\neq(0,0)}}\varphi(n)(Amz+n)^\alpha\left|Amz+n\right|^{-2s}$$

は $\mathrm{Re}(s)>\frac{\alpha}{2}+1$ で絶対収束し，整関数として全 s 平面に解析接続され，関数等式

$$H_\alpha(\alpha+1-s,z,\varphi)=(-1)^\alpha\mathfrak{g}(\varphi)A^{3s-\alpha-2}z^\alpha H_\alpha\left(s,-\frac{1}{Az},\overline{\varphi}\right),\quad \mathfrak{g}(\varphi)=\sum_{k=1}^{A}\varphi(k)\mathrm{e}(k/A)$$

をみたす．また，$\alpha = k - l \geq 0,\ 4A|B$ と仮定した上で $f \in S(k+1/2, \widetilde{\Gamma}(B)),\ g \in M(l+1/2, \widetilde{\Gamma}(B))$ をとるとき，任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\int_{\Gamma(B)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{g(z)} y^{l+1/2} H_\alpha(s, z, \varphi) \frac{dxdy}{y^2}$$

は絶対収束し，かつ s の関数として任意の垂直帯状領域で有界となる．

この Lemma 1 を用いるために φ が誘導する原始指標 φ_0 を用いて解析的 Eisenstein 級数 $C(z,s)$ を書き直す．$\chi_1(m) = \chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k$ の導手を M とおき，$N = MK$ と分割する．次に $E = \prod_{\substack{p:素数 \\ p|N, p\nmid M}} p$ とおけば，

$$\begin{aligned}
C(z,s) &= \sum_{\substack{m.n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \left(\sum_{0<l|(n,E)} \mu(l)\right) \varphi_0(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu} \left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s} \\
&= \sum_{\substack{m.n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \sum_{\substack{0<l|(n,E) \\ n=ln', K=ll'}} \mu(l)\varphi_0(l) l^{k+\nu-1-2s} \varphi_0(n')(Ml'r^2mz+n')^{k-\nu} \left|Ml'r^2mz+n'\right|^{2\nu-1-2s} \\
&= \sum_{0<l|E} \mu(l)\varphi_0(l) l^{k+\nu-1-2s} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \varphi_0(n)(Ml'r^2mz+n)^{k-\nu} \left|Ml'r^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}.
\end{aligned}$$

従って, $2t = 2s - 2\nu + 1$ とおくことで

$$\begin{aligned}
&2\cdot(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\pi^{-t}\Gamma(t)D_1(2s-\nu,\psi) \\
=\ &(Kr)^{-t} \sum_{0<l|E} \mu(l)\varphi_0(l) l^{k-s-1/2} \int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi}) y^{\nu+1/2} H_{k-\nu}(t, (K/l)rz, \varphi_0) \frac{dxdy}{y^2}
\end{aligned}$$

と変形出来る．こうして，Lemma 1 から $R_1(s,\psi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_1(s,\psi)$ は全 s 平面へ正則関数として解析接続され，任意の垂直帯状領域上での有界となる．

(3)　(2) の r，ψ に対して $R_t(s,\psi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_t(s,\psi)$ とおくとき，

$$R_t(2k-s,\psi) = \left(\frac{\psi(N_t)\chi^2(r)\mathfrak{g}(\psi)^2}{r}\right)(r^2N_t)^{s-k}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n\geq 1}\overline{\psi}(n)b_n n^{-s}$$

をみたす自然数 N_t と右半平面で絶対収束する Dirichlet 級数 $D(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ の存在性．　$\cdots$

この場合も $t=1$ の場合に容易に帰着出来るため，$t=1$ の場合における概略のみ示す．

変数変換 $s \mapsto k+\nu-s$ を行うとき，$2\cdot(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\pi^{-t}\Gamma(t)D_1(2s-\nu,\psi)$ の積分項

$$\int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi}) y^{\nu+1/2} H_{k-\nu}(t, (K/l)rz, \varphi_0) \frac{dxdy}{y^2} \tag{3.1}$$

が, (ある右半平面で絶対収束する) Dirichlet 級数で表わせればよい．この変数変換により，$t = s-\nu+1/2 \mapsto -t+(k-\nu)+1$ となるため，Lemma 1 を用いれば,

$$H_{k-\nu}\left((k-\nu)+1-t, \frac{Krz}{l}, \varphi_0\right) = (-1)^{k-\nu}\mathfrak{g}(\varphi_0)(Mr)^{3t-(k-\nu)-2}\left(\frac{Krz}{l}\right)^{k-\nu} H_{k-\nu}\left(t, \frac{-l}{Nr^2z}, \overline{\varphi_0}\right)$$

となる．そこで，(3.1) において変数変換 $z \mapsto -1/Nr^2z$ を行うことを考える．この変換は明らかに Atkin-Lehner 型作用素で表わせるため，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{-1}{Nr^2z}\right)\overline{h}\left(\frac{-1}{Nr^2z};\overline{\psi}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{Nr^2z}\right)^{\nu+1/2} \\
= & \left(N^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\left(-\sqrt{-1}r^2z\right)^{k+\frac{1}{2}}g(r^2z)\right)\overline{\left(-\sqrt{-1}\right)^{\nu}r^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{g}(\overline{\psi})\left(\frac{-2rN\sqrt{-1}z}{4}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}h\left(\frac{N}{4}z;\psi\right)}\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{Nr^2z}\right)^{\nu+1/2} \\
= & \left(N^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\frac{\left(-\sqrt{-1}\right)^{k+1}r^{2k-\nu}}{2}\overline{\mathfrak{g}(\overline{\psi})}(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\right)z^{k-\nu}g(r^2z)\overline{h\left(\frac{N}{4}z;\psi\right)}y^{\nu+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

ただし，$g(z)=f|\left(\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{smallmatrix}\right), N^{k/2+1/4}\left(-\sqrt{-1}z\right)^{k+1/2}\right)\in S_{k+1/2}\left(N,\overline{\chi}\left(\frac{N}{\cdot}\right)\right)$, が得られる．こうして，

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{h}(z;\overline{\psi})y^{\nu+1/2}H_{k-\nu}(-t+(k-\nu)+1,(Krz/l),\varphi_0)\frac{dxdy}{y^2} \\
= & \ (\text{elementary constant factor})\times\int_{\Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathfrak{H}} g(r^2z)\overline{h\left(\frac{N}{4}z;\psi\right)}y^{\nu+\frac{1}{2}}H_{k-\nu}(t,(K/l)rz,\varphi_0)\frac{dxdy}{y^2}
\end{aligned}
$$

となる．この右辺の積分項は (3.1) と同じかたちをしているため，(2) と全く同じ議論を繰り返すことで，右半平面で絶対収束する Dirichlet 級数を用いて表わすことが出来る (詳細は [14] を参照せよ).

以上 (1), (2), (3) から $D_t(s,\psi)$ は十分多くの関数等式を持つ整函数に解析接続されるため，Weil の逆定理から $F_t(z)=\sum_{n\geq 1}A_t(n)\mathrm{e}(nz)\in M_{2k}(N_t,\chi^2)$ が得られる．

Remark 2. この証明から分かる様に，*Dirichlet* 級数 $D_t(s,\psi)$ が全ての素数に関する無限積を持つ必要性は実はない．すなわち，$f\in S_{k+1/2}(N,\chi)$ が，$p\not|\mathrm{cond}(\chi_t)$ をみたす N の全ての素因子 p における $\widetilde{T}(p^2)$ の同時固有関数であるならば，$D_t(s,\psi)$ は上記積分表示を持ち，同じ結果が得られる．

以上の結果をまとめ直してみよう．

Theorem 5. ([Shimura[14];Main Theorem]) *$k,N\in\mathbb{N}$ で $4|N$ とし，χ は N を法とする (even な) Dirichlet 指標とする．t は平方因子を持たない正整数とし，$\chi_t(m)=\chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k\left(\frac{t}{m}\right)$ は 法 tN の Dirichlet 指標とする．ここで，$f=\sum_{n\geq 1}a(n)\mathrm{e}(nz)\in S_{k+1/2}(N,\chi)$ が，$p|N$, $p\not|\mathrm{cond}(\chi_t)$ をみたす全ての素数 p における $\widetilde{T}(p^2)$ の同時固有関数であるとき，*

$$
\mathcal{S}^{t,\chi}_{k,N}(f)=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\chi_t(d)a(tn^2/d^2)d^{k-1}\right)\mathrm{e}(nz)
$$

は，ある自然数 N_t をとって $M_{2k}(N_t,\chi^2)$ 上の Hecke 同時固有形式となる．また，$k\geq 2$ である場合，$\sum_{n\geq 1}A_t(n)n^{-s}$ は $2k>\mathrm{Re}(s)>k+3/2$ で絶対収束するため，f は $S_{2k}(N_t,\chi^2)$ 上の Hecke 同時固有形式になる．

Theorem 5 で与えられたレベル N_t を具体的に決定するためには，上記 (3) で示した $R_t(2k-s,\psi)$ の関数等式の中に現れる定数 M を具体的に求める必要がある． M は，(3) の積分項を通して詳細な計算から求められ（ただし，関数等式の設定から，M は一通りには決まらない），その中の最小値を N_t とするとき，これは次式で与えられる；

$\chi_t(m)=\chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k\left(\frac{t}{m}\right)$ の導手を M_t, また $t_2=(t,N)$ とおき，$\chi^{'}(m)=\chi(m)\left(\frac{t_2}{m}\right)$ の導手を M' とする．ここで，$\nu(2)=4,\ \nu(3)=2,\ \nu(p)=1\ (p>3)$ をみたす数列 $\nu(n)$ に対して，２つの正整数

$$H=\prod_{p|N,\ p\nmid M_t}p^{\nu(p)},\quad K_0=\prod_{\substack{p|H\\(f|\widetilde{T}(p^2))/f\neq 0}}p$$

を定義する．さらに，$N^*=[N,H^2,M']$ としたとき，$N_t=N^*/2K_0$ と取れる．

なお，ここで与えられた N_t は実は Best possible ではない．そこで，次節では，志村対応を別の角度から眺めて N_t の Best possible を求めていく．

4　Shimura 対応の積分表示

4.1　Theta Kernel による積分表示

Niwa, Kojima, Cipra によって 志村対応は Theta Kernel を用いた積分で定式化され，その応用として ($k=1$ の場合を含む) 全ての場合において, N_t として $N/2$ がとれることが示された (ただし，$S_{k+1/2}(N,\chi)$ を，より小さな部分空間に制限すれば，N_t としてより小さな整数がとれる場合もある)．また，$k=1$ の場合では，志村対応で cusp 形式に移る $S_{k+1/2}(N,\chi)$ の部分空間も特徴付けられた．この様に 志村対応の積分表示を与えれば，(核関数の性質から) N_t の Best possible が直接求められる．ただ，上記一連の論文で与えられた積分表示では，Metaplectic 群の表現と直交群の表現から作られる Theta Kernel 自体は非正則であるために，その挙動（これが与えられることで志村対応による像の cusp での値が内積表示出来る）や Theta Kernel を用いた積分の正則性などを地道に調べなければならず，若干見通しが悪い部分がある．他方，Zagier は　Doi-Naganuma 対応の積分表示を与える正則な核関数を構成し，その変数を対角的に制限することで志村対応の積分表示も同時に与えられることに気付いた．そこで，本節では Zagier の与えた志村対応の積分表示について紹介し，それを基に N_t がどの様にとれるのかについて説明する．

なお，現在，志村対応の積分表示に関する一連の仕事は全て，Symplectic 群 上の Weil 表現を既約 unitary 表現の直和に分解したときに, 各既約成分に現れる Metaplectic 群上の既約表現と直交群上の既約表現の pair 同士を対応させる theta lift の理論 (Howe duality の 1 例) の枠組みの中で捉えられ，整理・再構成されている．特に, Lion-Vergne[8] では，表現論を用いて Howe duality を具体的に書き下すことで Zagier の積分表示を別の角度から直接与えており，表現論サイドで何が起きているのかを理解する上で非常に役立つといえよう ([8] の詳細については原著の他，荒川 [1]，松本 [9] も併せて是非御一読頂きたい).

また，本節では $t=1$ の場合に限定した $\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}$ の積分表示についてのみ与えることにする (一般の t では, 核関数の Fourier 展開が非常に複雑なものとなるため，Kohnen 部分空間上に制限した $\mathcal{S}^{t,\chi}_{k,N}$ でしか Theorem 5 は与えられていない．これについては次々節で詳しく説明する).

以後，$\mathfrak{H}$ 上の変数として τ および z を同時に用いるが，それらの実部と虚部はそれぞれ

$$\tau=\mathrm{Re}(\tau)+i\mathrm{Im}(\tau)=x+iy,\quad z=\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)=\rho+i\sigma$$

で表わすことにする．

Theorem 6. (Zagier identity[19, 8]) $k>1, N\in\mathbb{N}$ とし，χ は $4N$ を法とする *Dirichlet* 指標とする．

ここで，

$$\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})=(-1)^k\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\\4N^2|a,4N|b\\b^2-4ac=16N^2n}}\chi(c)\overline{(az^2+bz+c)}^{-k}n^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}(n\tau),\qquad(\tau,z)\in\mathfrak{H}^2$$

とおくとき，任意の $f \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$ に対して，

$$\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)(z) = \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)\overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z})}(\mathrm{Im}\tau)^{k+\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{y^2}$$

が成り立ち，$\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)(z) \in S_{2k}(2N, \chi^2)$ をみたす．言い換えれば，この場合は N_1 として $2N$ がとれる．

Proof. Riesz の表現定理より，$f(\tau) = \sum_{n\geq 1} a(n)\mathrm{e}(n\tau) \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$ から $a(n)$ を取り出す線型写像は (n-th Poincaré 級数 $P_{k+\frac{1}{2},4N,n,\chi}(\tau) \in S_{k+1/2}(4N, \chi)$ を用いた) 内積表示を持ち，それは

$$< f, P_{k+\frac{1}{2},4N,n,\chi} > = \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{i_{4N}\,(4\pi n)^{k-\frac{1}{2}}}a(n)$$

で表わされる．そこで，

$$\Omega^*_{k,N,\chi}(\tau, z) = \left(\frac{i_{4N}\,(4\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right)\sum_{n\geq 1} n^{k-1}\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)(n/d)^k P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau)\right)\mathrm{e}(nz)$$

とおけば，$\Omega^*_{k,N,\chi}(\tau, z)$ は $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ 上で広義一様絶対収束して

$$\begin{aligned}
< f, \Omega^*_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z}) > &= \frac{i_{4N}\,(4\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\sum_{n\geq 1} n^{k-1}\sum_{d|n}\chi_1(d)(n/d)^k < f, P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi} > \overline{\mathrm{e}(-n\overline{z})} \\
&= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)a(n^2/d^2)d^{k-1}\right)\mathrm{e}(nz) \\
&= \mathcal{S}^{1,\chi}_{k,4N}(f)
\end{aligned}$$

をみたし，志村対応の内積表示を得ることが出来る．ここで，

$$\Omega^*_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z}) = i_{4N}\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z})$$

とおけば，上記内積表示は

$$\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,4N}(f)(z) = \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)\overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z})}(\mathrm{Im}\tau)^{k+\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{y^2}$$

と積分表示出来る．次に，この核関数 $\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z})$ の変数 τ に関する Fourier 展開を Zagier の手法で与えれば (Zagier は Doi-Naganuma 対応の核関数の変数を対角的に制限することでこれを与えた ([13] 参照)),

$$\begin{aligned}
\Omega_{k,N,\chi}(\tau, -\overline{z}) &= (-1)^k\sum_{n\geq 1}\overline{\omega_k(z;\chi,n)}n^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}(n\tau), \\
\omega_k(z;\chi,n) &= \sum_{Q\in L_{N,n}}\overline{\chi}(Q)Q(z,1)^{-k}, \quad Q(z,1) = (z,1)Q\begin{pmatrix} z \\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．ただし，$L_{N,n}$ は，$\Gamma_0(2N)$ が

$$Q \;\mapsto\; Q\circ g = {}^t gQg, \quad g \in \Gamma_0(2N)$$

で群作用する 2 次形式の空間

$$L_{N,n} = \left\{ Q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, 4N^2|a,\ 4N|b,\ b^2 - 4ac = 16N^2 n \right\}$$

を表わし，$Q = \left(\begin{smallmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{smallmatrix}\right)$ に対して $\chi(Q) = \chi(c)$ とする．定義から，任意の $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(2N)$ に対して，

$$\begin{aligned} \omega_k(g(z);\chi,n) &= \sum_{Q \in L_{N,n}} \overline{\chi}(Q)(cz+d)^{2k} \left((z,1)^t gQg \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-k} \\ &= \chi(d)^2 (cz+d)^{2k} \omega_k(z;\chi,n), \end{aligned}$$

が成り立つため，直ちに $\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f) \in S_{2k}(2N,\chi^2)$ が導かれる． □

Remark 3. 実は *[8]* では,*Theta Kernel* $\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})$ を先に与えた上で，これが *Poincaré* 級数の無限和 $i^{-1}_{4N}\Omega^*_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})$ に等しいことを証明しており，上記証明とは流れが異なっている．

Remark 4. *Shimura* 対応の積分表示式とその *Fourier* 係数を用いた表示式から，*Shimura* 対応が *Hecke* 作用素と可換になることが直ちに導かれる．すなわち，$k \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$, 素数 p に対して

$$\begin{array}{ccc} S_{k+1/2}(4N,\chi) & \xrightarrow{\mathcal{S}^{t,\chi}_{k,N}} & S_{2k}(2N,\chi^2) \\ {\scriptstyle \widetilde{T}(p^2)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T(p)} \\ S_{k+1/2}(4N,\chi) & \xrightarrow[\mathcal{S}^{t,\chi}_{k,N}]{} & S_{2k}(2N,\chi^2) \end{array}$$

が成り立つ．

Remark 5. f は Theorem 5 の条件を満たすとする．$\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)$ の積分表示式 (Theorem 6) を *Mellin* 変換すれば，

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n\geq 1} A_1 n^{-s} &= \int_0^\infty \mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)(i\sigma)\sigma^s \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &= \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}} f(\tau) \left(\int_0^\infty \overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau,i\sigma)}\sigma^s \frac{d\sigma}{\sigma} \right) y^{k+1/2} \frac{dxdy}{y^2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

が得られる．他方，$t = s + 1/2$ とおいて 3.2 節の議論を繰り返せば,

$$2^{2-s}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n\geq 1} A_1 n^{-s} = \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}} f(\tau) \left(\overline{h(z;1)} C^*(z,t) \right) y^{k+\frac{1}{2}} \frac{dxdy}{y^2}, \tag{4.2}$$

も得られる．ただし，$C^*(z,t)$ は

$$C^*(z,t) = (Kr)^{-t} \sum_{0<l|E} \mu(l)\varphi_0(l) l^{k-t} y^{-k} H_k(t,(K/l)rz,\varphi_0)$$

で与えられる *Eisenstein* 級数の有限和とする．(4.1), (4.2) から f の *Shimura* 対応による像の保型 L 関数は

$$2^{s-2}\overline{h(z;1)}C^*(z,t) \text{ および } \int_0^\infty \overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau,i\sigma)}\sigma^s \frac{d\sigma}{\sigma}$$

を用いた 2 つの積分表示を持つことが分かる．

4.2 Shintani 対応

前節で与えた Shimura 対応 $\mathcal{S}_{k,N}^{1,\chi}$ の積分表示から，Shimura 対応の逆対応 (Shintani 対応) を与えることも出来る (Shintani 対応の詳細については，原論文 [16] や下記文献の他，村瀬 [11] も参照されたい).

$k>1$, $N\in\mathbb{N}$ とする．$g(z)=\sum_{n\geq 1}b(n)\mathrm{e}(nz)\in S_{2k}(2N,\chi^2)$ に対して，

$$\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)(\tau)=\int_{\Gamma_0(2N)\backslash\mathfrak{H}}g(z)\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})\mathrm{Im}(z)^{2k}\frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2}$$

とおけば，その定義および Poincaré 級数の性質から直ちに $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)\in S_{k+1/2}(4N,\chi)$ が得られ，$\mathcal{S}_{k,N}^{1,\chi}$ と $\mathcal{S}_{k,N}^{1,\chi*}$ は Petersson 内積に関して互いに共役となる．ここで問題となるのは $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)$ の Fourier 係数の具体的記述であるが，これは次の様にして求められる．指標と 2 次形式を共に固定する $\Gamma_1(2N)_Q=\{\gamma\in\Gamma_1(2N)\mid Q\circ\gamma=Q\}$ 上で $\omega_k(z;\chi,n)$ を書き直せば，

$$\omega_k(z;\chi,n)=\sum_{[Q]\in L_{N,n}/\Gamma_1(2N)}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_1(2N)_Q\backslash\Gamma_1(2N)}\overline{\chi}(Q\circ\gamma)(Q\circ\gamma)(z,1)^{-k}$$

となる．この変形に沿って $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}$ を書き直せば，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)(\tau)&=i_{N,k}\sum_{n\geq 1}n^{k-1/2}\sum_{[Q]\in L_{N,n}/\Gamma_1(2N)}\left(\int_{\Gamma_1(2N)_Q\backslash\mathfrak{H}}g(z)\chi(Q)\overline{Q(z,1)}^{-k}\sigma^{2k}\frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2}\right)\mathrm{e}(n\tau),\\ i_{N,k}&=(-1)^k[\Gamma_0(2N)/\{\pm1\}:\{\pm1\}\Gamma_1(2N)/\{\pm1\}]\end{aligned}$$

が得られる．基本的な計算から，この内側の積分は周期積分に帰着される；

$$\int_{\Gamma_1(2N)_Q\backslash\mathfrak{H}}g(z)\chi(Q)\overline{Q(z,1)}^{-k}\sigma^{2k}\frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2}=2^{-2k+3}\chi(Q)\pi(16N^2n)^{\frac{1}{2}-k}\begin{pmatrix}2k-3\\k-1\end{pmatrix}\int_{C_Q}g(z)Q(z,1)^{k-1}dz.$$

ここで，積分経路 C_Q は，次の様な向きを入れた $Q(z,1)=0$ の根を結ぶ測地線である；

(1) $a>0$ のとき，$(-b-4N\sqrt{n})/2a$ から $(-b+4N\sqrt{n})/2a$ に向かった半円 $a|z|^2+b\mathrm{Re}z+c=0$ の $\Gamma_1(2N)\backslash\mathfrak{H}$ による像 ($a<0$ のときは逆向きにとる),

(2) $a=0,b>0$ のとき，$-c/b$ から $i\infty$ に向かった直線 $b\mathrm{Re}z+c=0$ の $\Gamma_1(2N)\backslash\mathfrak{H}$ による像 ($b<0$ のときは逆向きにとる.)

この周期積分は g に付随する保型 L 関数の臨界値における値の有限和で表わされるため ([6] 参照)，結果として次の定理が導かれる；

Theorem 7. ([Kojima[6] ; Theorem 2])

記号および条件は全て上記に同じとする．$g(z)=\sum_{n\geq 1}b(n)\mathrm{e}(nz)\in S_{2k}(N,\chi^2)$ は全ての *Hecke* 作用素に関する同時固有関数であるとき，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)(\tau)&=d_{N,k}\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\text{有限個の指標}\,\psi}\ \sum_{0\leq j\leq 2k-2}c_j(\psi,g)L(g,j+1,\psi)\right)\mathrm{e}(n\tau),\\ d_{N,k}&=(-1)^k2^{-2k+3}(16N^2)^{\frac{1}{2}-k}\pi\begin{pmatrix}2k-3\\k-1\end{pmatrix},\quad L(g,s,\psi)=\sum_{n\geq 1}\psi(n)b(n)n^{-s}\end{aligned}$$

が成り立つ.

Remark 6. *Oda[12]* は，*(Niwa, Shintani, Zagier* によって与えられた*) Shintani* 対応に関する諸結果 *(*積分表示と *Zagier identity)* を一般化して，整数の重さを持つ楕円保型形式から符号 $(2,n-2)$ の直交群上の正則 *cusp* 形式への持ち上げ写像を構成した．これについては菅野 *[17]* を参照せよ.

4.3 Kohnen 空間

Shimura 対応を $S_{k+1/2}(4N,\chi)$ の部分空間上で制限すれば，像のレベル N_t を $N/2$ より小さくとれる例が現れる．そこで，本節では，Shimura 対応 $\mathcal{S}_{k,4N}^{t,\chi}$ を適当な部分空間 (Kohnen 空間) 上に制限したものの積分表示を与え，レベル N_t がより小さくとれることを示す．

$k \geq 2$ は整数，N は正奇数とし，χ を N を法とする Dirichlet 指標とする．N_1 を χ の導手とし，χ_{pri} を χ から誘導される原始指標とする．また，$\chi(-1)=\epsilon$, $\chi^* = \left(\frac{4\epsilon}{\cdot}\right)\chi$, $N_2 = N/N_1$ とそれぞれおく．

$\xi_{k+1/2,\epsilon} = \left(\left(\begin{smallmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{smallmatrix}\right), \epsilon^{k+1/2}\mathrm{e}\left((2k+1)/8\right)\right) \in \mathfrak{G}$ に対して．$Q_{k+1/2,4N,\chi^*} = [\widetilde{\Gamma}_0(4N,\chi^*)\xi_{k+1/2,\epsilon}\widetilde{\Gamma}_0(4N,\chi^*)]$ とおくとき，$Q_{k+1/2,N,\chi}$ は $S_{k+1/2}(4N,\chi^*)$ 上で hermitian な作用素になる．そこで $Q_{k+1/2,N,\chi^*}$ に関する $S_{k+1/2}(4N,\chi^*)$ の固有空間のうち，固有値が $\alpha = (-1)^{[(k+1)/2]}2\sqrt{2}\epsilon$ になるものを，$S^+_{k+1/2}(N,\chi)$ とおき，Kohnen 空間とよぶ．Kohnen 空間は

$$S^+_{k+1/2}(N,\chi) = \left\{ f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)\mathrm{e}(nz) \in S_{k+1/2}(4N,\chi^*) \;\middle|\; a(n) = 0 \ \text{ if } \ \epsilon(-1)^k n \equiv 2,3\,(4) \right\}$$

で特徴付けられる．ここで，$\epsilon(-1)^k D > 0$, $(N,D)=1$ をみたす基本判別式 D に対する $S^+_{k+1/2}(N,\chi)$ 上の Shimura 対応 $\mathcal{S}_{k,4N}^{D,\chi}$ の内積表示は，$\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ 上で広義一様絶対収束する核関数 $\Omega^+_{k,N,\chi}(\tau,z)$ を用いて次の様に表わされる；

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k,4N}^{D,\chi}(f)(z) &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)\chi(d)a(|D|n^2/d^2)d^{k-1}\right)\mathrm{e}(nz)\\ &= < f(\tau), \Omega^+_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z}) >,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^+_{k,N,\chi}(\tau,z) &= \left(\frac{i_{4N}\,(4\pi|D|)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right) 2\cdot\sum_{n\geq 1} n^{k-1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)\overline{\chi}(d)(n/d)^k\,\mathrm{Pr}(P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau))\right)\mathrm{e}(nz)\\ &= \left(\frac{i_{N}\,(4\pi|D|)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right) 3\cdot\sum_{n\geq 1} n^{k-1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)\overline{\chi}(d)(n/d)^k\,\mathrm{Pr}(P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau))\right)\mathrm{e}(nz).\end{aligned}$$

ここで，Pr は $S_{k+1/2}\left(4N,\left(\frac{4\epsilon}{\cdot}\right)\chi\right)$ から $S^+_{k+1/2}(N,\chi)$ への射影

$$\mathrm{Pr} \;=\; \frac{1}{\alpha-\beta}\left(Q_{k+1/2,N,\chi^*}-\beta\right), \quad \beta = -\frac{\alpha}{2}$$

を表わす．問題はこの核関数の τ に関する Fourier 展開であるが，これは Zagier の方針に従って Poincaré 級数の Fourier 係数から計算出来るものの，かなり大変な作業になる．

Proposition 2. ([Kohnen[5] ; Theorem 1], [Kojima-Tokuno[7] ; Theorem 2.2])
$k \geq 2$ に対して，

$$\Omega^+_{k,N,\chi}(\tau,z) = i_N C^{-1}_{k,D,\chi_{\mathrm{pri}}} \sum_{\substack{n\geq 1\\ \epsilon(-1)^k n\equiv 0,1\,(4)}} n^{k-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t|N_2}\mu(t)\left(\frac{D}{t}\right)\overline{\chi_{\mathrm{pri}}}(t)t^{k-1}\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(tz;D,\epsilon(-1)^k n,\chi_{\mathrm{pri}})\right)\mathrm{e}(n\tau).$$

ただし，$C_{k,D,\chi_{\rm pri}}$ は $\chi_{\rm pri}$ の *Gauss* 和 $W(\chi_{\rm pri})$ に付随する定数とし，$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}$ は *4.1* 節で与えた *Zagier identity* に現れる級数 $\omega_k(z;\chi,n)$ を次の様に一般化したものである；

$$C_{k,D,\chi_{\rm pri}} = (-1)^{[k/2]}|D|^{-k+1/2}\pi\binom{2k-2}{k-1}2^{-3k+2}\left(\frac{D}{N_1}\right)\chi_{\rm pri}(-D)W(\chi_{\rm pri})\epsilon^{1/2}N_1^{-k},$$

$$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^k n,\chi_{\rm pri}) = \sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\\ b^2-4ac=\epsilon(-1)^k N_1^2 Dn\\ (N_1^2N_2/t)|a}}\omega_D(a,b,c)\chi_{\rm pri}(c)(az^2+bz+c)^{-k}.$$

この中に現れる $\omega_D(a,b,c)$ は，$\Omega^+_{k,N,\chi}(\tau,z)$ の τ での Fourier 展開の際に $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ から派生する 2 次形式上の指標である；D は基本判別式とし，$[a,b,c](X,Y)$ は $D|(b^2-4ac)$ をみたす 2 次形式とする．このとき，

$$\omega_D(a,b,c) = \begin{cases}\left(\dfrac{D}{r}\right) & \cdots\ (a,b,c,D)=1\text{ のとき．ただし,}r\text{ は }[a,b,c](X,Y)\text{ で表わされる整数,}\\ 0 & \cdots\ (a,b,c,D)>1\text{ のとき．}\end{cases}$$

$\omega_D(a,b,c)$ は $\varGamma_0(1)$ の作用で不変であり，r の取り方に依らない．この Proposition 2 から，指標で捻った Poincaré 級数の和の (τ に関する) Fourier 係数$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^k n,\chi_{\rm pri})$ に現れる $\omega_D(a,b,c)\chi_{\rm pri}(c)(az^2+bz+c)^{-k}$ は，D と N (および χ) によってコントロールされた primitive な 2 次形式 $[a,b,c]$ と，それらから持ち上げられた 2 次形式 $[at^2,bt,c]$ $(t|N_2)$ だけで与えられており，$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^k n,\chi_{\rm pri})$ における 2 の寄与は全て消えていることが分かる．また $\epsilon(-1)^k n\equiv 0,1\,(4)$ から，この $\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^k n,\chi_{\rm pri})$ は潰れていない．従って，$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^k n,\chi_{\rm pri})$ は，(定義から) レベルに関する 2 の寄与が消失して $S_{2k}\left(N_1t,\overline{\chi^2_{\rm pri}}\right)$ の元になる．これは，すなわち $\mathcal{S}^{D,\chi}_{k,N}(f)(z)\in S_{2k}(N,\chi^2)$ を導き，こうして，$\mathcal{S}^{D,\chi}_{k,4N}|_{S^+_{k+1/2}(N,\chi)}$ による像のレベル N_D は $4N/2$ に止まらず，$4N/4$ まで落ちることが示される．

なお，この基本判別式 D に関する Zagier identity を Kohnen 空間以外の空間で与えようとした場合，2 の寄与が判別式や指標内にまで入り込み，非常に複雑化することが予想される．

Remark 7. *Kohnen* 空間 $S^+_{k+1/2}(N,\chi)$ は *Hecke* 作用素 $\widetilde{T}(p^2)$ ($p\neq 2$ は素数) の作用に関して閉じているものの，$\widetilde{T}(4)$ の作用では閉じていない．そこで，$\widetilde{T}(4)$ の代わりに $\widetilde{T}'(4)=\frac{3}{2}\widetilde{T}(4)\,\mathrm{Pr}$ を用いれば，$S^+_{k+1/2}(N,\chi)$ は $\widetilde{T}'(4)$ の作用で閉じており，$\widetilde{T}'(4)$ もまた $\widetilde{T}(p^2)$ と可換になることが分かる．そこで，*Kohnen* 空間上の 4 における *Hecke* 作用素は, $\widetilde{T}'(4)$ を表わすものとする．なお，$\widetilde{T}(p^2)$ ($p\neq 2$) , $\widetilde{T}'(4)$ は *Shimura* 対応と可換になることも定義から直ちに分かる．

4.4 Eisenstein 級数上の Shimura 対応

具体的に Fourier 係数を比較することで，Eisenstein 級数上でも Shimura 対応を定義出来る場合がある．$\varGamma_0(4)$ の 正則な cusp $i\infty$, 0 における重さ $k+1/2(\geq 5/2)$ の Eisenstein 級数をそれぞれ

$$\begin{aligned}E^{i\infty}_{k+1/2}(z) &= \sum_{\alpha\in\varGamma_\infty\backslash\varGamma_0(4)} j(\alpha,z)^{-2k-1}\in M_{k+1/2}(4,1),\\ E^0_{k+1/2} &= (-1)^k i(z)^{-k-1/2}E^{i\infty}_{k+1/2}\left(-\frac{1}{4z}\right)\in M_{k+1/2}(4,1)\end{aligned}$$

と定義する．このとき，

$$\begin{aligned}H_{k+1/2}(z) &= \zeta(1-2k)\left(E^{i\infty}_{k+1/2}(z)+2^{-2k-1}\left(1-(-1)^k i\right)E^0_{k+1/2}(z)\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}H(k;n)\mathrm{e}(nz)\end{aligned}$$

とおけば，各 Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算することによって

$$H(k;n)=\begin{cases}\zeta(1-2k) & \text{if}\quad n=0\\ \dfrac{1}{2}L\left(1-k,\left(\dfrac{\mathfrak{d}_n}{}\right)\right)\displaystyle\sum_{d|\mathfrak{f}_n}\mu(d)\left(\dfrac{\mathfrak{d}_n}{d}\right)d^{k-1}\sigma_{2k-1}\left(\dfrac{\mathfrak{f}_n}{d}\right) & \text{if}\quad n\geq 1,\ n\equiv 0,1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ 0 & \text{if}\quad n\geq 1,\ n\equiv 2,3\,(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$$

を得ることが出来る．ただし，$\mathfrak{d}_n$ は $\mathbb{Q}((-1)^k n)/\mathbb{Q}$ の判別式とし，$\mathfrak{f}_n=\sqrt{n|\mathfrak{d}_n|^{-1}}$ とおく．この Fourier 係数の値から直ちに $H_{k+1/2}(z)\in M^+_{k+1/2}(1,1)$ が成り立つ．さらに，この Fourier 係数の記述と μ の定義から，$n\geq 1$, 判別式 D に対して

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)d^{k-1}H\left(k\,;\,\frac{n^2}{d^2}|D|\right) &= \frac{1}{2}L\left(1-k,\left(\frac{D}{}\right)\right)\sum_{d|n}\sum_{l\,|\,(n\mathfrak{f}_D/d)}\mu(l)\left(\frac{D}{ld}\right)(ld)^{k-1}\sigma_{2k-1}\left(\frac{n}{ld}\right)\\ &= \frac{1}{2}L\left(1-k,\left(\frac{D}{}\right)\right)\sigma_{2k-1}(n)\end{aligned}$$

も成り立つ．この関係式には正規化された Eisenstein 級数

$$E_{2k}(z)=1+\frac{1}{\zeta(1-2k)}\sum_{n\geq 1}\sigma_{2k-1}(n)\mathrm{e}(nz)\ \in\ M_{2k}(1,1)$$

の Fourier 係数 $\sigma_{2k-1}(n)$ が現れることに注意して，$M^+_{k+1/2}(1,1)=\mathbb{C}H_{k+1/2}\oplus S^+_{k+1/2}(1,1)$ から $M_{2k}(1,1)=\mathbb{C}E_{2k}\oplus S_{2k}(1,1)$ への写像を次の様に形式的に定義する；

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}\ :\ M^+_{k+1/2}(1,1) &\quad\to\quad M_{2k}(1,1)\\ \sum_{n\geq 0}a(n)\mathrm{e}(nz) &\quad\mapsto\quad \frac{a(0)}{2}L\left(1-k,\left(\frac{D}{}\right)\right)+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)d^{k-1}a\left(\frac{n^2|D|}{d^2}\right)\right)\mathrm{e}(nz),\end{aligned}$$

ただし，D は $(-1)^k D>0$ をみたす基本判別式とする．

この写像 $\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}$ は定義から明らかに $S^+_{k+1/2}(1,1)$ 上で志村対応 $\mathcal{S}^{D,1}_{k,4}$ と一致する；

$$\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}|_{S^+_{k+1/2}(1,1)}=\mathcal{S}^{D,1}_{k,4}:S^+_{k+1/2}(1,1)\ \to\ S_{2k}(1,1).$$

そして，Eisenstein 級数同士を次式で対応させるのである；

$$\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}(H_{k+1/2})=\frac{1}{2}L\left(1-k,\left(\frac{D}{}\right)\right)\zeta(1-2k)E_{2k}.$$

Remark 8. $k=1$ の場合，この写像 $\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{1,4}$ を $M^+_{3/2}(1,1)$ 上で形式的に定義すれば，$\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{1,4}(M^+_{3/2}(1,1))=M_2(1)$ になるものの，$S^+_{3/2}(1,1)$ の中にも $\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{1,4}$ で *Eisenstein* 級数に対応する部分空間が現れる *([2]* 参照*)*．また，$k=0$ の場合についても $M^+_{1/2}(1,1)$ 上で $\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{0,4}$ を形式的に与えれば，これは退化したかたちで $\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{0,4}(M^+_{1/2}(1,1))=M_0(1)$ をみたす．実際，$M^+_{1/2}(1,1)$ は *theta* 級数 $\theta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}(n^2z)$ で張られる．他方，D が 1 でない基本判別式であるとき，$a(n)=\delta(n=\square)$ から $\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}(\theta)=\frac{1}{2}L(1-k,(\frac{D}{}))\in M_0(1)=\mathbb{C}$ となり，同様の対応を与えることが分かる．

参考文献

(1) 荒川　恒男; 第 *4* 回整数論サマースクール報告集, 99-127 (1996).

(2) B. A. Cipra; On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms, *Nagoya Math.J.* **91**, 49-117 (1983).

(3) N.Koblitz; Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms *Graduate text in Math.* **97**, Springer-Verlag (1993).

(4) N. コブリッツ 著，上田　勝，浜畑　芳紀 訳; 楕円曲線と保型形式 (第 2 版)，Springer-Japan (2008).

(5) W. Kohnen; Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight, *Math. Ann.* **271**, 237-268 (1985).

(6) H. Kojima; Fourier coefficients of modular forms of half integral weight, periods of modular forms and the special values of zeta functions, *Hiroshima Math. J.* **27**, 361-371 (1997).

(7) H. Kojima-Y. Tokuno; On the Fourier coefficients of modular forms of half integral weight belonging to Kohnen's spaces and the critical values of zeta functions, *Tohoku Math. J.* **56**, 125-145 (2004).

(8) G.Lion-M.Vergne; The Weil representation, Maslov index and Theta series. *Progress in Math.* **6**, Birkhäuser (1980).

(9) 松本　久義; 第 19 回整数論サマースクール報告集，Weil 表現と Howe duality (2011).

(10) T.Miyake; Modular Forms, Springer-Verlag (1989)

(11) 村瀬　篤; 第 8 回整数論サマースクール報告集, 67-83 (2000).

(12) T. Oda; On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature $(2, n-2)$ *Math.Ann.* **231**, 97-144 (1977).

(13) 坂田　裕; 第 8 回整数論サマースクール報告集, 157-189 (2000).

(14) G.Shimura; On modular forms of half-integral weight, *Ann. of Math.* **97**, 440-481 (1973).

(15) G.Shimura; On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half-integral weight, *Duke Math.J.* **71**, 501-557 (1993).

(16) T. Shintani; On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, *Nagoya Math. J.* **58**, 83-126 (1975).

(17) 菅野 孝史; 第 19 回整数論サマースクール報告集，Oda lift (2011).

(18) 上田　勝; 第 8 回整数論サマースクール報告集, 23-55 (2000).

(19) D. Zagier; Modular forms associated to real quadratic fields, *Inventiones Math.* **30**, 1-46 (1975).

Accidental 同型について

熊本大学大学院自然科学研究科　成田宏秋

1 導入

今回のサマースクールの目的の一つに「リフティングの原理を理解する」というのがある. 例えば志村対応 ([Sak], 参照) の背後には「テータリフト (またはテータ対応)」([Mat] 参照) というリフティングの原理がある. 一般にテータリフトは “dual pair” という 2 つの簡約群の組に対して定義される. これはシンプレクティック群の中で双方がもう片方の中心化群になっているというものである. 志村対応は実 Lie 群のレベルでは, $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ ($SL(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆群) から $SL(2,\mathbb{R})$ へのテータリフトということになるが, dual pair の中に $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ という組み合わせはない. 事実, $SL(2,\mathbb{R})$ を含む dual pair の片割れは直交群 $O(p,q)$ である. ではなぜ志村対応はテータリフトと理解できるか? そこで必要になるのが低次元 Lie 群の “**Accidental 同型**” である. 実際, $SL(2,\mathbb{R})$ は直交群との次の同型対応が知られている.

$$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq O_0(2,1).$$

ここに $O_0(2,1)$ は符号 $(2+,1-)$ の直交群の単位元の連結成分を表す. つまり志村対応の背後には <u>$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ **から** $O(2,1)$ **へのテータリフト**</u> がある. このような低次元 Lie 群が関わるリフティングの多くは Accidental 同型を使って, その背後にある原理が理解されることがしばしばある. 志村対応以外の代表的なリフトを列挙すると, 新谷リフト, 斉藤-黒川リフト, 土井-長沼リフトなどがあるが, 今挙げた 3 つはすべてテータリフトとして理解され, 後者の 2 つは次の Accidental 同型を考慮する必要がある.

$$Sp(2;\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq O_0(2,3), \quad (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2 \times 1_2)\} \simeq O_0(2,2)$$

本稿では, 最初に古典型 Lie 群と Lie 環の分類を Dynkin 図形及び Vogan 図形と共に与えることから始める. その次に Helgason [He] に従い低次元 Lie 環の Accidental 同型の表を与え, それに相当する Lie 群のレベルでの Accidental 同型を与える. 最後に Accidental 同型が関わる, 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティングについて概説する.

謝辞

Dynkin 図形と Vogan 図形の記述に多大な協力をして頂いた早田孝博さんに感謝の意を表します.

2　古典型単純複素 Lie 群, Lie 環及びその実型式の分類

この節では, 古典型単純 Lie 群及び Lie 環の記述に必要な実数体上の多元環を導入し, 次に単純 Lie 群と Lie 環を分類をするためにルート系とそれに付随する Dynkin 図形について Humphrey[Hu] に基づき簡単に復習する. そして Dynkin 図形を与えることで古典型単純複素 Lie 群及び Lie 環の分類を記述し, 加えて古典複素 Lie 群と Lie 環の実形式を与え, それを分類する Vogan 図形を用意する.

2.1　実数体上の多元環の準備

ここでは, 以降古典型 Lie 群及び Lie 環を記述するために必要な, 実数体上の多元環と関連する記号を用意する.

(1) 実数体上の斜体：

よく知られているように, 実数体上の斜体は同型を除いて, 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ そして Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ の 3 つに限られる. $\mathbb{H}$ は $\{1,\ i,\ j,\ k\}$ を基底として持ち, $\{i,\ j,\ k\}$ は以下の関係式で定義される.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

(2) 分裂複素数と不定符号の四元数環：

実数体 $\mathbb{R}$ に $i'^2 = 1$ を満たす文字 i' を添加して得られる実代数 $\mathbb{R} + \mathbb{R}i'$ を $\mathbb{C}'$ と記す. これを分裂複素数と呼ぶことにする. 実数体上の不定符号の四元数環 $\mathbb{H}'$ は $\{1,\ i',\ j',\ k'\}$ を基底として持ち, $\{i',\ j',\ k'\}$ は以下の関係式で定義される.

$$i'^2 = k'^2 = 1, \quad j'^2 = -1,\ i'j' = -j'i' = k'.$$

これら 2 つについて以下の実代数としての同型が成り立つ.

$$\mathbb{C}' \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}' \simeq M(2, \mathbb{R}).$$

ここに $M(2, \mathbb{R})$ は実 2 次正方行列の成す実代数を表す.

(3) 行列代数：

K を (1) と (2) で挙げた実代数のうちのいずれかとする．K は主対合と呼ばれる位数 2 以下の自己同型

$$K \ni x \to \bar{x} \in K$$

を持つ．$K = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$ の時は恒等写像ないしは複素共役であるが他の場合は以下で与えられる．

$$\begin{cases} \mathbb{C}' \ni x + yi' \mapsto x - yi' \in \mathbb{C}' & (K = \mathbb{C}'), \\ \mathbb{H} \ni x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \bar{x} := x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k & (K = \mathbb{H}), \\ \mathbb{H}' \ni x' = x'_0 + x'_1 i' + x'_2 j' + x'_3 k' \mapsto \bar{x} = x'_0 - x'_1 i' - x'_2 j' - x'_3 k' & (K = \mathbb{H}'). \end{cases}$$

$\mathbb{H}'$ の主対合は $M(2,\mathbb{R})$ の主対合

$$M(2,\mathbb{R}) \ni X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto {}^{\iota}X := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$$

と本質的に同じである．

行列代数 $M(n,K)$ に対してトレースとノルムを定義する．$K = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{C}'$ のときはトレースとノルムはそれぞれ通常の K 上の行列環のトレース Tr と行列式 det とする．$K = \mathbb{H},\ \mathbb{H}'$ の時は $M(n,K)$ の複素化 $M(n,K) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq M(2n,\mathbb{C})$ の複素行列代数としてのトレース及び行列式の $M(n,K)$ への制限として定義される．これは $M(n,K)$ の被約トレース, 被約ノルムと呼ばれ, それぞれ $\tau_K^n,\ N_K^n$ と書くことにする．$n = 1$ のときは単に $\tau_K,\ N_K$ と書く．これは次のように記述される．

$$\tau_K(x) = x + \bar{x},\ N_K(x) = x\bar{x}\ (x \in K)$$

以下では $X \in M(n,K)$ に対し, $\bar{X}$ を X の各成分に主対合を施したものを表すことにする．

2.2 ルート系の復習 ([Hu, Chap.III. Section 9, 10] 参照)

有限次元実ベクトル空間 E を与え, これが内積 (α,β) $(\alpha,\ \beta \in E)$ を持つとする．

定義 2.1. 実ベクトル空間 E の部分集合 Φ が**ルート系**であるとは, 以下の公理を満たすことである．

(1) 集合 Φ は有限集合で, E を張る．

(2) 各 $\alpha \in \Phi$ の定数倍で Φ に入るものは $\pm\alpha$ に限る.
(3) 各 $\alpha \in \Phi$ に付随する鏡映 $\sigma_\alpha \in GL(E)$(reflection) は Φ を保つ.
(4) 任意の 2 つの $\alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle := \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ が成り立つ.

ここで鏡映 σ_α とは次で定義される.

$$\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha \quad (\beta \in E).$$

これは $\beta = \alpha$ を $-\alpha$ に移し, α が張る 1 次元空間の補空間の各元を固定するということで特徴付けられる.

ルート系 Φ は次の条件を満たす部分集合 Δ を持つ.

(1) Δ は E の基底を与える.
(2) 任意の $\beta \in \Phi$ は, すべてが負でないあるいはすべてが正でない整数 $\{k_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ により $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ と書ける.

集合 Δ の元は**単純ルート**と呼ばれ, 当然 $\sharp\Delta = \dim E$ である.

ルート系 Φ が**既約**であるとは, Φ が 2 つの「直交する」部分集合 $\Phi_1,\ \Phi_2$ の和集合にならないことである. ここで Φ_1 と Φ_2 が直交するとは以下が成り立つことである.

$$\alpha \in \Phi_i \Rightarrow (\alpha, \beta) = 0\ \forall \beta \in \Phi_j \quad (i \neq j,\ i, j \in \{1, 2\}).$$

一般にルート系は既約なルート系の直交和で書けることが知られている. つまりルート系 Φ は, 有限個の既約で互いに直交するルート系 $\Phi_1,\ \Phi_2, \cdots, \Phi_m$ により

$$\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_m.$$

と書ける.

2.3 Dynkin 図形の説明 ([Hu, Chap.III. Section 11] 参照)

ルート系 Φ と単純ルートの集合 Δ が与えられたとき, Dynkin 図形は以下の要領で記述される.

- $\sharp\Delta$ 個の頂点を与える.
- 各頂点は一つの単純ルートに対応していると考える. 2 つの単純ルート $\alpha_1,\ \alpha_2$ に対応する頂点は $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \times \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle$ 本の線で結ぶ.
- 線で結ばれている 2 つの頂点の対応するルートが, 内積 $(*, *)$ に関する長さが同じでないとき, 線に短い方を向いた矢印を付ける.

既約なルート系に対する Dynkin 図形について以下の定理が成り立つ.

定理 2.2. 既約なルート系の *Dynkin* 図形は以下の 9 個の系列に分類される.

$$A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n,\ E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$$

４つの系列 $A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n$ は古典型, 残りの 5 つの $E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$ は例外型と呼ばれる.

ここで複素半単純 Lie 環の Dynkin 図形に話を及ぼす. $\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 環とする. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数, つまり $\mathfrak{g}$ の極大可環部分代数を $\mathfrak{h}$ とし $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$($\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}$ の双対空間) を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する固有空間分解に現れる $\mathfrak{h}^*$ の元全体とする. 集合 Φ で張られる実ベクトル空間 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式で誘導される内積を持つ. すると前節の抽象的なルート系の説明で $E = \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ とした状況の下, Φ はルート系の公理を満たす.

定理 2.3. 複素半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ が既約, つまり単純 *Lie* 環であるための必要十分条件は, 対応するルート系 Φ が既約になることである. *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の単純 *Lie* 環への直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ に対応してルート系 Φ は既約なルート系の和集合 $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_m$ として書ける. ここに $1 \leq i \leq m$ に対し Φ_i は *Lie* 環 $\mathfrak{g}_i$ のルート系である.

よって複素半単純 Lie 環の分類は複素単純 Lie 環の分類に帰着されそれは Dynkin 図形により分類できることが分かった. Accidental 同型は古典型 Lie 群の場合を考えれば十分である. 次節では古典型複素単純 Lie 環ないしは Lie 群を Dynkin 図形とともに分類を与える.

2.4 Dynkin 図形の記述

ここでは複素単純 Lie 環ないしは Lie 群に対する, Dynkin 図形を与える. 各々の系列に対して実形式も与えるが、実形式の具体的な記述は次節で与える. 以下において括弧の中は Lie 環を表す.

1. A_n-型：$SL(n,\mathbb{C})$ ($\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$)

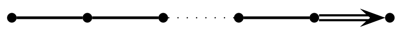
   Dynkin 図形：

   実形式：

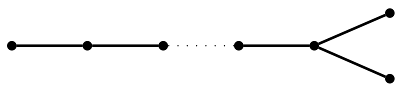
   A-I 型:$SL(l,\mathbb{R})$ ($\mathfrak{sl}(l,\mathbb{R})$), A-II 型:$SL(m,\mathbb{H})$ ($\mathfrak{sl}(m,\mathbb{H})$), $A{-}III$ 型:$SU(p,q)$ ($\mathfrak{su}(p,q)$).

2. B_n-型と D_n-型：$SO(2n+1,\mathbb{C}),\ SO(2n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{so}(m,\mathbb{C}))$

   Dynkin 図形, B 型：

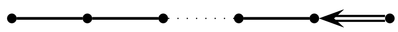
   

   Dynkin 図形, D 型：

   実形式：BD-I 又は BD-II 型：$SO(p,q)$ $(\mathfrak{so}(p,q))$, D-III 型：$SO^*(2n)$ $(\mathfrak{so}^*(2n))$.

3. C_n-型 ($\mathfrak{c}_n$-型)：$Sp(n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$
   Dynkin 図形：

   実形式：C-I 型：$Sp(n,\mathbb{R})$ $(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}))$, C-II 型：$Sp(p,q)$ $(\mathfrak{sp}(p,q))$.

2.5 実形式のリスト

Lie 群：

$$SL(l,\mathbb{R}) := \{g \in M(l,\mathbb{R}) \mid \det(g)=1\},\ SL(m,\mathbb{H}) := \{g \in M(m,\mathbb{H}) \mid N_{\mathbb{H}}^m(g)=1\},$$

$$SU(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\},$$

$$SU^*(2n) := \{\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C}) \mid z_1,\ z_2 \in M(n,\mathbb{C})\}(\simeq SL(n,\mathbb{H})),$$

$$SO(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^t g\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\},$$

$$SO^*(2n) := \{g \in SU(n,n) \mid {}^t g\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}\},$$

$$Sp(n,\mathbb{R}) := \{g \in SL(2n,\mathbb{R}) \mid {}^t g\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}\},$$

$$Sp(p,q) := \{g \in M(p+q,\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\}.$$

但し $Sp(p,0)=Sp(0,p)$ は $Sp(p)$ と記す.

Lie 環：

$$\mathfrak{sl}(l,\mathbb{R}):=\{X\in M(l,\mathbb{R})\mid \mathrm{Tr}(X)=0\},\ \mathfrak{sl}(m,\mathbb{H}):=\{X\in M(m,\mathbb{H})\mid \tau_{\mathbb{H}}^{m}(X)=0\},$$

$$\mathfrak{su}(p,q):=\{X\in\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})\mid {}^t\bar{X}\begin{pmatrix}1_p & 0_{p,q}\\ 0_{q,p} & -1_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1_p & 0_{p,q}\\ 0_{q,p} & -1_q\end{pmatrix}X=0_{p+q}\},$$

$$\mathfrak{su}^*(2n):=\{\begin{pmatrix}z_1 & -\bar{z}_2\\ z_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})\mid z_1,\ z_2\in M(n,\mathbb{C})\}(\simeq\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})),$$

$$\mathfrak{so}(p,q):=\{X\in\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})\mid {}^tX\begin{pmatrix}1_p & 0_{p,q}\\ 0_{q,p} & -1_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1_p & 0_{p,q}\\ 0_{q,p} & -1_q\end{pmatrix}X=0_{p+q}\},$$

$$\mathfrak{so}^*(2n):=\{X\in\mathfrak{su}(n,n)\mid {}^tX\begin{pmatrix}0_n & 1_n\\ 1_n & 0_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0_n & 1_n\\ 1_n & 0_n\end{pmatrix}X=0_{2n}\},$$

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}):=\{X\in\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})\mid {}^tX\begin{pmatrix}0_n & 1_n\\ -1_n & 0_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0_n & 1_n\\ -1_n & 0_n\end{pmatrix}X=0_{2n}\},$$

$$\mathfrak{sp}(p,q):=\{X\in M(p+q,\mathbb{H})\mid {}^t\bar{X}\begin{pmatrix}1_p & 0_{p,q}\\ 0_{q,p} & -1_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1_p & 0_{p,q}\\ 0_{q,p} & -1_q\end{pmatrix}X=0_{p+q}\}.$$

但し $\mathfrak{sp}(p,0)=\mathfrak{sp}(0,p)$ は $\mathfrak{sp}(p)$ と記す.

2.6 Vogan 図形

(1) Vogan 図形の説明 ([Kn, Chap.VI, Section 8] 参照)

$\mathfrak{g}_0$ を実半単純 Lie 環とする. θ を $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 対合とする. つまり θ は $\mathfrak{g}_0$ 上の位数 2 の自己同型で $\mathfrak{k}_0:=\{X\in\mathfrak{g}_0\mid\theta(X)=X\}$ とするとこれは $\mathfrak{g}_0$ に対応する半単純 Lie 群の極大コンパクト群の Lie 環となる. この θ による $\mathfrak{g}_0$ の固有空間分解 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$ ($\mathfrak{p}_0:=\{X\in\mathfrak{g}_0\mid\theta(X)=-X\}$) は Cartan 分解と呼ばれる.

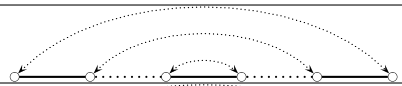
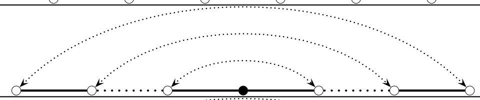
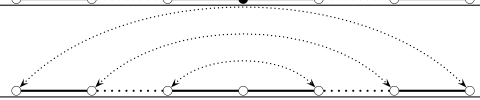
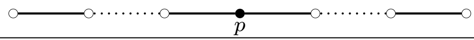
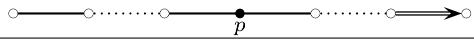
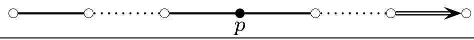
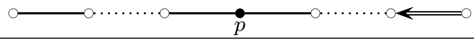
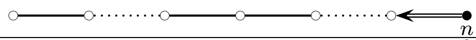
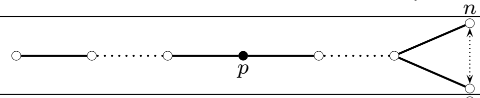
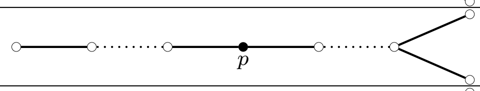
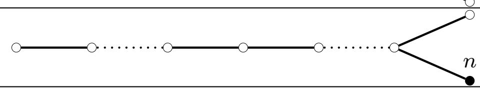
Vogan 図形を導入するためには極大コンパクト次元最大の θ 安定な Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$, つまり $\mathfrak{h}_0$ の $\mathfrak{k}_0$ との共通集合 $\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{k}_0$ の次元が最大となる θ 安定な Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0$ が必要である. すると $\mathfrak{g}_0$ の Vogan 図形は, その複素化 $\mathfrak{g}:=\mathfrak{g}_0\otimes\mathbb{C}$ の Dynkin 図形に以下の付加情報を与えたものとして定義される.

- 各頂点は対応するルートが非コンパクト (つまり $\mathfrak{h}_{0,\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{p}_{0,\mathbb{C}}$ のルート空間分解に生じる) のときは黒丸とし, コンパクト (つまり $\mathfrak{h}_{0,\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{k}_{0,\mathbb{C}}$ のルート空間分解に生じる) のときは白丸とする.

- 2 つのルートが θ で共役のときは, 対応する頂点を両方向矢印で結ぶ.

注意 2.4. 実形式の分類を記述する図式として佐武図形も有名である ([Sat, §3, 3.4] 参照). Vogan 図形の場合と違い, 極大分裂トーラスを含む Cartan 部分代数に関するルート系を考えることにより与えられる.

(2) Vogan 図形の記述 ([Kn, Appendix C, Section 3] 参照)

Dynkin 図形	Lie 代数	Vogan 図形
A_{2n}	$\mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{R})$	
A_{2n-1}	$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$	
A_{2n-1}	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$ $(n \geq 2)$	
A_{p+q-1}	$\mathfrak{su}(p,q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
B_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$ $(1 \leq p \leq q)$	
B_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$ $(p > q \geq 0)$	
C_{p+q}	$\mathfrak{sp}(p,q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
C_n	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	
D_{p+q+1}	$\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$ $(0 \leq p \leq q)$	
D_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
D_n	$\mathfrak{so}^*(2n)$ $(n \geq 3)$	

注意：

- コンパクトな Lie 環 $\mathfrak{su}(q)$ (A_{q-1}), $\mathfrak{so}(2q+1)$ (B_q), $\mathfrak{sp}(q)$ (C_q) $\mathfrak{so}(2q)$ (D_q) に対しては黒丸なし.

- B_{p+q} には 2 種類書いた. Vogan 図形は同じであるが, Cayley 変換のリストが違う.

- $\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$ $(0 \leq p \leq q)$ について, $\mathfrak{so}(1,1)$, $\mathfrak{so}(1,3)$ は除き, $p = 0$ のときは黒丸なし.

- $\mathfrak{so}(2p,2q)$ $(1 \leq p \leq q)$ では $\mathfrak{so}(2,2)$ を除く.

3 低次元 Lie 環の同型 (Accidental 同型)

この節では, 最初に Helgason[He] を参考に低次元 Lie 環の同型の表を与える. 低次元 Lie 環について, Dynkin 図形の型は違っても同型ということがあり得る. 本稿ではこのような状況を「**Accidental 同型**」と呼ぶことにする. 次に前節で与えた Vogan 図形を使って $B_2 = C_2$ の場合を例に取り Lie 環の Accidental 同型を確かめる. 他の場合も同様に確かめられる.

3.1 同型の表 (参考：[He, Chap.X, Section 6, 4])

$A_1 = B_1 = C_1$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}u(2) \simeq \mathfrak{s}o(3) \simeq \mathfrak{s}p(1)$.
2. $\mathfrak{s}l(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{s}u(1,1) \simeq \mathfrak{s}o(2,1) \simeq \mathfrak{s}p(1,\mathbb{R})$.

$B_2 = C_2$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}o(5) \simeq \mathfrak{s}p(2)$.
2. $\mathfrak{s}o(3,2) \simeq \mathfrak{s}p(2,\mathbb{R})$.
3. $\mathfrak{s}o(4,1) \simeq \mathfrak{s}p(1,1)$.

$A_3 = D_3$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}u(4) \simeq \mathfrak{s}o(6)$.
2. $\mathfrak{s}l(4,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{s}o(3,3)$.
3. $\mathfrak{s}u^*(4) \simeq \mathfrak{s}l(2,\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{s}o(5,1)$.
4. $\mathfrak{s}u(2,2) \simeq \mathfrak{s}o(4,2)$.
5. $\mathfrak{s}u(3,1) \simeq \mathfrak{s}o^*(6)$.

$D_2 = A_1 \times A_1$ の実形式：

1. $\mathfrak{s}o(4) \simeq \mathfrak{s}o(3) \times \mathfrak{s}o(3) \simeq \mathfrak{s}u(2) \times \mathfrak{s}u(2) \simeq \mathfrak{s}p(1) \times \mathfrak{s}p(1)$.
2. $\mathfrak{s}o(3,1) \simeq \mathfrak{s}l(2,\mathbb{C})$.

3. $\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

4. $\mathfrak{so}^*(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

その他：

1. $\mathfrak{so}^*(8) \simeq \mathfrak{so}(6,2)$.

3.2 Vogan による Accidental 同型の確認 ($B_2 = C_2$ の場合)

ここでは Accidental 同型の中でも $B_2 = C_2$ の場合を取り上げて考えてみる．この場合は以下の 3 つの同型がある．

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(5) &\simeq \mathfrak{sp}(2), \\ \mathfrak{so}(3,2) &\simeq \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}), \\ \mathfrak{so}(4,1) &\simeq \mathfrak{sp}(1,1). \end{aligned}$$

C_2 型の 3 つの Lie 環の Vogan 図形は以下の通りである．

$\mathfrak{sp}(2)$

$\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$

$\mathfrak{sp}(1,1)$

また B_2 型の 3 つの Lie 環の Vogan 図形は以下で与えられる．

$\mathfrak{so}(5)$

$\mathfrak{so}(2,3)$

$\mathfrak{so}(4,1)$

以上を比較すると C_2 場合は B_2 の場合の矢印の向きを変えただけである．つまり $B_2 = C_2$ の場合の Accidental 同型を Vogan 図形で確認できた．その他の場合も同様に確かめられる．

4 低次元 Lie 群の Accidental 同型

この節では最初に, 第 3 節で与えた Lie 環のレベルの Accidental 同型の分類に対応して, Lie 群のレベルでの Accidental 同型の表を与える (その他の更なる例も与える)．次にその証明について説明する．この節は [Yk, 第１０節] を参考にした．以下では Lie 群 G に対し, G_0 は G の単位元の連結成分を表す．

4.1 低次元 Lie 群の同型 (Accidental 同型) の表

$A_1 = B_1 = C_1$ の実形式：

1. $SU(2) \simeq Sp(1) \simeq Spin(3),\ Sp(1)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$.
2. $SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R})$.
3. $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(2,1)$.

$B_2 = C_2$ の実形式：

1. $Sp(2) \simeq Spin(5),\ Sp(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(5)$.
2. $Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(2,3)$.
3. $Sp(1,1)/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(4,1)$.

$A_3 = D_3$ の実形式：

1. $SU(4)/\{\pm 1_4\} \simeq SO(6)$.
2. $SL(4,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(3,3)$.
3. $SU^*(4) \simeq SL(2,\mathbb{H}),\ SL(2,\mathbb{H})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(5,1)$.
4. $SU(2,2)/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(4,2)$.
5. $SU(3,1)/\{\pm 1_4\} \simeq SO^*(6)$.

$D_2 = A_1 \times A_1$ の実形式：

1. $SO(4) \simeq (Sp(1) \times Sp(1))/\{\pm(1,1)\}$.
2. $SO_0(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\}$.
3. $SO_0(2,2) \simeq (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2, 1_2)\}$.
4. $SO^*(4) \simeq (Sp(1) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1, 1_2)\}$.

その他 I (上以外)：

1. $SO^*(8)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(6,2)/\{\pm 1_8\}$.

その他 II (複素 Lie 群どうしの場合)

1. $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\} \simeq SO(3,\mathbb{C})$.
2. $(SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}))/\{\pm(1_2, 1_2)\} \simeq SO(4,\mathbb{C})$.
3. $Sp(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_4\} \simeq SO(5,\mathbb{C})$.
4. $SL(4,\mathbb{C})/\{\pm 1_4\} \simeq SO(6,\mathbb{C})$.

その他 III (similitude 因子付きの場合)

1. $PGL(2,\mathbb{R})(:= GL(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(2,1)$.
2. $PGSp(2,\mathbb{R})(:= GSp(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(2,3)$.
3. $PGSp(1,1)(:= GSp(1,1)/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(4,1)$.
4. $PGL(2,\mathbb{H})(:= GL(2,\mathbb{H})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(5,1)$.
5. $(GL(4,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times)/\{(z, z^{-2}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(3,3)$.
6. $(GL(2,\mathbb{H}) \times \mathbb{R}^\times)/\{(z, z^{-2}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(5,1)$.
7. $(GSp(1) \times GSp(1))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(4)$.
8. $(GSp(1) \times GL(2,\mathbb{R}))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO^*(4)$.

∗偶数次数 m の非退化対称行列 Q で定義される similitude 因子付き直交群 $GO(Q)$, $GSO(Q)$ は以下で実現できる.

$$
\begin{aligned}
GO(Q) &:= \{g \in GL(m,\mathbb{R}) \mid {}^t g Q g = \nu(g) Q,\ \nu(g) \in \mathbb{R}^\times\},\\
GSO(Q) &:= \{g \in GO(Q) \mid \det(g) = \nu(g)^{\frac{m}{2}}\}.
\end{aligned}
$$

4.2 証明

この節ではまず, Accidental 同型の典型例である以下の命題を証明する. 他の多くの場合も同様に証明できる.

命題 4.1.

$$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(2,1), \quad Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(2,3)$$

命題を証明するにあたり, 次の補題が基本的である.

補題 4.2. G と G' を線形 *Lie* 群とし, $f : G \to G'$ を連続準同型写像とする. 以下の 3 つの条件が成り立つとする.
(i) G' は連結である.
(ii) $\mathrm{Ker}\, f$ は離散的である.
(iii) $\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}'$ をそれぞれ $G,\ G'$ の *Lie* 環とすると $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}'$.
このとき, 位相群（もっと言えば C^∞-*Lie* 群）としての同型

$$G/\,\mathrm{Ker}\, f \simeq G'$$

が成立する.

証明 . まず f の微分 df が引き起こす Lie 環の準同型写像

$$df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$$

を考える. (ii) の条件から $\dim \mathrm{Ker}\, df = 0$ であることが分かり df は単射だが, (iii) より $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}'$ なので, df は同型写像である. G' の連結性から G' の任意の元は $\mathfrak{g}'$ の元の指数写像で書ける. よって f が全射であることが分かる. したがって位相群の準同型定理より $G/\,\mathrm{Ker}\, f \simeq G'$ が証明できる.

命題の証明 . (V, Q) で 2 次形式 Q 付き有限次元実ベクトル空間 V を表すとする. $O(V, Q) := \{g \in GL(V) \mid Q(gv) = Q(v),\ \forall v \in V\}$ を (V, Q) が定める直交群とする. 証明は次の 3 つのステップに分けて与えられる.

(1) (V, Q) の指定：

$$\begin{aligned} &(V_1, Q_1) := (\{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}, \det), \\ &(V_2, Q_2) := \left(\left\{T \in M(4, \mathbb{R}) \mid T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \text{が歪対称},\ \ \mathrm{Tr}\, T = 0\right\}, \mathrm{Tr}\right) \end{aligned}$$

とする. ここに Tr は以下により V_2 上の 2 次形式と見ている.

$$V_2 \ni X \mapsto \mathrm{Tr}(X^2)$$

このとき

$$O(V_1, Q_1) \simeq O(2, 1), \quad O(V_2, Q_2) \simeq O(2, 3)$$

となる.

(2) $f: G \to O(V,Q)$ $(G = SL(2,\mathbb{R}),\ Sp(2,\mathbb{R}))$ の指定：

$G = SL(2,\mathbb{R}),\ Sp(2,\mathbb{R})$ に対して $f: G \to O(V_i, Q_i)$ $(i = 1, 2)$ を次のように指定する.

$$f(g)v := \begin{cases} gv^tg & (i = 1,\ g \in SL(2,\mathbb{R}),\ v \in V_1) \\ gvg^{-1} & (i = 2,\ g \in Sp(2,\mathbb{R}),\ v \in V_2) \end{cases}.$$

$SL(2,\mathbb{R}),\ Sp(2,\mathbb{R})$ は連結である. 実際, 線形 Lie 群の連結性は極大コンパクト部分群の連結性より従う ([Kn, p117], [Yk, p61] 参照) が　$SL(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2,\mathbb{R})$ の極大コンパクト群 $SO(2)$ と $Sp(2,\mathbb{R}) \cap O(4) \simeq U(2)$ は連結である. よって f の像も連結である.

(3) 補題 4.2 の適用：

$\mathrm{Ker}\, f = \{\pm 1\}$ であることが直接計算で確かめられる. 前節で与えた Lie 環の同型

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,1),\ \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,3)$$

を考慮すると補題 4.2 が適用できることが分かり, 求める Lie 群の同型が示される.

4.3　他の場合

その他同様に証明できる場合のいくつかについて, (V,Q) の指定の仕方と, 準同型 f の定義のみを示す. 以下に現れる記号については 2.1 節を参照されたい.

- $Sp(1)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$:
  (1) (V,Q) の指定:

$$V := \{x \in \mathbb{H} \mid x + \bar{x} = 0\},\ Q := N_{\mathbb{H}}.$$

  (2) f の定義:

$$f(g)v := gv\bar{g} \quad (g \in Sp(1),\ v \in V).$$

- $Sp(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(5)$:
  (1) (V,Q) の指定:

$$V := \{\begin{pmatrix} \xi & x \\ \bar{x} & -\xi \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{H}\},\ Q := -N_{\mathbb{H}}^2.$$

  (2) f の定義:

$$f(g)v := gv^t\bar{g} \quad (g \in Sp(2),\ v \in V).$$

- $Sp(1,1)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(4,1)$:
(1) (V,Q) の指定:

$$V := \{X \in M_2(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{X} = IXI,\ \tau_{\mathbb{H}}^2(X) = 0\},\ Q := -N_{\mathbb{H}}^2.$$

ここに $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と定義する.

(2) f の定義:

$$f(g)v := g^{-1}vg \quad (g \in Sp(1,1),\ v \in V).$$

- $SU(4)/\{\pm 1_4\} \simeq SO(6)$:
(1) (V,Q) の指定:

$$V := \{\begin{pmatrix} X & Y \\ -{}^tY & -\bar{X} \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -b & a \\ -\bar{a} & -\bar{b} \end{pmatrix},\ a,\ b,\ \xi \in \mathbb{C}\},\ Q := N.$$

ここに $v \in V$ に対し, $N(v) := \dfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(v{}^t\bar{v})$ と定義する.
(2) f の定義:

$$f(g)v := gv{}^tg \quad (g \in SU(4),\ v \in V).$$

- $SU(2,2)/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(4,2)$:
(1) (V,Q) の指定:

$$V := \{\begin{pmatrix} X & Y \\ -{}^tY & -{}^t\bar{X} \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -b & a \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix},\ a,\ b,\ \xi \in \mathbb{C}\},\ Q := N.$$

ここに $v \in V$ に対し, $N(v) := -\dfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(I_2 v I_2 {}^t\bar{v})$ ($I_2 := \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}$) と定義する.

(2) f の定義:

$$f(g)v = gv{}^tg \quad (g \in SU(2,2),\ v \in V).$$

- $SL(4,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(3,3)$:
この場合については分裂複素数 $\mathbb{C}'$ を用意し, 同型 $SL(4,\mathbb{R}) \simeq SU(4,\mathbb{C}')$($\mathbb{C}'$ 係数の行列サイズ 4 の定符号ユニタリー群) により, $SL(4,\mathbb{R})$ を $SU(4,\mathbb{C}')$ に置き換えて

考える.
(1) (V,Q) の指定:

$$V := \{\begin{pmatrix} X & Y \\ -{}^tY & -{}^t\bar{X} \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -b & a \\ -\bar{a} & -\bar{b} \end{pmatrix},\ a,\ b,\ \xi \in \mathbb{C}'\},\ Q := N.$$

ここに $v \in V$ に対し $N(v) := \dfrac{1}{4}\operatorname{Tr}(v^t\bar{v})$ と定義する.
(2) f の定義:

$$f(g)v = gv^tg \quad (g \in SU(4,,\mathbb{C}') \simeq SL(4,\mathbb{R}),\ v \in V).$$

- $(Sp(1)\times Sp(1))/\{\pm(1,1)\} \simeq SO(4)$:
(1) (V,Q) の指定:
$$V := \mathbb{H},\ Q := N_{\mathbb{H}}.$$
(2) f の定義:
$$f((g_1,g_2))v := g_1 v\bar{g}_2 \quad ((g_1,g_2)\in Sp(1)\times Sp(1),\ v \in V).$$

- $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(3,1)$:
(1) (V,Q) の指定:
$$V := \{X \in M(2,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X} = X\},\ Q := \det.$$
(2) f の定義:
$$f(g)v = gX^t\bar{g} \quad (g \in SL(2,\mathbb{C}),\ v \in V).$$

- $(SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2,1_2)\} \simeq SO_0(2,2)$:
(1) (V,Q) の指定:
$$V := M(2,\mathbb{R}),\ Q = \det.$$
(2) f の定義:
$$f((g_1,g_2))v := g_1 v^t g \quad ((g_1,g_2)\in SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R}),\ v \in V).$$

- $(Sp(1)\times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1,1_2)\} \simeq SO^*(4)$:
$\mathbb{H}'$ を $\mathbb{R}$ 上の不定符号四元数環とし $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする. このとき $Sp(1)$ は

$\{x \in \mathbb{H} \mid N_{\mathbb{H}}(x) = 1\}$ と同一視し, $SL(2,\mathbb{R})$ は $Sp(1, N_{\mathbb{H}'}) := \{x \in \mathbb{H}' \mid N_{\mathbb{H}'}(x) = 1\}$ と同一視して考える. そして $SO^*(4)$ は以下の同型な群に置き換えて与える.

$$\{X \in SL(4,\mathbb{C}) \mid \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & J \end{pmatrix} X = \bar{X} \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & J \end{pmatrix},\ {}^t XX = 1_4\}. \quad (J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

(1) (V, Q) の指定:

$$V = \mathbb{H}'_{\mathbb{C}},\ Q = N_{\mathbb{H}',\mathbb{C}}.$$

ここに $N_{\mathbb{H}',\mathbb{C}}$ は $N_{\mathbb{H}'}$ が定める $\mathbb{H}'$ 上の実 2 次形式を, $\mathbb{C}$ 係数に伸ばして $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ 上の複素 2 次形式と見なしたものである.

(2) f の定義:

$$f((g_1, g_2))v := g_1 v \bar{g}_2 \quad ((g_1, g_2) \in Sp(1) \times Sp(1, \mathbb{H}'),\ v \in V).$$

ここに定符号四元数環 $\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}(\simeq M(2,\mathbb{C}))$ の部分環と見なした上で, $g_1 \in \{x \in \mathbb{H} \mid N(x) = 1\} = Sp(1)$ を $v \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ に左から掛けている.

4.4 注意

- $SO^*(8)/\{\pm 1_8\} \simeq SO_0(6,2)/\{\pm 1_8\}$ について:
  これは例えば [F-H, Section 3] で証明が与えられている. $SO^*(4n)$ は次の群と同型である.
  $$\{g \in M_{2n}(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g} \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}\}.$$
  これは $n \geq 3$ のとき次数 n の四元数上半空間の双正則自己同型群である. [F-H] では $SO^*(8)/\{\pm 1_8\}$ が, 次数 2 の四元数上半空間の双正則自己同型群における指数 2 の部分群とみなせること ([Kr, Theorem 1.8] 参照) に注目して上の同型を証明している.

- 複素 Lie 群どうしの場合の Accidental 同型については証明を与えなかったが, 4.2 節で与えた議論と同様に証明できる ([Yk, 10 節] 参照). 3.1 節の表に書いている Dynkin 図形の一致は複素 Lie 環の Accidental 同型を示している.

- similitude 因子付きの場合は証明なしで与えたが, 基本的には上の写像 f を修正することで与えられる. この場合は Lie 群が連結ではない場合がしばしばなので注意が必要である. similitude 群を考える利点として, 例えば Hecke 作用素の保型形式への作用を考えるとき, 半単純群ではなく similitude 群にして考える方がよい場合が多々ある.

- Clifford 代数を使った証明が [E-G-M] で与えられている．この論文では “Vahlen 群” という Clifford 代数係数の 2 次正方行列の中に実現される Lie 群を考え, それが Spin 群と同型であることを示している．Clifford 代数の次元が低い場合で Vahlen 群が様々な古典群と同型であることが示されており ([E-G-M, Section 6] 参照), それは上に挙げた直交群が関わる Accidental 同型をカバーしている．例えば 4.2, 4.3 節で触れなかった $SL(2,\mathbb{H})/\{\pm 1\} \simeq SO_0(5,1)$, $SU(3,1)/\{\pm 1_4\} \simeq SO^*(6)$ に相当することも扱っている．

- 保型形式をアデール群上で考えたい人にとっては, 代数群のレベルでの Accidental 同型を知りたいであろう．この報告書では詳しく取り上げないが, 代表的なものをここに列挙する．

  (i) $E^\times \simeq GSO(E, N_{E/F})$ (E/F : 2 次拡大体, $N_{E/F}$: ノルム形式).
  (ii) $(B^\times \times B^\times/\{(z,z^{-1}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(B, N_B)$ (B : 総実体上の定符号四元数環, N_B : ノルム形式).
  (iii) $PGL(2) \simeq SO(2,1)$.
  (iv) $PGSp(2) \simeq SO(2,3)$.
  (v) $PGSp(1,1) \simeq SO(4,1)$.
  (vi) $PGL(2,B) \simeq SO(5,1)$ (B : 総実体上の定符号四元数環).
  (vii) $(GL(4) \times GL(1))/\{(z,z^{-2}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(3,3)$.
  (viii) $(GL(2,B) \times GL(1))/\{(z,z^{-2}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(5,1)$.
  (iv) $(GL(2) \times GL(2))/\{(z,z^{-1}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO(2,2)$.
  (x) $(B^\times \times GL(2))/\{(z,z^{-1}) \mid z \in GL(1)\} \simeq GSO^*(4)$.

5 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティング

実シンプレクティック群の中の簡約実 Lie 群の (既約な)dual pair は以下の 4 つに分類されることが知られている．

$$GL(m,D)\times GL(m',D), \quad Sp(m,\mathbb{R})\times O(p,q), \quad U(m,n)\times U(m',n'), \quad Sp(p,q)\times O^*(2n).$$

ここに D は実数体上の斜体を表す．つまり実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ または Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ である．　よく知られた保型形式のリフティングに「テータリフト (またはテータ対応)」([Mat] 参照) が関わっているものが少なくないが, これは上述の dual pair に対して考えられるものである．導入でも述べたように低次元 Lie 群上の保型形式が関わるリフティングについてテータリフトが関係する場合, Accidental 同型を使ってどの dual pair に対するテータリフトなのかを理解する必要がしばしばある．この節では,

まず低次元 Lie 群の保型形式のリフティングでテータリフトが関わるものを, 関係する dual pair 毎に分けて概説する. 多くの場合楕円保型形式が関わっているが, そのために $SL(2,\mathbb{R}) = Sp(1,\mathbb{R})$ であることを注意しておく. 次に, 説明した各リフトについてその重さの対応と関連するテータ対応による解釈を表にしたのもを与える.

5.1 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティング概説

(1) $SL(2,\mathbb{R}) \times O(2,1)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(2,1)(= O_0(2,1))$.
- リフティング：重さ半整数の楕円保型形式から重さ整数の楕円保型形式 (志村 [Shim], 丹羽 [Ni]), 重さ整数の楕円保型形式から重さ半整数の楕円保型形式 (新谷 [Shin-1]).
- コメント：重さ半整数楕円保型形式の Hecke 理論を確立するとともに, その後「志村対応」と呼ばれることになる, 重さ半整数から重さ整数楕円保型形式への Hecke 作用素と可換な対応の存在を指摘した最初の論文が志村 [Shim] である. その後新谷 [Shin-1] による重さ整数から重さ半整数楕円保型形式へのリフトの Weil 表現を使った定式化が与えられ, 丹羽 [Ni] によって志村対応の Weil 表現を用いた再定式化が与えられている. その後 Maass 形式の場合への拡張がいくつか与えられる ([K-S], [Ko] など). 保型表現の文脈で最も一般的な理論を与えたのが Waldspurger[W] である. 志村対応については坂田氏の解説 [Sak] も参照されたい.

(2) $SL(2,\mathbb{R}) \times O(2,3)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_4\} \simeq SO_0(2,3)(= O_0(2,3))$.
- リフティング：重さ半整数楕円保型形式から次数 2 の正則ジーゲルカスプ形式 (黒川 [Kur], Andrianov[An], Maass[Ma], Zagier[Za-1]).
- いわゆる「斉藤-黒川リフト」である. 楕円カスプ形式で成り立つ Ramanujan-Petersson 予想の反例をジーゲル保型形式の場合で見つけ, 楕円保型形式からのリフティングの存在を予想した論文が黒川 [Kur] である. その証明は Maass[Maa], Zagier[Za-1] よって与えられた. もともとの斉藤-黒川リフトはレベル 1 の正則ジーゲル保型形式へのリフトである. レベル付きの斉藤-黒川リフトについては伊吹山 [Ib] を参照されたい. 保型表現による定式化については Piatetski-Shapiro[Ps] などを参照してください.

(3) $Sp(2,\mathbb{R}) \times O(4)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$(Sp(1) \times Sp(1))/\{\pm(1,1)\} \simeq SO(4)$
- リフティング：四元数環の乗法群上の 2 つの保型形式の組から次数 2 の正則ジーゲル保型形式 (吉田 [Ys]).
- いわゆる「吉田リフト」ある．Abel 曲面の Hasse-Weil L-関数と同じ L-関数を持つジーゲル保型形式の例をこの吉田リフトで与えることができる．これについては [Ok] なども参照されたい．　吉田リフトの非消滅の詳しい研究について [B-S] がある．

(4) $SL(2,\mathbb{R}) \times O(2,2)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$(SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1_2,1_2)\} \simeq SO_0(2,2)$
- リフティング：楕円保型形式から次数 2 の総実代数体上の Hilbert 保型形式 (土井-長沼 [D-N]).
- 有限次代数体の Dedekind ゼータ関数が下の代数体のゼータ関数ないしは L 関数の積に分解するという事実が保型 L 関数でも成り立つであろうという期待から生じたのが, いわゆる「ベースチェンジリフト (Base change lift)」である ([La], [Sat], [Shin-2] など)．[D-N] は次数 2 の総実代数体という特別な場合を扱っているが, これが上の Accidental 同型に気をつけるとテータリフトとして定式化できることが分る ([Kud-1]). 関連する文献としてリフティングを与える積分核を分かりやすい形で与え, それに関する “Zagier identity” をつかって土井-長沼リフトを再定式化した [Za-1] も挙げておく.

(5) $SL(2,\mathbb{R}) \times O(3,1)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1_2\} \simeq SO_0(3,1)(= O_0(3,1))$
- リフティング：楕円保型形式から 3 次元双曲空間 (または $SL(2,\mathbb{C})$) 上の実解析的保型形式 (浅井 [As])
- 土井-長沼リフトの虚 2 次体版で, ここでは「浅井リフト」と呼ぶ．3 次元双曲空間は複素解析的でなく, その上には正則保型形式は存在しない. 関連する論文としては [Fr] などがある.

(6) $U(1,1) \times U(1,q)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R})$
- リフティング：楕円保型形式から複素超球 (または $SU(1,q)$) 上の正則保型形式へのリフト (Kudla [Kud-2]).
- 「Kudla リフト」と呼ばれる．このリフトの詳しい研究は $q=2$ の場合で, [Kud-3], [M-S] などがある.

(7) $O^*(4) \times Sp(1,q)$ の場合

- 使う Accidental 同型：$SO^*(4) \simeq (Sp(1) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm(1,1_2)\}$
- リフティング：楕円保型形式と定符号四元数環の乗法群上の保型形式の組から $Sp(1,q)$ 上の非正則保型形式へのリフト.
- 荒川恒男氏が, 未発表のノートの中で, Kudla リフトの四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ の場合に対する類似として当初は楕円保型形式からのリフティングという定式化で与えられたが, 楕円保型形式と定符号四元数環の乗法群上の保型形式との組からのテータリフトとして考えると自然である．荒川氏のテータリフトは無限素点で四元数離散系列表現を生成するという表現論的特徴付けを持ち ([Na]), 非正則でありながら正則保型形式と振舞いが似ている.

(8) その他注意：

- 菅野氏の報告書で取り上げられた「織田リフト」([Od], [Su]) は, 上述の (1), (2), (4) のリフトをカバーするものである．これは単にこれら 3 つのリフティングの拡張というだけでなく, 持ち上げられる楕円保型形式のフーリエ係数の観点からリフティングのフーリエ係数を書く公式, そして土井-長沼リフトの研究で与えられた Zagier identity ([Za-1] 参照) の IV 型対称領域への拡張などリフティングの詳しい研究も与えている.
- 最近の Gan-Takeda[G-Tk] と Gan-Tantono[G-Tn] による次数 2 の similitude 因子付きシンプレクティック群 ([G-Tk], [G-Tn] では $GSp(4)$ と記している) とその内部形式に対する非アルキメデス局所体上の局所 Langlands 対応の結果は, 低次元の一般線形群と古典群との Accidental 同型 (4.4 節 注意参照) 及びテータ対応を巧みに使って証明している．Accidental 同型のよい応用例として参照を勧める.

5.2 低次元 Lie 群上の保型形式のリフティングの表

以下では 5.1 節で概説したリフティングについての関連するテータ対応や保型形式の重さの対応について明示した表を与える．2 つの実 Lie 群 G_1 と G_2 について，“$G_1 \sim G_2$” は G_1 と G_2 が同種であることを意味し，“$G_1 \to G_2$” は G_1 の既約許容表現の同値類から G_2 のそれへのテータ対応という意味に解釈する．レベルの対応については各々の文献を参照されたい．

	保型形式のレベルでの対応	テータ対応による解釈
志村 (丹羽) 対応	$\mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{(1)}_{2k}$	$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to O(2,1)(\sim SL(2,\mathbb{R}))$
新谷リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{2k} \to \mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}$	$O(2,1)(\sim SL(2,\mathbb{R})) \to \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$
斉藤-黒川リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{(2)}_{k+1}$	$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to O(3,2)(\sim Sp(2,\mathbb{R}))$
土井-長沼リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \to \mathcal{S}^{\mathrm{Hilb}}_{(k,k)}$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(2,2)(\sim SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))$
浅井リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \to \mathcal{A}^{\frac{1}{2}(k^2-1)}_{2k+1}(SL(2,\mathbb{C}))$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(3,1)(\sim SL(2,\mathbb{C}))$
吉田リフト	$\mathcal{A}_{k_1}(B^\times) \times \mathcal{A}_{k_2}(B^\times) \to \mathcal{M}^{(2)}_{(l_1,l_2)}$	$O(4)(\sim \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times \times \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \to Sp(2,\mathbb{R})$
織田リフト (even)	$\mathcal{S}^{(1)}_{k-n+1} \to \mathcal{S}^{IV,2n}_{k}$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(2n,2)$
織田リフト (odd)	$\mathcal{S}^{(1)}_{k-n+1+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{IV,2n-1}_{k}$	$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to O(2n-1,2)$
Kudla リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{\mu-\nu+1-q} \to M^{I,q}_{(\mu,\nu)}$	$SL(2,\mathbb{R}) \simeq SU(1,1) \to SU(1,q)$
荒川リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \times \mathcal{A}_k(B^\times) \to \mathcal{S}^{\mathrm{QDS}}_{(0,k)}(Sp(1,q))$	$SO^*(4)(\simeq SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \to Sp(1,q)$

記号：

- $k,\ k_1,\ k_2,\ \mu$ は正の整数, ν は非負整数.
- $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$: $SL(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆群.
- $\mathcal{S}^{(1)}_{\kappa}$ ：重さ整数 κ の楕円カスプ形式の空間.
- $\mathcal{S}^{(1)}_{\kappa+\frac{1}{2}}$ ：重さ半整数 $\kappa+\frac{1}{2}$ の楕円カスプ形式の空間.
- $\mathcal{M}^{(2)}_{*}$ ：重さ $*$ の次数 2 の正則 Siegel 保型形式の空間 (吉田リフトにおいてはベクトル値の重さの場合 $(l_1,l_2) = (k_1+k_2+2, k_1-k_2+2),\ k_1 \geq k_2$ を含む).
- $\mathcal{S}^{(2)}_{*}$ ：重さ $*$ の次数 2 の正則 Siegel カスプ形式の空間.
- $\mathcal{S}^{\mathrm{Hilb}}_{(\kappa,\kappa)}$ ：重さ (κ,κ) の (正則)Hilbert カスプ形式の空間.
- $\mathcal{A}^{\lambda}_{k}(SL(2,\mathbb{C}))$: 最高ウェイト k の $SU(2)$ の表現を重さに持ち, Casimir 作用素に関する固有値 λ の $SL(2,\mathbb{C})$ 上の保型形式の空間.

- $\mathcal{A}_k(B^\times)$：最高ウェイト k の $SU(2) \simeq \{x \in \mathbb{H} \mid N_{\mathbb{H}}(x) = 1\}$ の既約表現を重さに持つ有理数体上の定符号四元数環の乗法群 $B^\times$ 上の保型形式の空間 (実際には B は総実体上で考えられるが, 簡単のためここでは有理数体を定義体とする).

- $M^{I,q}_{(\mu,\nu)}$：重さ (μ,ν) の q 次元複素超球 (I 型領域) 上の正則カスプ形式の空間 (「重さ (μ,ν)」の意味は [Kud-2, Section 4] 参照. Kudla リフトにおいては $\mu-\nu > 2q+1$).

- $\mathcal{S}^{IV,m}_k$：重さ k の m 次元 IV 型対称領域上の正則カスプ形式の空間 (織田リフトにおいて $k > 2n+2$(even の場合) または $k > 2n+1$(odd の場合)).

- $\mathcal{S}^{\mathrm{QDS}}_{(0,k)}(Sp(1,q))$：重さ $(0,k)$ の $Sp(1,q)$ の四元数離散系列表現を生成するカスプ形式の空間 (荒川リフトにおいて $k > 4q+2$, $q=1$ ならば $k > 4q = 4$ とできる).

参考文献

[An] A. N. Andrianov, Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture, Invent. Math. 53 (1979) 267-280.

[As] T. Asai, On the Doi-Naganuma lifting associated with imaginary quadratic fields, Nagoya Math. J. 71 (1978) 149-167.

[B-S] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot, Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras. Nagoya Math. J. 121 (1991) 35-96.

[D-N] K. Doi and H. Naganuma, On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. Math. 9 (1969/1970) 1-14.

[E-G-M] J. Elstrodt, F. Grunewald and J. Mennicke, Vahlen's Group of Clifford Matrices and Spin Groups, Math. Z. 196 (1987) 369-390.

[F-H] E. Freitag and C. F. Hermann, Some Modular Varieties of Low Dimension, Adv. Math. 152 (2000) 203-287.

[Fr] S. Friedberg, On the imaginary quadratic Doi-Naganuma lifting of modular forms of arbitrary level, Nagoya Math. J. 92 (1983) 1-20.

[G-Tk] W.T. Gan and S. Takeda, The local Langlands conjecture for $GSp(4)$, to appear in Annals of Math.

[G-Tn] W.T. Gan and W. Tantono, The local Langlands conjecture for $GSp(4)$ II, the case of inner forms, preprint.

[He] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Graduate Studies in Mathematics, Volume 34, American Mathematical Society (2001).

[Hu] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Graduate text in Math. 9, Springer Verlag, (1972).

[Ib] 伊吹山知義, Saito-Kurokawa lifting for level N, 本報告書.

[K-S] S. Katok and P. Sarnak, Heeger points, cycles and Maass forms, Israel J. Math. 84 (1993) 193-227.

[Kn] A. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Second edition, Birkhäuser, 2005.

[Ko] H. Kojima, Shimura correspondence for Maass wave forms of half integral weight, Acta Arith. 69 (1995) 367-385.

[Kr] A. Krieg, Modular forms of half-spaces of quaternions, Lecture Notes in Math. vol.1143, Springer-Verlag, (1985).

[Kud-1] S. Kudla, Theta functions and Hilbert modular forms, Nagoya Math. J. 69 (1978) 97-106.

[Kud-2] S. Kudla, On certain arithmetic automorphic forms for $SU(1,q)$, Invent. Math. 52 (1979) 1-25.

[Kud-3] S. Kudla, On certain Euler products for $SU(2,1)$, Compositio Math. 42 (1980/81) 321-344.

[Kur] N. Kurokawa, Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Invent. Math. 49 (1978) 149-165.

[La] R. Langlands, Base change for $GL(2)$, Annals of Mathematics Studies 96, Princeton university press, Princeton, N.J., 1980.

[Maa] H. Maass, Über eine Spezialschar von Mudulformen zweiten Grades, I, II, III, Invent. Math. 52 (1979) 95-104, 53 (1979) 249-253, 53 (1979) 255-265.

[Mat] 松本久義, Weil 表現と Howe duality, 本報告書.

[M-S] A. Murase and T. Sugano, On the Fourier-Jacobi expansion of the unitary Kudla lift, Compositio Math. 143 (2007) 1-46.

[Na] H. Narita, Theta lifting from elliptic cusp forms to automorphic forms on $Sp(1, q)$, Math. Z. 259 (2008) 591-615.

[Ni] S. Niwa, Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta functions, Nagoya Math. J. 56 (1975) 147-161.

[Od] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977/1978) 97-144.

[Ok] T. Okazaki, Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and abelian surfaces, Amer. J. Math. 128 (2006) 139-165.

[Ps] I. I. Piatetski-Shapiro, On the Saito-Kurokawa lifting, Invent. Math. 71 (1983) 309-338.

[Sa] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in mathematics, vol.8, Kyoto Univ., Kyoto, Japan, (1975).

[Sak] 坂田裕, Shimura 対応, 本報告書.

[Sat] I. Satake, Classification theory of semi-simple algebraic groups, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 3. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

[Shim] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. 97 (1973) 440-481.

[Shin-1] T. Shintani, On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagoya Math. J. 58 (1975) 83-126.

[Shin-2] T. Shintani, On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Sympos. Pure Math. Vol.33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979) part2, 97-110.

[Su] 菅野孝史, Oda Lift, 本報告書.

[Yk] 横田一郎, 古典型単純リー群, 現代数学社 (1993).

[Ys] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Invent. Math. 60 (1980) 193-248.

[W] J. L. Waldspurger, Correspondence de Shimura, J. Math. Pures et appl., 59 (1980) 1-132.

[Za-1] D. Zagier, Modular forms associated to real quadratic fields, Invent. Math., 30 (1975) 1-46.

[Za-2] D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'aprés H. Maass), Seminar on Number Theory, Paris 1979-80, 371-394, Progr. Math., 12, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

Siegel 保型形式の Hecke 理論

軍司圭一

1 はじめに

本稿では Siege 保型形式に対してどのように Hecke 作用素や L 関数が定義されるかについて解説する．一変数保型形式の場合，L 関数は Fourier 係数から定まる Dirichlet 級数として定義され，それが Hecke 作用素の固有値であれば Euler 積表示を持つという見方をされることが多い．しかし多変数の場合での L 関数はむしろ Euler 積表示の方であり，一般には必ずしも Fourier 係数と関係づけられるわけではない．

多変数の場合の Hecke 理論を古典的に扱おうとすると，複雑というよりもむしろ煩雑であり，なかなかすっきりと解説してある教科書は少ない．[Fr] などが標準的である．Andrianov の最近出された教科書 [An2] は，以前の教科書に比べれば，ややコンパクトにまとまっていると思う．

本稿では古典的な両側剰余類での Hecke 作用素の定義をまず行った後，一般論を意識した形で Satake 同型，L 関数の定義と繋がるような構成をしたつもりである．その際に van der Geer の記事 ([vG]) が非常に役に立った．より一般の立場での L 関数の定義については，[Na1] や [Yo] に解説がある．

2 古典的な Hecke 環の定義

以下の記号を定義する．

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \Gamma^n = Sp(n, \mathbb{Z}) = \{\gamma \in GL(2n, \mathbb{Z}) \mid {}^t\gamma J_n \gamma = J_n\}$$

$$G = GSp(n, \mathbb{Q})^+ = \{g \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t g J_n g = \nu(g) J_n,\ \exists \nu(g) \in \mathbb{R}_{>0}\} \tag{2.1}$$

このとき任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}\Gamma g$ は Γ と commensurable になることが知られている．すなわち

$$[\Gamma : \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g] < \infty, \quad [g^{-1}\Gamma g : \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g] < \infty$$

が成り立つ．

Γ に関する G の Hecke 環 $H(\Gamma, G) = H(\Gamma, G)_{\mathbb{C}}$ を次のようにする．まず集合としては両側剰余

類の $\mathbb{C}$ 係数形式線形和として

$$H(\Gamma, G) = \left\{ \sum_{i:\text{ 有限}} a_i(\Gamma g_i \Gamma) \;\middle|\; g_i \in G,\ a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

と定める．これに環構造を以下の要領で入れる: $L(\Gamma, G) = \{\sum_{i:\text{有限}} a_i(\Gamma g_i) \mid g_i \in G,\ a_i \in \mathbb{C}\}$ を左剰余類の形式線形和のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする．これには Γ による自然な右作用 $(\gamma,\ \sum_i a_i(\Gamma g_i)) \mapsto \sum_i a_i(\Gamma g_i \gamma)$ がある．この作用による不変部分空間を $L(\Gamma, G)^\Gamma$ とすると，$L(\Gamma, G)^\Gamma$ には

$$\left(\sum_i a_i(\Gamma\gamma_i)\right)\left(\sum_j b_j(\Gamma\delta_j)\right) = \sum_{i,j} a_i b_j(\Gamma\gamma_i\delta_j)$$

で積が入る．一方 $\mathbb{C}$-ベクトル空間の同型

$$H(\Gamma, G) \simeq L(\Gamma, G)^\Gamma, \quad \Gamma g \Gamma = \bigcup_{i=1}^r \Gamma g_i \text{ に対して } \Gamma g \Gamma \mapsto \sum_{i=1}^r \Gamma g_i$$

があるので (全単射 $\Gamma\backslash\Gamma g\Gamma \simeq \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g\backslash\Gamma$ より $[\Gamma g\Gamma : \Gamma] < \infty$ に注意)，この同型を通して $H(\Gamma, G)$ に積を入れることができる．

命題 2.1 $H(\Gamma, G)$ は可換環である．

証明には以下の補題を使う．

補題 2.2 任意の $g \in G$ に対して両側剰余類 $\Gamma g\Gamma$ の代表元として

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_g, d_1, \ldots, d_g) \quad a_i d_i = \nu(g),\ a_i | a_{i+1},\ a_g | d_g$$

の形の元が一意的にとれる ($\nu(g)$ の定義は (2.1))．

証明は例えば [An1, Theorem 3.28] を参照のこと．

命題 *2.1* の証明 G 上の involution $\vee$ を $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$ に対して $g^\vee = \begin{pmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{pmatrix} = \nu(g)g^{-1}$ として定める．特に α が対角行列であれば $\alpha^\vee = J_n \alpha J_g^{-1}$ となるので，補題より任意の $g \in G$ に対して $\Gamma g \Gamma = \Gamma g^\vee \Gamma$ が成り立つ．$\vee$ が積の順番を入れ替える対合であるので命題の主張を得る． □

このようにして定めた Hecke 環は，各素数ごとの Hecke 環に分解することができる．すなわち $G^{(p)} = G \cap GL(2n, \mathbb{Z}[1/p])$ と定めると

$$H(\Gamma, G) = \bigotimes_{p:\text{素数}} H_p, \quad H_p = H(\Gamma, G^{(p)})$$

が成り立つ．特に $g \in G^{(p)}$ に対しては $\nu(g)$ は p べきになることに注意．

この性質より，H_p の構造を調べればよいことが分かるが，それには以下の命題が成り立つ．

命題 2.3

$$T(p) = \Gamma \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix}, \quad T_i(p^2) = \Gamma \begin{pmatrix} 1_i & & & \\ & p1_{n-i} & & \\ & & p^2 1_i & \\ & & & p1_{n-i} \end{pmatrix} \Gamma \quad (0 \le i \le n)$$

と定める．このとき

$$H_p = \mathbb{C}[T(p), T_i(p^2)\ (1 \le i \le n)]$$

が成り立つ．

(cf. [An1, Theorem 3.40])

この命題で Hecke 環の生成元は分かったが，より明快な環構造を決めるために，次節で Satake 同型と呼ばれる同型射を定義することにする．

3 局所 Hecke 環と Satake 同型

以下の記号を定義する．

$$G_p = GSp(n, \mathbb{Q}_p), \quad K_p = G_p \cap GL(2n, \mathbb{Z}_p)$$

$$\mathcal{H}_p = \left\{ \phi\colon G_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \text{ は両側 } K_p\text{-不変 i.e. } \phi(k_1 g k_2) = \phi(g),\ \forall k_1, k_2 \in K_p \\ \phi \text{ は局所定数かつコンパクト台を持つ} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{H}_p$ には convolution

$$\phi_1 * \phi_2(h) = \int_{G_p} \phi_1(g)\phi_2(g^{-1}h)dg$$

で積が入り，$\mathbb{C}$-代数の構造を持つ．このとき以下の補題が成り立つことが容易に分かる．

補題 3.1

$$H_p = H(\Gamma, G^{(p)}) \simeq \mathcal{H}_p, \quad \Gamma g \Gamma \mapsto \mathrm{ch}(K_p g K_p)$$

なる $\mathbb{C}$-代数としての同型がある．

以下 $\mathcal{H}_p$ の構造を調べるが，そのために代数群 GSp の部分群を次で定義する．

$$T = \{\mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_g, v_1, \ldots, v_g) \mid u_1v_1 = u_2v_2 = \cdots = u_gv_g\} \subset GSp$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \nu {}^t\!A^{-1} \end{pmatrix} \in GSp \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき $P = TN$ は GSp の minimal parabolic subgroup になっている．

GSp の極大トーラスである T の Hecke 環:

$$\mathcal{H}_p(T) = \{\psi\colon T(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C} \mid \text{両側 } T(\mathbb{Z}_p)\text{-不変，局所定数，コンパクト台 }\}$$

の構造は容易に分かる．すなわち T は GL_1 の $n+1$ 個の直積と同型であることから

$$\mathcal{H}_p(T) = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]$$

となることが分かる．ここで

$$X_0 = \mathrm{ch}\left(T(\mathbb{Z}_p)\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} T(\mathbb{Z}_p)\right),$$

$$X_i = \mathrm{ch}\left(T(\mathbb{Z}_p)\begin{pmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i^{-1} \end{pmatrix} T(\mathbb{Z}_p)\right), \quad S_i = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \overset{i}{p}, 1, \ldots, 1)$$

とおいた．

T の GSp における正規化群を $N(T) = \{g \in GSp \mid g^{-1}Tg \subset T\}$ で表す．このとき GSp の Weyl 群 $W = N(T)/T$ は共役作用で T に作用する．

補題 3.2 群同型 $W \simeq \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ が成り立つ．ここに $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，$T \ni t = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ に対して n 元集合 $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n)\}$ の置換として作用する．また $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \ni \varepsilon_i$(第 i 成分のみ 1 で他は 0 である元) は u_i と v_i との入れ替えとして作用する．

W は T に作用するから，自然に T の Hecke 環 $\mathcal{H}_p(T)$ にも作用している．補題より $\mathcal{H}_p(T) = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]$ への $W = \mathfrak{S}_g \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の作用は，$\mathfrak{S}_g$ は $X_1, \ldots, X_n$ の置換として作用し，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \ni \varepsilon_i$ の作用は

$$\begin{cases} X_0 \longmapsto X_0 X_i \\ X_i \longmapsto X_i^{-1} \\ X_j \longmapsto X_j \quad (j \neq i) \end{cases}$$

で与えられることが分かる．$\mathcal{H}_p(T)$ の W-不変部分代数を $\mathcal{H}_p(T)^W$ で表す．

$\mathcal{H}_p$ から $\mathcal{H}_p(T)$ への $\mathbb{C}$-代数の準同型 (**Satake 変換**) を以下で定義する．

$$S \colon \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p(T), \quad S(f)(g) = \delta(t)^{1/2} \int_N f(tn)\, dn$$

ここで $\delta(t)$ は modulus 関数と呼ばれ，$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$ としたときに

$$\delta(t) = |\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}}(t)|_p$$

で与えられる．具体的には $t = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_g, u_0 u_1^{-1}, \ldots, u_0 u_n^{-1})$ に対して

$$\delta(t) = u_0^{-n(n+1)/2} u_1^2 u_2^4 \cdots u_n^{2n}$$

である．

定理 3.3 Satake 変換は $\mathbb{C}$-代数の同型

$$\mathcal{H}_p \simeq \mathcal{H}_p(T)^W = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^W$$

を引き起こす．

原論文は [Sa] である．一般的に証明するには，p 進代数群の構造定理である Bruhat-Tits 理論が必要であり，すべてを理解するのはなかなか難しい．個人的には [Ca] の証明が読みやすいと思う．

これによって $\mathcal{H}_p$ の構造が分かったが，実際に同型射を直接書き下すこともできる．まず $M \in G_p$ に対して，両側剰余類 KMK は

$$KMK = \coprod_i M_i K, \quad M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & p^l\,{}^t\!A_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} p^{r_{i1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & p^{r_{in}} \end{pmatrix}$$

と分解される．ここで $p^l = \nu(M)$ は i によらない数である．

命題 3.4 上記のように分解される M に対して

$$\mathrm{ch}(KMK) \mapsto X_0^l \sum_i \prod_{j=1}^n (p^{-j}X_j)^{r_{ij}}$$

で与えられる写像は，$\mathcal{H}_p$ から $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \dots X_n^{\pm}]^W$ への $\mathbb{C}$-代数の同型射を与える．

注 実は定理 3.3 と命題 3.4 で与えられる写像は X_0 を p べき倍しただけのずれが生じており，定理 3.3 を直接書き下すと

$$S(\mathrm{ch}(KMK)) \mapsto p^{ln(n+1)/4} X_0^l \sum_i \prod_{j=1}^n (p^{-j}X_j)^{r_{ij}}$$

となる (cf. [AS, Lemma 1])．本稿では古典的な書き方で統一するため，以後同型射を命題 3.4 でとることにする．

4 Siege 保型形式の L 関数

$\mathbb{H}_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\ (\text{正定値})\}$ を Siegel 上半空間とする．$GSp(n,\mathbb{R})^+$ は $\mathbb{H}_n$ に

$$g\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}, \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$$

で作用する．$g \in GSp(n,\mathbb{R})^+$ 及び $k \in \mathbb{Z}$ と $\mathbb{H}_n$ 上の関数 f に対して

$$f|_k g(Z) = \nu(g)^{nk-n(n+1)/2} \det(CZ+D)^{-k} f(g\langle Z\rangle) \tag{4.1}$$

と定める．

定義 4.1 $\mathbb{H}_n$ 上の正則関数 f が $\Gamma = Sp(n,\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel 保型形式であるとは，次の条件を満たすことである．

(1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f|_k\gamma = f$ が成り立つ.

(2) $n = 1$ のとき，f は cusp で正則，すなわち Fourier 展開

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a(\nu) e^{2\pi i \nu z}$$

を持つ.

$n \geq 2$ に対しては (2) に対応する条件は自動的に満たされることが知られている (**Koecher 原理**). すなわち f は Fourier 展開

$$f(Z) = \sum_{S_n^* \ni A \geq 0} C(A) e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(AZ)} \tag{4.2}$$

を持つ．ここで S_n^* は半整数対称行列，すなわち対角成分が整数かつそれ以外が半整数の対称行列全体を表し，$A \geq 0$ は A が半正定置であることを示す．さらに f が条件

(3) $\det(\mathrm{Im}(Z))^{k/2}|f(Z)|$ が有界

を満たすとき f は cusp 形式であるという．重さ k の保型形式の空間全体を $M_k(\Gamma)$，cusp 形式の空間全体を $S_k(\Gamma)$ で表す.

Siegel 保型形式の空間への Hecke 環の作用は次で与えられる．$H(\Gamma, G) \ni \Gamma g \Gamma$ を左剰余類に分解して $\Gamma\gamma\Gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \Gamma\gamma_i$ としたとき

$$f|_k[\Gamma g \Gamma] = \sum_{i=1}^{r} f|_k\gamma_i$$

と定める．この作用で，$H(\Gamma, G)$ は $M_k(\Gamma)$ および $S_k(\Gamma)$ に作用していることが分かる.

注　[Gu1] と同様に，Siegel 保型形式はアデール上に持ち上げることができる．すなわち $\mathbb{A} = \mathbb{A}_Q$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環としたとき，分解

$$GSp(n, \mathbb{A}) = GSp(n, \mathbb{Q}) GSp(n, \mathbb{R})^+ \prod_p GSp(n, \mathbb{Z}_p)$$

が成り立つ (強近似定理)．この分解に従って $g = \gamma g_\infty k$ と書くとき，$f \in M_k(\Gamma)$ に対して $GSp(n, \mathbb{A})$ 上の関数 φ_f を

$$\varphi_f(g) = \det(Ci + D)^{-k} f(g_\infty \langle i1_n \rangle), \quad g_\infty = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と定めることで，保型形式を Siegel 上半空間上の関数から $GSp(n, \mathbb{A})$ 上の関数に持ち上げることができる．このとき定数倍のずれを除いて，$g \in G_p$ に対して

$$f|_k[\Gamma g \Gamma] = \varphi_f * \mathrm{ch}(K_p g K_p)$$

が成り立つ．ここで $*$ は convolution であり，$GSp(n,\mathbb{A})$ 上の適当な関数 φ,ψ に対して

$$\varphi * \psi(g) = \int_{GSp}(n,\mathbb{A})\varphi(gh)\psi(h^{-1})\,dh$$

と定める．

$S_k(\mathit{\Gamma})$ 上の Petersson 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を以下で定義する．まず $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$ として $\mathbb{H}_n$ 上の測度 d^*Z を

$$d^*Z = \det Y^{-(g+1)} dXdY$$

で定める．ただし dX 及び dY は通常の Lebesgue 測度とする．このとき d^*Z は $Sp(n,\mathbb{R})$ の作用に関する不変測度になっていることが示される．さて，$f, g \in S_k(\mathit{\Gamma})$ に対して

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathit{\Gamma}\backslash\mathbb{H}_n} f(Z)\overline{g(Z)}\det(Y)^k d^*Z$$

とおき，$S_k(\mathit{\Gamma})$ に内積を入れる．cusp 形式の定義より右辺の積分が収束することがわかる．このとき $\mathit{\Gamma}\alpha\mathit{\Gamma} \in H(G)$ に対して

$$\langle f|_k\mathit{\Gamma}\alpha\mathit{\Gamma}, g\rangle = \langle f, g|_k\mathit{\Gamma}\alpha\mathit{\Gamma}\rangle$$

が成り立つ．$H(G)$ は可換環であったから，$S_k(\mathit{\Gamma})$ は $H(G)$ の作用に関して同時対角化される．

$f \in S_k(\mathit{\Gamma})$ を Hecke 同時固有関数とする．このとき任意の $X \in H(G)$ に関して $f|X = \lambda(X)_f f$ が成り立つから，命題 3.4 により各素数 p に対して

$$\lambda_f \colon H_p = \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^W \to \mathbb{C}$$

という準同型がある．$\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]$ は $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^W$ 上 integral であるから，λ_f は $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}] \to \mathbb{C}$ に持ち上がる: すなわち λ_f は $X_0, X_1, \ldots, X_n$ の行き先で決まり，この対応により $\mathbb{C}$-代数としての射 $H_p \to \mathbb{C}$ 全体は，集合

$$(\mathbb{C}^{\times})^{n+1}/W$$

と同一視できることがわかる．

定義 4.2 f を同時固有関数とする．このとき各素数 p に対して上の同一視を通して定まる $(n+1)$ 個の複素数の組

$$\{\alpha_{p,0}, \alpha_{p,1}, \ldots, \alpha_{p,n}\}$$

を f の **Satake パラメーター**と呼ぶ.

Siegel 保型形式の L 関数は，上記の Satake パラメーターを用いて定義される．後に実例を挙げるが，一変数の場合，Satake パラメーターは Hecke 作用素の固有値のようなものであり，これらを用いた無限積が L 関数を与えることになる．直観的な説明としては Weyl 群不変になるように積を作ればよいということになるが，以下で定義するものは，もちろんきちんとした意味を持っている．

定義 4.3 (1) f を同時固有関数とし，$\{\alpha_{p,0},\alpha_{p,1},\ldots,\alpha_{p,n}\}$ を Satake パラメーターとする．このとき 2 種類の局所 L 因子を

$$L^p_{\mathrm{st}}(f,t)=(1-t)^{-1}\prod_{i=1}^{n}\bigl(1-\alpha_{p,i}t\bigr)^{-1}\bigl(1-\alpha_{p,i}{}^{-1}t\bigr)^{-1}$$

および

$$L^p_{\mathrm{spin}}(f,t)=(1-\alpha_{p,0}t)^{-1}\prod_{r=1}^{n}\prod_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}(1-\alpha_{p,0}\alpha_{p,i_1}\cdots\alpha_{p,i_r}t)^{-1}$$

で定める．

(2) 同時固有関数 f と $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$L_{\mathrm{st}}(f,s)=\prod_p L^p_{\mathrm{st}}(f,p^{-s})$$
$$L_{\mathrm{spin}}(f,s)=\prod_p L^p_{\mathrm{spin}}(f,p^{-s})$$

と定める．右辺は共に $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束し，この範囲で s に関する正則関数を定める．

$L_{\mathrm{st}}(f,s)$ を standard L 関数，$L_{\mathrm{spin}}(f,s)$ を spinor L 関数と呼ぶ.

注 spinor L 関数に現れる Euler 因子は次のような特徴付けがある．$L_{\mathrm{spin}}(t)$ で $L_{\mathrm{spin}}(f,t)$ の α_i を X_i に置き換えた $\mathbb{C}[X_0^{\pm},\ldots,X_n^{\pm}]^W[t]\simeq\mathcal{H}_p[t]$ の元 (の逆数) を表す．$T(p^k)$ を $\{g\in G_p\cap M_{2n}(\mathbb{Z}_p)\mid\nu(g)\in p^k\}$ の特性関数に対応する $\mathcal{H}_p$ の元とする．このとき $\mathcal{H}_p$ 係数の形式的べき級数

$$H_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}T(p^k)t^k$$

は，ある次数が 2^n-2 の多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$H_n(t)=P_n(t)L_{\mathrm{spin}}(p^{-n(n+1)/2}t)$$

と表わされる．すなわち上のような母関数の分母部分が spinor L 因子である．

注 L 関数は代数群 Sp_n の双対群 (定義は [Yo] 参照, そこでは connected L-group と書かれている) の表現と関係がある．GSp_n の双対群は $GSpin(2n+1,\mathbb{C})=\bigl(\mathbb{C}^1\times Spin(2n+1,\mathbb{C})\bigr)/Z$, ($Z$ は，$Spin(2n+1,\mathbb{C})$ の中心の位数 2 の元を a と書いたとき $(-1,a)$ で生成される群) であり，スピン群 $Spin_n$ は分裂しない完全列

$$1\to\{\pm1\}\to Spin_n\to SO_n\to 1$$

で定義される代数群である．

standard L 関数は $Spin_{n+1}$ から SO_{n+1} への写像を経由して得られる SO_{n+1} の standard 表現に対応しており，spinor L 関数は，spin 表現と呼ばれる SO_{n+1} を経由しない表現に対応している．表現の次数はそれぞれ $2n+1$ および 2^n であり，これは局所 L 因子の次数と一致していることに注意.

L 関数の解析接続・関数等式については以下ことが知られている.

定理 4.1 (Böcheler [Bö]) $f \in M_k(\mathit{\Gamma}^n)$ を同時固有関数とし，ε を n が奇数のとき 1，偶数のとき 0 とおく．このとき

$$\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-ns}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(s+k-j)L_{\mathrm{st}}(f,s)$$

は全 s-平面に有理型に解析接続し，関数等式

$$\Lambda(f,s) = \Lambda(f,-s)$$

を満たす.

予想 4.2 $f \in M_k(\mathit{\Gamma}^n)$ を同時固有関数としたとき，$L_{\mathrm{spin}}(f,s)$ は全 s-平面に有理型に解析接続され

$$s \longleftrightarrow nk - \frac{n(n+1)}{2} + 1 - s$$

の形の関数等式を持つであろう.

この予想は $n=2$ のときに Andrianov ([An1]) によって肯定的に解決されている.

定理 4.3 (Andrianov)

$$\Psi(f,s) = \Gamma(s)\Gamma(s-k+2)(2\pi)^{-2s}L_{\mathrm{spin}}(f,s)$$

とおく．このとき $\Psi(f,s)$ は高々有限個の極を除いて全平面に正則に解析接続され，関数等式

$$\Psi(f,2k-2-s) = (-1)^k\Psi(f,s)$$

を満たす.

$n=3$ のとき Asgari-Schmidt によって L_{spin} の解析接続のみが示されている ([AS]).

5 実例

以下，いくつかの簡単な場合についての L 関数の具体形を調べることにするが，その前に重要な関係式を一つ示しておく．n は一般とし，$M = p1_{2n} = \mathrm{diag}(p,\ldots,p) \in G$ をとる．このとき Satake 同型 (3.4) により，

$$\mathrm{ch}(\mathit{\Gamma} M \mathit{\Gamma}) = p^{-n(n+1)/2}X_0^2X_1\cdots X_n$$

が成り立つ．一方 (4.1) から M は $f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ に $f_k|M = p^{nk-n(n+1)}f$ で作用する．よって同時固有関数 f の Satake パラメーター $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ には，関係式

$$\alpha_0^2\alpha_1 \cdots \alpha_n = p^{nk-n(n+1)/2} \tag{5.1}$$

が成り立つ．

5.1　一変数保型形式の場合

$n = 1$ すなわち $\mathit{\Gamma} = SL(2, \mathbb{Z})$ のときを考える．通常の T_p 作用素は $\mathit{\Gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathit{\Gamma}$ の作用であり，

$$\mathit{\Gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathit{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \mathit{\Gamma} \ \amalg \coprod_{0 \le b \le p-1} \begin{pmatrix} p & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathit{\Gamma}$$

と分解されるから，命題 3.4 の写像で $X_0 + X_0X_1 \in \mathbb{C}[X_0^{\pm}, X_1^{\pm}]^W$ に移ることが分かる．よって $f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ を正規化された同時固有関数，$T(p)f = \lambda_p f$ とし，Satake prameter を $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ とすると，(5.1) と合わせて

$$\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 = \lambda_p, \quad \alpha_0^2\alpha_1 = p^{k-1}$$

を得る．

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{spin}}(f, s) &= \prod_p (1 - \alpha_0 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_0\alpha_1 p^{-s})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - \lambda_p p^{-s} + p^{k-1-2s}) \end{aligned}$$

であるから，spinor L 関数は通常の保型 L 関数 $L(f, s)$ に一致する．なおこのときは $Spin_3 = SL_2$ であり，双対群 $GSpin(3, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})$，その spinor 表現は $GL(2, \mathbb{C})$ の standard 表現に他ならない．

一方 standard L 関数を考えると

$$L_{\mathrm{st}}(f, s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_1 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_1^{-1} p^{-s})^{-1}$$

であるが，$1 - \lambda_p t + p^{k-1}t^2 = (1 - \alpha_0 t)(1 - \alpha_0\alpha_1 t)$ から，

$$\alpha_0^2 = p^{k-1}\alpha_1^{-1}, \quad \alpha_0 \cdot (\alpha_0\alpha_1) = p^{k-1}, \quad (\alpha_0\alpha_1)^2 = p^{k-1}\alpha_1$$

となるので，

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{st}}(f, s-k+1) &= \prod_p (1 - \alpha_0^2 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_0^2\alpha_1 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_0^2\alpha_1^2 p^{-s})^{-1} \\ &= L(f, s, \mathrm{Sym}^2) = \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n^2)}{n^s} \end{aligned}$$

が成り立つ (最後の等式については例えば [Is] などに解説がある)．すなわち standard L 関数は 2 次対称積 L 関数である．accidental 同型から

$$Spin(3,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} SO(3,\mathbb{C}) \hookrightarrow GL(3,\mathbb{C})$$

という写像があるが ([Na2] 参照: そこでは $SL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{2:1} SO(2,1)$ となっているが $\mathbb{C}$ 係数にしても全く同じように証明できる)，これは SL_2 の 2 次の対称積表現と一致している．これが対称積 L 関数が standard L 関数と対応している理由である．

5.2 Eisenstein 級数

保型形式として Siegel Eisenstein 級数

$$E_k^n(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^n \backslash \Gamma^n} \det(CZ+D)^{-k}$$

を考える．ここに k は $k \geq n+2$ を満たす偶数であり，

$$\Gamma_\infty^n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n \right\}$$

とする．$n=1$ の場合には

$$2\zeta(k)E_k^1(z) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus(0,0)} (cz+d)^{-k}$$

である．右辺の級数は広義一様絶対収束し，$E_k^n(Z) \in M_k(\Gamma^n)$ である．また $E_k^n(Z)$ は Hecke 作用素の同時固有関数になっている (後述の Zharkovskaya の関係式より従う)．

命題 5.1 Siegel Eisensetein 級数 E_k^n の Satake パラメーターは

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_i = p^{k-i}\,(1 \leq i \leq n)$$

ととることができる．

実際 $n=1$ のときには E_k^1 の T_p 作用素の固有値が $1+p^{k-1}$ であることより容易に従う．一般の n に対してこれを証すには，Zharkovskaya の関係式と呼ばれるものを使う．そのためにまず Siegel 保型形式の次数を下げる Φ 作用素を次で定義する．

定義 5.1 $f \in M_k(\Gamma^n)$ に対して $\Phi(f) \in M_k(\Gamma^{n-1})$ を

$$\Phi(f)(z) = \lim_{\lambda\to\infty} f\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}\right), \quad z \in \mathbb{H}_{n-1}$$

で定義する．

f の Fourier 展開の形 (4.2) に注意すると，右辺の極限は収束し $\Phi(f)$ は

$$\Phi(f)(z) = \sum_{S_{n-1}^* \ni a \geq 0} C\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) e^{2\pi i a z}$$

と Fourier 展開されることが分かる．特に

$$\Phi(E_k^n) = E_k^{n-1}$$

である (cf [Gu2, §3.3]).

定理 5.2 (Zharkovskaya の関係式) $\mathbb{C}$-代数の射 ψ: $H_p(\Gamma^n) \to H_p(\Gamma^{n-1})$ を

$$(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) \longmapsto (p^{k-n}X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, p^{n-k})$$

で定める．このとき $f \in M_k(\Gamma^n)$ と $T \in H_p(\Gamma^n)$ に対して

$$\Phi(f|_k T) = \Phi(f)|_k \psi(T)$$

が成り立つ．

証明は例えば [An2, Theorem 4.19].

例えば $n = 2$ のとき，Zharkovskaya の関係式より Satake パラメーターを

$$\alpha_0 = p^{k-2}, \quad \alpha_1 = p^{k-1}, \quad \alpha_2 = p^{2-k}$$

としてよいことが分かるが，補題 3.2 の記号で $W \ni \varepsilon_2$ を作用させることで，

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = p^{k-1}, \quad \alpha_2 = p^{k-2}$$

とできることが分かる．

命題 5.1 より特に

$$L_{\mathrm{st}}(E_k^n, s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{n} \zeta(s-k+i)\zeta(s+k-i)$$

が成り立つ．

参考文献

[An1] A.N. Andrianov “Euler prodcts associated with Siegel modular forms of degree two”, Russ. Math. Surveys **29**, 3, 45-116 (1974).

[An2] A.N. Andrianov “Indroduction to Siegel modura forms and Dirichlet series”, Universitext. Springer, New York (2009).

[AS] M. Asgari and R. Schmidt, “Siegel modular forms and representations”. Manuscripta Math. **104**, no. 2, 173-200 (2001).

[Bö] S. Böcherer "Über die Funktionalgelichung automprpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe". J. reine angew. Math. **362**, 146-168 (1985).

[Ca] P. Cartier, "Representations of p-adic groups: a survey. Automorphic forms, representations and L-functions", Part 1, pp. 111-155, Proc. Sympos. Pure Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1979).

[Fr] E. Freitag, "Siegelsche Modulfunktionen", Grundl. Math. Wiss. **254**. Springer-Verlag, Berlin.

[vG] G. van der Geer, "Siegel modular forms and their applications." The 1-2-3 of modular forms, 181-245, Universitext, Springer, Berlin, (2008)

[Gu1] 軍司圭一, "GL_2 の保型形式と表現論", 本報告集

[Gu2] 軍司圭一, "Siegel Eisensetein 級数の Fourier 展開", 本報告集

[Is] 石井卓, 「一変数保型形式に付随する L 関数」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), p3-36.

[Na1] 成田宏秋, 「保型 L 関数の定義」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), p137-169.

[Na2] 成田宏秋, "Accidental 同型について", 本報告集

[Sa] I. Satake, "Theory of spherical functions on reductive groups over p-adic fields", Publ. Math. I.H.E.S. **18**, 5-69 (1963).

[Yo] 吉田敬之, "Functoriality Principle", 本報告集

Weil 表現と Howe duality

松本久義
東京大学 大学院数理科学研究科

この論説は、私の 2011 年度整数論サマースクールでの Weil 表現および Howe duality についての入門講義の内容を紹介したものである。私の力量のせいもあり Weil 表現については話を局所体の場合についてのみ、Howe duality は実数体の場合に話を限った。また証明などもほとんどつけることはできなかったが、少しでもこのテーマを学びたいという人の助けになれば幸いである。

整数論サマースクールに携わった全ての方、なかでも研究代表者として尽力され、私に講演の機会を与えていただいた軍司圭一氏に感謝の意を表します。

1 Weil 表現

1.1 局所体上の Fourier 変換

以下 F は有限体または非離散的な局所コンパクト体とする. $\mathbb{T}$ で絶対値が 1 であるような複素数のなす乗法群を表す。また F を加法群と見た時の 非自明な unitary character $\chi_F : F \to \mathbb{T}$ を一つ固定しておく。

もちろん χ_F は一般には cannical には定まらないのでとにかく一つ選ぶこととなる。

例 1.1.1 一例として幾つかの具体的な F に対して χ_F は以下のように選ぶことができる。

1. $\chi_{\mathbb{R}}(t) = e^{2\pi i t} \quad (t \in \mathbb{R})$.
2. F が p-進体 $\mathbb{Q}_p$ である場合、$\chi_{\mathbb{Q}_p}$ を $\chi_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p) = 1$ および $k \in \mathbb{Z}$ と、p と互いに素である整数 v に対して $\chi_{\mathbb{Q}_p}(vp^k) = e^{2\pi i v p^k}$ と定めることができる。
3. F が $\mathbb{Q}_p$ の有限次代数拡大であるならば、$\chi_F = \chi_{\mathbb{Q}_p} \circ Tr_{F/\mathbb{Q}_p}$ と定めることができる。

定義 1.1.2 dx が F 上の *Haar* 測度であるとは F の *Borel* 集合に対して定義された正則な可算加法的測度であって、加法についての平行移動に関して不変であることととする。*(Haar* 測度は正の実数倍を除いて一意に存在する。)

例えば $F=\mathbb{R}$ であるときは dx は Euclid 測度をとることができる。

定義 1.1.3 まずコンパクト台を持った連続関数の空間

$$C_0(F)=\{f:F\to\mathbb{C}\mid f\text{ は連続かつ }f\text{ の台はコンパクト }\}$$

および 2 乗可積分関数の空間

$$L^2(F)=\left\{f:F\to\mathbb{C}\mid f\text{ は可測かつ }\int_F|f(x)|^2dx<\infty\right\}$$

を考える。ここで ほとんど到る所等しい可測関数は同じものとみなすと $L^2(F)$ は $\int_F|f(x)|^2dx$ をノルムの *2* 乗として *Hilbert* 空間になる。ここで *Fourier* 変換 を $f\in C_0(F)$ に対して以下のように定める。

$$\mathcal{F}(f)(a)=\int_F\chi_F(ax)^{-1}f(x)dx.$$

これは *Hilbert* 空間の間の連続線形写像 $\mathcal{F}:L^2(F)\to L^2(F)$ に一意に拡張される。

Haar 測度 dx の正規化を適当にとると $\mathcal{F}^2=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}:L^2(F)\to L^2(F)$ は $\mathcal{F}^2(f)(x)=f(-x)$ が $f\in L^2(F)$ に対して成り立つようにできる。（Planchrel の定理）このような dx を自己双対な Haar 測度という。例えば $F=\mathbb{R}$ のときは通常の Euclid 測度が自己双対である。F が $\mathbb{Q}_p$ の有限次代数拡大の時、χ_F を例 1.1.1 のように定めた場合、F の整数環の測度が $(N\mathfrak{d})^{-1/2}$ になるような Haar 測度が自己双対になる。但し $N\mathfrak{d}$ は F の absolute differential のノルムである。

以下考える F 上の測度は全て自己双対な Haar 測度であるとする。

定義 1.1.4 （多変数の *Fourier* 変換）

V を有限次元 F-ベクトル空間としその次元を n とする。V^* を V の双対空間とする。$\langle\ ,\ \rangle$ で $V\times V^*\to F$ なる *canonical pairing* を表す。以下 V の基底 $v_1,...,v_n$ を一つ固定する。まず V 上の *Haar* 測度による積分を

$$\int_V f(v)dv=\int_F\cdots\int_F f\left(\sum_{k=1}^n x_kv_k\right)dx_1\cdots dx_n$$

で定める。この積分を使って *2* 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を *1* 変数の時と同様に定める。また *Fourier* 変換 $\mathcal{F}:L^2(V)\to L^2(V^*)$ を

$$\mathcal{F}f(\xi)=\int_V\chi_F(\langle v,\xi\rangle)^{-1}f(v)dv$$

で定める。与えられた基底 $v_1,...,v_n$ に対する V^* の双対基底を $v_1,...,v_n$ と同一視することにより V と V^* を同一視する。これによって $\mathcal{F}:L^2(V)\to L^2(V)$ とみなす。このように定めると $\mathcal{F}^2f(v)=f(-v)$ が全ての $f\in L^2(V)$ に対して成り立つ。この *Fourier* 変換の定義は基底の取り方に依存していることに注意しておく。

1.2 Heisenberg 群と Stone-von Neuman 表現

以下 X を偶数次元 F-ベクトル空間であるとし $\dim(X) = 2n$ とする。

定義 1.2.1 X 上の非退化双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ がシンプレクティク形式であるとは $\langle x, x\rangle = 0 \quad (x \in X)$ を満たすこととする。

以下組 $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ を固定して考える。

定義 1.2.2 *1.* X の部分空間 V に対して

$$V^{\perp} = \{x \in X \mid \langle x, v\rangle = 0 \ \ (v \in V)\}$$

とおく。X の部分空間 V が $V = V^{\perp}$ を満たすとき *Lagrangean* という。$\mathcal{L}(X)$ で X の *Lagranean* 全体のなす集合を表す。

2. X 上のシンプレクティック群 $Sp(X)$ を

$$Sp(X) = \{g \in GL(X) \mid \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle \ \ (x, y \in X)\}.$$

で定める。

3. X の基底 $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n$ がシンプレクティック基底であるとは $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, $\langle w_i, w_j\rangle = 0 \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n)$, $\langle v_i, w_j\rangle = \delta_{i,j} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ を満たすこととする.（ここで $\delta_{i,j}$ は *Kronecker* のデルタである。）

補題 1.2.3 *1.* $V \in \mathcal{L}(X)$ に対し常に $\dim V = n$ となる.

2. $Sp(X)$ は $\mathcal{L}(X)$ に推移的に作用する。

3. $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が *transversal* であるとする。このときシンプレクティック形式の $V \times V'$ への制限を考えると *perfect pairing* になりこれで V' と V の双対空間 V^* を自然に同一視できるので以下そうする。また $v_1, ..., v_n$ を V の任意の基底とし $w_1, ..., w_n$ を V' の双対基底とすると、$v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n$ は X のシンプレクティック基底となる。

定義 1.2.4 （*Heisenberg* 群の第一の定義）$V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が *transversal* であるとする。すると $X = V \oplus V^*$ となる。この時、*Heisenberg* 群 $H(V, V')$ を以下のように定義する。 まず集合としては

$$H(V, V') = V \oplus V^* \oplus F$$

であり、乗法は

$$(v, w, a)(v', w', b) = (v+v', w+w', \langle v, w'\rangle + a + b) \qquad (v, v' \in V, w, w' \in V', a, b \in F)$$

のように定めると $H(V, V')$ は局所コンパクト群になる。

定義 1.2.5 *(Stone-von Neuman 表現)* $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が *transversal* であり $v_1, ..., v_n$ を V の基底とする。これを用いて V の *Haar* 測度 dv や *2* 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を上記のように定める。$U(L^2(V))$ で $L^2(V)$ 上のユニタリ作用素全体のなす群を表す。$T : H(V, V') \to U(L^2(V))$ を

$$T((v, w, a)\varphi(x) = \chi_F(\langle x, w\rangle + a)\varphi(x + v) \quad (v \in V, w \in V', a \in F, x \in V)$$

で定める。これは $H(V, V')$ の $L^2(V)$ におけるユニタリ表現を与え、これを *Stone-von Neuman* 表現という。

定理 1.2.6 *(Stone-von Neuman の定理)*

1. *Stone-von Neuman* 表現 $(T, L^2(V))$ は既約ユニタリ表現である。ここで既約表現とは自分自身と $\{0\}$ 以外に閉部分表現を持たない零表現以外の表現のことをいう。

2. 任意の $H(V, V')$ の既約ユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ で
$$\pi((0, 0, a))h = \chi_F(a)h \quad (a \in F, h \in \mathcal{H})$$
を満たすものを考える。すると、ある *Hilbert* 空間の同型（*isometry)* $J : L^2(V) \to \mathcal{H}$ が存在して $J \circ T((v, w, a)) = \pi((v, w, a)) \circ J \ (v \in V, w \in V', a \in F)$ を満たす。このような J は絶対値が 1 であるような複素数倍を除いて一意である。

F の標数が 2 でない場合はシンプレクティック群 $Sp(X)$ は Heisenberg 群の自己同型群の部分群になりこれが、Weil 表現の構成において重要になる。 ただし上記のような Heisenberg 群の定義のもとでは $Sp(X)$ の Heisenberg 群の自己同型群への埋め込みの記述は複雑になるので以下のような Heisenberg 群の定義がよく用いられる。

定義 1.2.7 （*Heisenberg* 群の第二の定義）
F の標数は 2 でないとする。$H(X) = X \oplus F$ 上に以下のように乗法を定める。

$$(x, a)(x', b) = (x + x', \frac{1}{2}\langle x, x'\rangle + a + b) \qquad (x, x' \in X, a, b \in F).$$

すると群の単射準同型 $\mathcal{I} : Sp(X) \to Aut(H(X))$ を

$$\mathcal{I}(g)((x, a)) = (g^{-1}x, a) \quad (g \in Sp(X), x \in X, a \in F)$$

で定めることができる。

このように定義すると、$V, V' \in \mathcal{L}(X)$ が transversal であるとき $\Phi : H(V, V') \to H(X)$ を $\Phi(v, w, a) = (v + w, -\frac{1}{2}\langle v, w\rangle + a)$ で定めると位相群の同型を与える。この同型を介して $H(X)$ の Stone-von Neuman 表現 $\tilde{T} : H(X) \to U(L^2(V))$ を考えることができる。この同型 Φ において $\Phi((0, 0, a)) = (0, a) \ (a \in F)$ が成り立つ。

1.3 Weil 表現

(F, χ_F, dx) および $(X, \langle\ ,\ \ \rangle)$ は上記の通りとする。また F の標数は 2 でないとする。また transversal な $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ および V の基底 $v_1, ..., v_n$ も固定し、これを用いて V の Haar 測度 dv を考え、それによって 2 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を定める。

$g \in \mathrm{Sp}(X)$ に対して g の作用で Stone-von Neuman 表現 $(\tilde{T}, L^2(V))$ を振った表現 $\tilde{T}^g = \tilde{T} \circ \mathcal{I}(g)$ を考える。

定義 1.3.1 *(メタプレクティック群)*
メタプレクティック群 $Mp(X)$ を以下のように定義する。

$$Mp(X) = \{(g, J) \in Sp(X) \times U(L^2(V)) \mid J^{-1} \circ \tilde{T}((x, a)) \circ J = \tilde{T}^g((x, a)) \quad x \in X, a \in F\}.$$

すると $Mp(X)$ は $Sp(X) \times U(L^2(V))$ の部分群になる。
単射群準同型 $\iota : \mathbb{T} \to Mp(X)$ を

$$\iota(a) = (id_X, a id_{L^2(V)}) \quad (a \in \mathbb{T})$$

で定める。また $p_1 : Mp(X) \to Sp(X)$ を $Sp(X) \times U(L^2(V)) \to Sp(X)$ なる第一成分への射影の $Mp(X)$ への制限とする。

命題 1.3.2

$$1 \to \mathbb{T} \xrightarrow{\iota} Mp(X) \xrightarrow{p_1} Sp(X) \to 1$$

は完全系列になる。

証明 $\mathrm{Ker}(p_1) = \mathrm{Im}(\iota)$ となることは既約ユニタリ表現に対する Schur の補題である。p_1 の全射性は、$\tilde{T}^g((o, a)) = \chi_F(a)\mathrm{id}_{L^2(V)}$ が成り立つので、Stone-von Neuman の定理より従う。 □

定義 1.3.3 *(Weil 表現)*
$W : Mp(X) \to U(L^2(V))$ を第 *2* 成分への射影 $Sp(X) \times U(L^2(V)) \to U(L^2(V))$ の $Mp(X)$ への制限として定める。ユニタリ表現 $(W, L^2(V))$ が *Weil* 表現である。

命題 1.3.2 の完全系列は分裂せず、Weil 表現は $\mathrm{Sp}(X)$ の表現に落とすことはできない。以下の定理は Weil 表現は $\mathrm{Sp}(X)$ の double cover の表現にはなっていることを意味している。

定理 1.3.4 *([Weil])*
$Mp(X)$ の閉部分群 $\tilde{Sp}(X)$ であって $Im(\iota) \cap \tilde{Sp}(X) = \{\iota(1), \iota(-1)\}$ かつ $p_1(\tilde{Sp}(X)) = Sp(X)$ となるものが存在する。

上で固定した V の基底 $v_1,...,v_n$ に対応する V' の双対基底 $w_1,...,w_n$ を取りシンプレクティック基底 $v_1,...,v_n,w_1,..,w_n$ によって $\mathrm{Sp}(X)$ の元を行列表示する。 さらに $v_1,...,v_n$ の部分と $w_1,..,w_n$ の部分を分けて考えることにより $\mathrm{Sp}(X)$ の元を block-wise に表示して $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ などと書く。ここで例えば α(resp. γ) は F 係数 $n \times n$ 行列とも $\mathrm{End}_F(V)$ (resp. $\mathrm{Hom}_F(V,V')$) の元とも見做す。ここで

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathrm{GL}(V) \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \gamma & I_n \end{pmatrix} \middle| \gamma \text{ は } F \text{ 係数 } n \times n \text{ 対称行列} \right\}.$$

すると $\sigma \in \mathrm{Sp}(X)$ かつ L および N は $\mathrm{Sp}(X)$ の部分群である。

$\mathrm{Sp}(X)$ が L,N および σ で生成されることに注意すれば Weil 表現を具体的な記述は、L,N の元あるいは σ の $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ への持ち上げを記述すればよいことがわかる。そのために以下の概念を導入する。

定義 1.3.5 *(Weil constant cf. [Ikeda])* $a \in F^\times$ に対して $\gamma_{\chi_F}(a) \in \mathbb{T}$ が存在して任意の F 上の *Schwartz* 族関数 φ に対して

$$\int_F \varphi(x)\chi_F\left(\frac{ax^2}{2}\right)dx = \gamma_{\chi_F}(a)|a|_F^{-\frac{1}{2}} \int_F \mathcal{F}\varphi(x)\chi_F\left(-\frac{x^2}{2a}\right)dx$$

を満たす。 この $\gamma_{\chi_F}(a)$ を *Weil constant* という。

1. $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \in L$ に対して $\bar{W}(g) \in U(L^2(V))$ を以下で定める。

$$\bar{W}(g)\varphi(v) = \frac{\gamma_{\chi_F}(1)}{\gamma_{\chi_F}(\det \alpha^{-1})}|\det a|_F^{-\frac{1}{2}}\varphi(\alpha^{-1}v) \qquad (\varphi \in L^2(V))$$

2. $g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \gamma & I_n \end{pmatrix} \in N$ に対して $\bar{W}(g) \in U(L^2(V))$ を以下で定める。

$$\bar{W}(g)\varphi(v) = \chi_F\left(-\frac{1}{2}\langle v, \gamma v\rangle\right)\varphi(v) \qquad (\varphi \in L^2(V))$$

3. $\bar{W}(\sigma) \in U(L^2(V))$ を以下で定める。

$$\bar{W}(\sigma)\varphi = \gamma_F(1)^{-n}\mathcal{F}\varphi \qquad (\varphi \in L^2(V))$$

定理 1.3.6 $g \in L \cup N \cup \{\sigma\}$ に対して $(g, \bar{W}(g)) \in \tilde{Sp}(X)$ となる。

2 Howe duality

このセクションを通じて $F=\mathbb{R}$ とする。また X は $2n$ 次元の実ベクトル空間でありシンプレクティック形式 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする。

2.1 Howe duality とは

G を群 H をその部分群とするとき

$$Z_G(H)=\{g\in G\mid hg=gh(h\in H)\}$$

とおく。

定義 2.1.1 H_1,H_2 を $Sp(X)$ の *reductive* 部分群とする。組 (H_1,H_2) が *reductive dual pair* であるとは $Z_{Sp(X)}(H_1)=H_2$ かつ $Z_{Sp(X)}(H_2)=H_1$ をみたすこととする。

例 2.1.2 非負整数 p,q,m を考え $n=2(p+q)m$ とおき n 次元実ベクトル空間 $X=\mathbb{R}^{p+q}\otimes\mathbb{R}^{2m}$ を考える。$(\ ,\ )_{p,q}$ を $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の符号 (p,q) の非退化対称双線形形式、$\langle\ ,\ \rangle_m$ を $\mathbb{R}^{2m}$ 上のシンプレクティック形式とする。すると $\langle\ ,\ \rangle=(\ ,\ )_{p,q}\otimes\langle\ ,\ \rangle_m$ は X 上のシンプレクティック形式となる。

$$O(p,q)=\{g\in GL(p+q,\mathbb{R})\mid (gv,gw)_{p,q}=(v,w)_{p,q}\quad (v,w\in\mathbb{R}^{p+q})\}$$

と定めると $O(p,q)$ および $Sp(m.\mathbb{R})$ は自然に $Sp(X)$ の部分群とみなせる。 これによって $(O(p,q),Sp(m.\mathbb{R}))$ は *reductive dual pair* になる。

ここで素朴な形で Howe duality を定式化してみる。(H_1,H_2) が reductive dual pair であるとし、$\tilde{H}_1$ および $\tilde{H}_2$ をそれぞれ H_1 および H_2 の $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ への引き戻しとする。Weil 表現 $(W,L^2(V))$ は $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ のユニタリ表現とみなせるがそれを部分群 $\tilde{H}_1\tilde{H}_2$ へ制限し既約分解することを考える。例えば H_1 がコンパクトであるような場合はこの分解は離散スペクトラムしか出てこないで

$$L^2(V)=\hat{\bigoplus_{i=0}^{\infty}}\sigma_i\otimes\tau_i$$

のように分解する。ここで σ_i および τ_i はそれぞれ $\tilde{H}_1$ および $\tilde{H}_2$ の既約ユニタリ表現である。この状況設定において Howe duality の主張することは $\sigma_i\ \ (i=0,1,2,...)$ および $\tau_i\ \ (i=0,1,2,...)$ が互いに同型にならないということである。 このことにより Weil 表現の分解を通じて $\tilde{H}_1$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合の部分集合と $\tilde{H}_2$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合の部分集合の間の一対一対応が得られたことになる。 この対応は Howe 対応あるいは Theta lifting などと言われる。 もちろん $\tilde{H}_1$ がコンパクトでない場合は上の既約分解は一般的には連続スペクトラ

ムが出てくるのであるがその場合も Howe duality はしかるべく定式化はできる。しかしながら、ユニタリ表現としての Weil 表現の分解を考えるという定式化は不徹底であり、適切に定式化することによりより広い既約ユニタリ表現の集合の間の一対一対応が得られる。そのためには reductive 群の表現論の代数化の理論 (Harish-Chandra 加群）が必要になる。

2.2 Harish-Chandra 加群

ここでは G を実 reductive 群としその極大コンパクト部分群を一つ固定し K とおく。$\mathfrak{g}_0$ および $\mathfrak{k}_0$ をそれぞれ G および K のリー代数とし $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{k}$ をそれらの複素化とする。また $U(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数を表す。 また $K^\wedge$ で K の既約連続表現の同型類を表す。

定義 2.2.1 *1.* 複素ベクトル空間 V を表現空間とする K の表現 (π, V) が代数的 K-加群であるとは任意の $v \in V$ に対して v を含む有限次元部分 K-表現が存在しその部分表現は K の連続表現になることととする。したがって微分表現を考えることができ、V は $U(\mathfrak{k})$-加群の構造も持つ。

2. 代数的 K-加群 V および $\delta \in K^\wedge$ に対して V の δ-*isotypical component* $V(\delta)$ を

$$V(\delta) = \sum_{\varphi \in Hom_K(\delta, V)} Im(\varphi)$$

で定める。 すると $V = \bigoplus_{\delta \in K^\wedge} V(\delta)$ となる。

3. 代数的 K-加群 V が *admissible* であるとは任意の $\delta \in K^\wedge$ に対して $\dim V(\delta) < \infty$ となることとする。

4. V が $(\mathfrak{g}, K)$-加群であるとは、以下の条件を満たすこととする。

(a) V は $U(\mathfrak{g})$-加群と代数的 K-加群の構造を併せ持つ。

(b) $k \in K,\ X \in \mathfrak{g},\ v \in V$ に対して $k \cdot X \cdot k^{-1} \cdot v = (Ad(k)X) \cdot v$ が成り立つ。

(c) 代数的 K-加群の微分表現として得られる $U(\mathfrak{k})$-加群の構造は $U(\mathfrak{g})$-加群構造の制限として得られる $U(\mathfrak{k})$-加群の構造に一致する。

5. 有限の長さを持つ $(\mathfrak{g}, K)$-加群を *Harish-Chandra* 加群という。*Harsh-Chandra* 加群は常に *admissible* である。

Harish-Chandra 加群と G の無限次元表現の間には以下のような関係がある。

定義 2.2.2 (π, H) を G の連続 *Hilbert* 表現とする。

1. H の K-*finite part* H_K を H の有限次元 K-部分表現全てで生成される H の部分空間として定める。 H_K は自然に代数的 K-加群の構造が入る。

2. H_K が *admissible* であるとき (π, H) は *admissible* であるという。*admissible* な連続 *Hilbert* 表現 (π, H) に対しては、任意の $v \in H_K$ と $X \in \mathfrak{g}_0$ に対して $\pi(\exp(tX))v$ は $t = 0$ において無限回微分可能であり、特に
$$Xv = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))v|_{t=0}$$
と定めると $Xv \in H_K$ が成り立ち H_K には *admissible* $(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造が自然に入る。

定理 2.2.3 1. 既約ユニタリ表現は全て *admissible* である。

2. *admissible* な連続 *Hilbert* 表現 (π, H) が既約であることの必要十分条件は $(\mathfrak{g}, K)$-加群 H_K が既約であることである。

3. 任意の既約 *Harish-Chandra* 加群 V に対してある *admissible Hilbert* 表現 (π, H) が存在して $(\mathfrak{g}, K)$-加群として V と H_K は同型になる。

注意 2.2.4 1. *admissible* でない既約連続 *Hilbert* 表現が存在するかどうかは不明である。*admissible* でない既約連続 *Banach* 表現は存在することが知られている。ただしこのような表現の調和解析における意義は不明である。(例えば *Paley-Wiener* の定理などの定式化に必要なのは *admissible* な表現のみである。)

2. 既約 *Harish-Chandra* 加群 V に対して $V \cong H_K$ となる *admissible Hilbert* 表現 (π, H) は一般には一意であるとは限らない。 しかし調和解析からの観点によるとそのような表現は同一視すべきものであることが知られている。

2.3 Fock model

transversal な $V, V' \in \mathcal{L}(X)$ および V の基底 $v_1, ..., v_n$ も固定し、これを用いて V の Haar 測度 dv を考え、それによって 2 乗可積分関数の空間 $L^2(V)$ を定める。$V_{\mathbb{C}}$ を V の複素化とする。ここで 1.3 のように V の基底 $v_1, ..., v_n$ に対応する V' の双対基底 $w_1, ..., w_n$ を取りシンプレクティック基底 $v_1, ..., v_n, w_1, .., w_n$ によって $\mathrm{Sp}(X)$ の元を行列表示し $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ を考える。この σ の作用を imaginary unit $\sqrt{-1}$ の作用と見做して X に複素ベクトル空間の構造が入る。すると $v_1, ..., v_n$ は X の複素ベクトル空間としての基底になるのでこれによって X と $V_{\mathbb{C}}$ を同一視すること

ができる。$H(\ ,\ )$ および $(\ ,\ )$ を $v_1, ..., v_n$ を正規直交基底とする $V_{\mathbb{C}}$ 上の Hermite 内積および非退化対称双線形形式とする。ここで

$$K = \{g \in \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}}) \mid H(gv, gw) = H(v, w) \quad (v, w \in V_{\mathbb{C}})\}$$

とおくと $H(\ ,\ )$ の虚部は X のシンプレクティック内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に一致するので K は $\mathrm{Sp}(X)$ の部分群になる。実は K は $\mathrm{Sp}(X)$ の極大コンパクト部分群になっている。$\tilde{K}$ を K の $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ への引き戻しとする。

上で構成された Weil 表現は $L^2(V)$ 上に実現されていた (Schödinger model)。この構成においてはすでに見たとおり $\tilde{L}$ の作用は見やすいが $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ の極大コンパクト部分群である $\tilde{K}$ の作用はわかりにくい。 したがって $\tilde{K}$-finite part がわかりやすい Weil 表現の実現として Fock model を考える。

$(z_1, ..., z_n)$ を基底 $v_1, ..., v_n$ に対応する $V_{\mathbb{C}}$ の複素座標とし、$dz = dz_1 \wedge ... \wedge dz_n$, $d\bar{z} = d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_n$ とおくと $dz \wedge d\bar{z}$ は $V_{\mathbb{C}}$ 上の Haar 測度を定める。

定義 2.3.1 *(Fock space)*

$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ で $V_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数全体の作る複素ベクトル空間を表す。 *Fock* 空間 $\mathfrak{F}$ を以下のように定める。

$$\mathfrak{F} = \left\{ f \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, \int_{V_{\mathbb{C}}} |f(z)|^2 e^{-\pi H(z,z)} dz \wedge d\bar{z} < \infty \right\}$$

すると $\mathfrak{F}$ には $\int_{V_{\mathbb{C}}} |f(z)|^2 e^{-\pi H(z,z)} dz \wedge d\bar{z}$ をノルムの *2* 乗とする *Hilbert* 空間の構造が入る。

定理 2.3.2 *(Bargman cf. [F])*

線形作用素 $B : L^2(V) \to \mathfrak{F}$ を

$$B\varphi(z) = \int_V \varphi(x) e^{\pi(2(x,z)-(x,x)-1/2(z,z))} dx$$

で定めると適当な定数倍を乗じて正規化すると $L^2(V)$ と $\mathfrak{F}$ の間の *isometry* が得られる。

この結果により $\mathcal{F}$ を Weil 表現の表現空間とみなすことができ、これを Weil 表現の Fock model という。

$\mathcal{P}$ を $V_{\mathbb{C}}$ 上の多項式関数のなす $\mathbb{C}$-代数とする。つまり $\mathcal{P} = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$. すると $\mathcal{P}$ は $\mathfrak{F}$ の部分空間になる。また非負整数 k に対して k 次同次成分 $\mathcal{P}^k = \{f \in \mathcal{P} \mid f(tv) = t^k f(v) \quad (t \in \mathbb{C}, v \in V_{\mathbb{C}})\}$ を考える。

定理 2.3.3 *Weil* 表現 $(W, \mathfrak{F})$ は *admissible* でありその $\tilde{K}$*-finite part* $\mathfrak{F}_{\tilde{K}}$ は $\mathcal{P}$ に一致する。また $\mathcal{P}$ は $\tilde{K}$-加群として重複度自由であり、

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^k$$

がその既約分解を与える。

K および $\tilde{K}$ は共通のリー代数を持つがその複素化 $\mathfrak{k}$ を考える。同様に $\mathfrak{g}$ を $\mathrm{Sp}(X)$ および $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ を共通のリー代数の複素化とする。$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{g}$ の元であって $\mathfrak{k}$ の全ての元と Killing form に関して直交するもの全体のなす部分空間とする。このとき (複素化された)Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q}$ が成り立つ。 さらに $\mathfrak{q}$ は K あるいは $\tilde{K}$ の随伴作用により不変であり、二つの互いに同型でない既約成分 $\mathfrak{q}_+,\mathfrak{q}_-$ の直和に既約分解される。

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_+ \oplus \mathfrak{q}_-.$$

定理 2.3.4 *$\omega : U(\mathfrak{g}) \to End_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ を Weil 表現の微分から得られる $U(\mathfrak{g})$-加群構造とする。z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を掛算作用素とした時、以下が成り立つ。*

1. $\omega(\mathfrak{k})$ は $\left\{ \frac{1}{2}\left(z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial z_i} z_j \right) \middle| 1 \leqslant i,j \leqslant n \right\}$ で生成される。
2. $\omega(\mathfrak{q}_+)$ は $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \middle| 1 \leqslant i,j \leqslant n \right\}$ で生成される。
3. $\omega(\mathfrak{q}_-)$ は $\{ z_i z_j | 1 \leqslant i,j \leqslant n \}$ で生成される。

系 2.3.5 非負整数 k に対して $\omega(\mathfrak{q}_+)\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^{k-2}$, $\omega(\mathfrak{q}_-)\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^{k+2}$ が成り立つ。従って、$\mathcal{P}^{even} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^{2k}$ および $\mathcal{P}^{odd} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^{2k+1}$ とすると、$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{even} \oplus \mathcal{P}^{odd}$ が $\mathcal{P}$ の既約分解を与える。

2.4 片側がコンパクトな場合 ([H1],[KV])

この節においては、(H, H') を $\mathrm{Sp}(X)$ における reductive dual pair で H がコンパクトであるようなものとする。$\mathfrak{h}$ および $\mathfrak{h}'$ をそれぞれ H および H' のリー代数の複素化とする。適当に内部自己同型で移してやると $H \subseteq K$ かつ $H' \cap K$ は H' の極大コンパクト部分群となるようにできるので以下そのように仮定する。$\mathfrak{h}'_{\pm} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}_{\pm}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{k}$, $R = H' \cap K$ とおく。

$\tilde{H}$ および $\tilde{R}$ をそれぞれ H と R の $\tilde{\mathrm{Sp}}(X)$ への引き戻しとする。これらは $\tilde{K}$ の部分群であるから $\mathcal{P}$ は代数的 $\tilde{H}$-加群および代数的 $\tilde{R}$-加群となる。したがって isotypical component を考えることができる。$\sigma \in \tilde{H}^{\wedge}$ に対して σ-isotypical component $\mathcal{P}(\sigma)$ は $\tilde{H}$-加群および $(\mathfrak{h}', \tilde{R})$-加群の構造を持つ。この構造を記述する結果の述べるために以下のような準備をする。

定義 2.4.1 *1.* $\tilde{K}$ の閉部分群 S に対して以下のように置く。

$$\mathcal{R}(S;\mathcal{P}) = \{ \sigma \in S^{\wedge} \mid \mathcal{P}(\sigma) \neq 0 \}.$$

2. 調和多項式の空間 $\mathcal{H}(H)$ を以下のように定める。

$$\mathcal{H}(H) = \{ f \in \mathcal{P} \mid \omega(Y)f = 0 \ \ (Y \in \mathfrak{h}'_+) \}.$$

3. $\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P})$ に対して

$$deg(\sigma) = \min\{k \mid \mathcal{P}^k \cap \mathcal{P}(\sigma) \neq 0\}$$

と置く。

$\mathcal{H}(H)$ は代数的 $\tilde{H} \times \tilde{R}$-加群の構造を持つがそれは以下のように記述される。

命題 2.4.2 $\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P})$ に対して以下が成り立つ。

1. $\mathcal{H}(H)(\sigma) = \mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{P}^{deg(\sigma)}$. 特に $\mathcal{H}(H)(\sigma) \neq 0$ となる。
2. $\mathcal{P}(\sigma) = U(\mathfrak{h}'_-)\mathcal{H}(H)(\sigma)$.
3. $\mathcal{H}(H)(\sigma)$ は代数的 $\tilde{H} \times \tilde{R}$-加群として既約である。
4. $\psi : \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P}) \to \mathcal{R}(\tilde{R};\mathcal{P})$ なる単射写像が存在して代数的 $\tilde{H} \times \tilde{R}$-加群として $\mathcal{H}(H)(\sigma) \cong \sigma \otimes \psi(\sigma)$ となる。従って $\mathcal{H}(H)$ の以下のような既約分解を得る。

$$\mathcal{H}(H) \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P})} \sigma \otimes \psi(\sigma).$$

定義 2.4.3 *1.* $\tau \in \tilde{R}^\wedge$ に対して一般化された *Verma* 加群 $M(\tau)$ を

$$M(\tau) = U(\mathfrak{h}') \otimes_{U(\mathfrak{r}+\mathfrak{h}'_+)} \tau$$

で定める。ここで τ には $\mathfrak{h}'_+$ は 0 で作用すると定めている。すると $M(\tau)$ は *Harish-Chandra* $(\mathfrak{h}', \tilde{R})$-加群になる。

2. $M(\tau)$ の既約商 $(\mathfrak{h}', \tilde{R})$-加群は一意に定まるのでそれを $L(\tau)$ とおく。

次が本節の主定理である。

定理 2.4.4 *([H1])* $\psi : \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P}) \to \mathcal{R}(\tilde{R};\mathcal{P})$ を上記のようにとる。 すると $\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P})$ に対して

$$\mathcal{P}(\sigma) \cong \sigma \otimes L(\psi(\sigma))$$

が $\tilde{H} \times (\mathfrak{h}', \tilde{R})$-加群としてなりたつ。したがって

$$\mathcal{P} \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{H};\mathcal{P})} \sigma \otimes L(\psi(\sigma)),$$

2.5 一般の場合 ([H2])

この節においては、前節同様 (H,H') を $\mathrm{Sp}(X)$ における reductive dual pair とするが、ここでは H がコンパクトであることは仮定せず、一般の場合を考える。$\mathfrak{h}$ および $\mathfrak{h}'$ をそれぞれ H および H' のリー代数の複素化とする。内部自己同型で移すことによって $R=H\cap K$ および $R'=H'\cap K$ がそれぞれ H および H' の極大コンパクト部分群であるようにできるので以下そのように仮定する。主定理をのべるため準備をする。

定義 2.5.1 *1.* $\mathcal{R}(\mathfrak{h},\tilde{R};\mathcal{P})$ で既約 *Harish-Chandra*$(\mathfrak{h},\tilde{R})$-加群であって $\mathcal{P}$ の商加群と同型になるようなものの同型類の集合を表す。$\mathcal{R}(\mathfrak{h}',\tilde{R}';\mathcal{P})$ も同様に定義する。

2. $\rho\in\mathcal{R}(\mathfrak{h},\tilde{R};\mathcal{P})$ に対して $\mathcal{N}_\rho$ で $\mathcal{P}/\mathcal{N}\cong\rho$ となる $\mathcal{P}$ の $(\mathfrak{h},\tilde{R})$-部分加群 $\mathcal{N}$ 全ての共通部分とする。

$$\mathcal{N}_\rho=\bigcap_{\mathcal{P}/\mathcal{N}\cong\rho}\mathcal{N}.$$

次の結果は簡単な考察から得られる。

補題 2.5.2 *([H2])* $\mathcal{N}_\rho$ は $\mathcal{P}$ の $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}',\tilde{R}\tilde{R}')$-部分加群でありさらに

$$\mathcal{P}/\mathcal{N}_\rho\cong\rho\otimes\theta(\rho)$$

なる $(\mathfrak{h}',\tilde{R}')$-加群 $\theta(\rho)$ が存在する。

次が主定理である。

定理 2.5.3 *([H2])* $\rho\in\mathcal{R}(\mathfrak{h},\tilde{R};\mathcal{P})$ に対して $(\mathfrak{h}',\tilde{R}')$-加群 $\theta(\rho)$ は *quasi-simple* な *Harish-Chandra* 加群であり、しかも一意に定まる既約商加群 $\bar{\theta}(\rho)$ を持つ。よって $\bar{\theta}(\rho)\in\mathcal{R}(\mathfrak{h}',\tilde{R}';\mathcal{P})$ となる。

上記の定理において H と H' の役割を入れ替えて考えると次の結果が直ちに従う。

系 2.5.4 *(Howe duality)*
$\bar{\theta}:\mathcal{R}(\mathfrak{h},\tilde{R};\mathcal{P})\to\mathcal{R}(\mathfrak{h}',\tilde{R}';\mathcal{P})$ は全単射になる。

[H2] における主定理の証明では Howe duality の具体的な構成を完全にしたものではないので、具体的に Howe duality を具体的に記述することが問題になり多くの研究がなされている。しかし [H2] において上記定理が証明される過程において以下のような事実が使われる。このことは、Howe duality を具体的に記述しようとる時にも有用な情報を与える。

命題 2.5.5 $\rho\in\mathcal{R}(\mathfrak{h},\tilde{R};\mathcal{P})$ とし $\sigma\in\tilde{R}^\wedge$ を $\rho|_{\tilde{R}}$ に出てくる $\tilde{R}^\wedge$ の元のうち *degree* が最小なものとする。（このようなものは一意とは限らないがとにかく１つ選んで固定しておく。）すると以下の条件を満たすような $\sigma'\in\mathcal{R}(\tilde{R}';\mathcal{P})$ が一意に存在する。

1. σ' は $\theta(\rho)$ の中に現れる。しかも $\theta(\rho)$ の中に現れる $\tilde{R}'^{\wedge}$ のなかで *degree* は最小になる。

2. $deg(\sigma) = deg(\sigma')$.

3. $\mathcal{Z}_\rho = \mathcal{P}/\mathcal{N}_\rho \cong \rho \otimes \theta(\rho)$ とおく。$\sigma \otimes \sigma'$ と同型な $\mathcal{Z}_\rho$ の $\tilde{R}\tilde{R}'$-部分表現 $\mathcal{H}_{\sigma,\sigma'}$ が存在して
$$\mathcal{Z}(\sigma) = U(\mathfrak{h}')\mathcal{H}_{\sigma,\sigma'}, \mathcal{Z}(\sigma') = U(\mathfrak{h})\mathcal{H}_{\sigma,\sigma'}$$
が成り立つ。

上記命題で与えられる σ と σ' の間の対応は以下のように Joint harmonics の空間を既約分解することで得られる。このことを説明するために以下のような準備をする。

次の結果は Case-by-case analysis を用いて Howe によって見出された。

補題 2.5.6 $M = Z_{Sp(X)}(R)$ および $M' = Z_{Sp(X)}(R')$ とおくと (R, M), (R', M') はともに *reductive dual pair* になる。

R と R' はともにコンパクトであるから、(R, M), (R', M') に対しては前節で扱った結果が適用できる。たとえば調和多項式の空間 $\mathcal{H}(\tilde{R})$ および $\mathcal{H}(\tilde{R}')$ を考えることができる。これらの共通部分 $\mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}')$ は joint harmonics の空間と言われる。そこで次のように定義する。

定義 2.5.7

$$\bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P}) = \{\sigma \in \mathcal{R}(\tilde{R}; \mathcal{P}) \mid \mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') \neq 0\},$$

$$\bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}'; \mathcal{P}) = \{\tau \in \mathcal{R}(\tilde{R}'; \mathcal{P}) \mid \mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}')(\tau) \neq 0\},$$

joint harmonics の空間の既約分解については以下の結果が成り立つ。

定理 2.5.8 *([H2])*

以下の条件を満たす全単射 $\xi : \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P}) \to \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}'; \mathcal{P})$ が存在する。

1. $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して $deg(\sigma) = deg(\xi(\sigma))$ が成り立つ。

2. $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して
$$\mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') = \mathcal{H}(\tilde{R}) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}')(\xi(\sigma))$$
となる。

3. $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}(\tilde{R}; \mathcal{P})$ に対して $\tilde{R} \times \tilde{R}'$-加群として $\mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma) \cap \mathcal{H}(\tilde{R}') \cong \sigma \otimes \xi(\sigma)$ となる。

4. joint harmonics の空間の $\tilde{R}\times\tilde{R}'$-加群としての既約分解は以下で与えられる。

$$\mathcal{H}(\tilde{R})\cap\mathcal{H}(\tilde{R}') = \bigoplus_{\sigma\in\bar{\mathcal{R}}(\tilde{R};\mathcal{P})} \mathcal{H}(\tilde{R})(\sigma)\cap\mathcal{H}(\tilde{R}').$$

5. $\rho\in\mathcal{R}(\mathfrak{h},\tilde{R};\mathcal{P})$ とし $\sigma\in\tilde{R}^\wedge$ を $\rho|_{\tilde{R}}$ に出てくる $\tilde{R}^\wedge$ の元のうち *degree* が最小なものとする。すると定理 *2.5.5* における σ' は $\xi(\sigma)$ に一致する。

したがって joint harmonics の空間を調べることにより Howe 対応についての知見が得られることがわかる。、

3 文献

まず全般的に

[S] 第 4 回整数論サマースクール報告集 「Weil 表現入門」１９９６

には Weil 表現や Howe duality についての論説が多数収録されており参考になるであろう。Fourie 変換については

[T] Tate J. T. Fouriern analysis in number fields and Hecke's zeta-functions in Cassels and Fröhlich (ed.)"Algebraic Number Theory" Academic Press 1967.

Fock model については Bargman や Satake の論文があるが次の本がわかりやすい。

[F] Folland G. B. Harmoinc analysis in phase space, Annales of Mathematcs Studies, 122 Princeton University Press, Princeton NJ 1989

Weil 表現とその具体的な記述については Weil の原論文

[W] Weil, A. Sur certains groupes d'operateurs unitaires, Acta. Math. **111**,(19649, 143-211.

の他、例えば以下のような文献がある。

[Ku] Kudla, S. S. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs, Israel J. Math. **87**(1994),361-401.

[R] Ranga Rao,R. On some explicit formulqas in the theory of Weil representation, PacificJ. Math. **157**(1993), 335-371.

[LV] Lion, G. A., Vergne, M. The Weil representation, Maslov index and theta series, Progress in Mathematics, 6 Birkhäusr, Boston, MA 1980.

Weil constant については [S] に池田保氏の解説がある。

reductive dual pair の分類については、[S] に平賀郁氏の論説が収録されている。

片方がコンパクトな場合の reductive dual pair についての Howe 対応については

[H1] Howe, R. Remarks on classical invariant theory, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989),539-570.

[KV] Kashiwara, M,, Vergne, M. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Invent. Math. **44**(1978),1-47.

が基本的な文献である。これについては [S] に収録されている西山享氏の論説がよくまとまっている。

一般の場合については Howe duality を実数体の場合に確立したのが

[H2] Howe, R. Transcending classical invariant theory, J. Amer. Math. SOc. **2**(1989),535-552.

である。を具体的な状況で Howe duality を具体的に記述することを試みた研究はいろいろあるが、実数体の場合には以下のものを挙げておく。

[A] Adams, J. D. Discrete spectrum of the reductive dual pair (O(p, q), Sp($2m$)). Invent. Math. **74** (1983), 449-475.

[M] Moeglin, C. Correspondance de Howe pour les paires reductives duales: quelques calculs dans le cas archimedien, J. Funct. Anal. **85** (1989), 1-85 .

重さ半整数の Siegel モジュラー形式と Jacobi 形式

高瀬幸一　（宮城教育大学）

目 次

0 はじめに

$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$ は $(z, w) \in \mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$ に対して

$$\sigma(z, w) = (\sigma(z),\, wJ(\sigma, z)^{-1})$$

により作用する．但し

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}, \qquad J(\sigma, z) = cz + d$$

である．そこで偶数 $0 < k \in \mathbb{Z}$ をとり，$\mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 F は次のような変換公式を満たすとする；

1) 任意の $x, y \in \mathbb{Z}^n$ に対して $F(z, w+xz+y) = \mathbf{e}(-(\langle x, xz\rangle+2\langle x, w\rangle))F(z, w)$,
但し $\mathbf{e}(t) = \exp 2\pi\sqrt{-1}t$ 及び $\langle x, y\rangle = x\,{}^t y$ とする,

2) 任意の $\sigma \in Sp(n, \mathbb{Z})$ に対して $F|[\sigma]_k = F$, 但し

$$(F|[\sigma]_k)(z, w) = F(\sigma(z), wJ(\sigma, z)^{-1}) \det J(\sigma, z)^{-k}\mathbf{e}(-\langle w\,{}^t c, wJ(\sigma, z)^{-1}\rangle)$$

$(\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})$ とおく.

このとき F は次のような Fourier 展開をもつ;

$$F(z, w) = \sum_{N \in \mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z}), r \in \mathbb{Z}^n} a(N, r)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Nz) + \langle r, w\rangle).$$

ここで

$$\mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z}) = \{N \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid \mathrm{tr}(NS) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})\}.$$

F が上の変換公式 1), 2) を満たし，更に

3) $a(N, r) \neq 0$ となるのは $N - 4^{-1}\,{}^t rr \geq 0$ の場合に限る

とき，F を重さ k, index 1 の Jacobi 形式と呼び，その全体を $J_{k,1}$ と書く．$F \in J_{k,1}$ が上の条件 3) より強く

3)$'$ $a(N, r) \neq 0$ となるのは $N - 4^{-1}r\,{}^t r > 0$ の場合に限る

を満たすとき，F を Jacobi 尖点形式と呼び，その全体を $J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ と書く．$F \in J_{k,1}$ に対して，変換公式 1) は F が $w \in \mathbb{C}^n$ の関数としてはテータ関数であることを意味するから，テータ関数の基底の一次結合となる．即ち Riemann のテータ級数

$$\vartheta_{m', m''}(z, w) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle p + m'/2, (p + m'/2)z\rangle + \langle p + m'/2, w + m''/2\rangle\right)$$

$(z \in \mathfrak{H}_n, w \in \mathbb{C}^n)$ を用いて $\theta_\mu(z, w) = \vartheta_{\mu,0}(2z, 2w)$ と定義すると

$$F(z, w) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n} F_\mu(z)\theta_\mu(z, w)$$

と書ける．そこで

$$\sigma(F)(z) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n} F_\mu(4z) \qquad (z \in \mathfrak{H}_n)$$

とおく．一方,

$$\theta(z) = \vartheta_{0,0}(2z, 0) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{e}(\langle p, pz\rangle) \qquad (z \in \mathfrak{H}_n)$$

とおいて，$\mathfrak{H}_n$ 上の関数 h と $\sigma \in Sp(n,\mathbb{R})$ に対して

$$(h|[\sigma]_{k-1/2})(z) = h(\sigma(z))\frac{\theta(\sigma(z))}{\theta(z)} \det J(\sigma, z)^{-k}$$

とおく．ここで

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod 4 \right\}$$

とくと，任意の $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$\left(\frac{\theta(\sigma(z))}{\theta(z)}\right)^2 = \mathrm{sign}(\det c) \det J(\sigma, z)$$

となる．そこで $\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 h が

1) 任意の $\sigma \in \Gamma_0(4)$ に対して $h|[\gamma]_{k-1/2} = h$,
2) h は Fourier 展開 $h(z) = \displaystyle\sum_{0 \le T \in \mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z})} c(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tz)$ をもつ

を満たすとき，h を $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $k-1/2$ の Siegel モジュラー形式と呼び，その全体を $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く．条件 2) より強く

2)$'$ $c(T) \neq 0$ となるのは $T > 0$ の場合に限る

を満たすとき，h を尖点形式と呼び，その全体を $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く．さて $h \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ であって

$c(T) \neq 0$ となるのは $\exists \mu \in \mathbb{Z}^n$ s.t. $T \equiv -\,{}^t\mu\mu \pmod{4\mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z})}$
のときに限る

なるもの全体を $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書き，

$$S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) = S_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \cap M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$$

とおく．このとき Eichler-Zagier [3] ($n=1$ のとき) と Ibukiyama [10] ($n \geq 1$ のとき) により次の定理が示された；

定理 0.0.1 $F \mapsto \sigma(F)$ は $J_{k,1}$ から $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の上への複素線形同型写像で，$J^{\mathrm{cusp}}_{k,1}$ を $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対応させる．この対応は Hecke 作用素と可換である．

この講義の一つの目的は，このような対応のメカニズムを理解することである．

第 I 部
一般論

1 保型形式

1.1 保型形式の最も原始的な設定は次のように与えられるだろう；群 Γ が集合 $\mathcal{D}$ に左から作用しているとする．又，有限次元複素ベクトル空間 V と写像 $J:\Gamma\times\mathcal{D}\to GL_{\mathbb{C}}(V)$ があって

$$J(\gamma\gamma',z)=J(\gamma,\gamma'z)\circ J(\gamma',z)\qquad(\gamma,\gamma'\in\Gamma,z\in\mathcal{D})\tag{1}$$

を満たすとしよう（このような J を**保型因子**と呼ぶ）．このとき任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $F(\gamma z)=J(\gamma,z)F(z)$ $(z\in\mathcal{D})$ なる関数 $F:\mathcal{D}\to V$ を Γ に関する $\mathcal{D}$ 上の**保型形式**と呼ぶ．これだけではたいした議論は展開できないが，関係式(1) から Γ は $\mathcal{D}\times V$ に左から $\gamma(z,v)=(\gamma z,J(\gamma,z)v)$ により作用することがわかる．そこで $X=\Gamma\backslash\mathcal{D}$, $\mathcal{V}=\Gamma\backslash(\mathcal{D}\times V)$ とおけば，自然な全射

$$\pi:\mathcal{V}\to X\qquad((z,v)\pmod{\Gamma}\mapsto\dot{z}=z\pmod{\Gamma})$$

が考えられる．特に任意の $z\in\mathcal{D}$ の固定部分群 $\Gamma_z=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma z=z\}$ に対して $J(\gamma,z)=1_V$ $(\gamma\in\Gamma_z)$ であるならば，$v\mapsto(z,v)\pmod{\Gamma}$ は全単射 $V\tilde{\to}\pi^{-1}(\dot{z})$ を与えるから，$\pi:\mathcal{V}\to X$ は X 上のベクトル束を与える．このとき $F:\mathcal{D}\to V$ が Γ に関する $\mathcal{D}$ 上の保型形式であることと $\dot{z}\mapsto(z,F(z))$ $\pmod{\Gamma}$ がベクトル束 $\pi:\mathcal{V}\to X$ の大域的切断であることは同値である．このように保型形式を幾何学的な側面からとらえることができて，それが当初の保型形式の捉え方だったように思える [1].

1.2 ここでは保型形式を群論的な側面から捉えてみよう．群 G が $\mathcal{D}$ に左から推移的に作用していて，Γ は G の部分群であるとする．又，保型因子 J は G まで延長されているとする，即ち写像 $J:G\times\mathcal{D}\to GL_{\mathbb{C}}(V)$ があって

$$J(gg',z)=J(g,g'z)\circ J(g',z)\qquad(g,g'\in G,z\in\mathcal{D})\tag{2}$$

を満たすとする．原点 $o\in\mathcal{D}$ の固定部分群を $K=\{g\in G\mid go=o\}$ とすると，K の V 上の表現 δ が $\delta(k)=J(k,o)$ により定義される．そこで Γ に関する保型形式 $F:\mathcal{D}\to V$ に対して，関数 $f_F:G\to V$ を $f_F(g)=J(g,o)^{-1}F(go)$ $(g\in G)$ により定義すると

1) 任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $f_F(\gamma g)=f_F(g)$,
2) 任意の $k\in K$ に対して $f_F(gk)=\delta(k)^{-1}f_F(g)$

が成り立つ．このとき，もとの保型形式は $F(z)=J(g,o)f_F(g)$ $(z=go\in\mathcal{D},g\in G)$ により復元されるから，$\mathcal{D}$ 上の保型形式を群 G 上の関数として

捉えることができる．更に，V の共役空間を V^* として，$v \in V, \alpha \in V^*$ に対して $\langle v, \alpha \rangle = \alpha(v) \in \mathbb{C}$ とおく．K の表現 (δ, V) の反傾表現 $(\check{\delta}, V^*)$ は $\langle v, \check{\delta}(k)\alpha \rangle = \langle \delta(k^{-1})v, \alpha \rangle$ により定義される．そこで $\alpha \in V^*$ に対して $f_{F,\alpha}(g) = \langle f_F(g), \alpha \rangle$ $(g \in G)$ とおくと，任意の $k \in K$ に対して

$$f_{F,\alpha}(gk) = \langle f_F(g), \check{\delta}(k)\alpha \rangle = f_{F,\check{\delta}(k)\alpha}(g) \qquad (g \in G)$$

となる．これをもう少し表現論的な言い方をすると次のようになる；G 上の左 Γ-不変な複素数値関数のなす複素ベクトル空間 $L(\Gamma\backslash G)$ 上の G の右正則表現 ρ_r を考えると，複素線形写像

$$T : V^* \to L(\Gamma\backslash G) \qquad (\alpha \mapsto f_{F,\alpha})$$

は任意の $k \in K$ に対して $T \circ \check{\delta}(k) = \rho_r(k) \circ T$ が成り立つ．従って特に (δ, V) が K の既約表現ならば，$f_{F,\alpha}$ は K の右正則表現 $L(\Gamma\backslash G)$ の $\check{\delta}$-成分に属する．

ここまでの議論は原始的過ぎてあまり面白いこともないので，次節では少し解析的な趣向を凝らしてみよう．

2　ユニタリ表現と保型形式

2.1　まず G は局所コンパクト・ユニモジュラー群として，$K \subset G$ はコンパクト部分群とする．G の中心 $Z(G)$ の閉部分群 A をとり，G の閉部分群 Γ は A を開部分群として含むとする．従って Γ/A は離散群であり Γ はユニモジュラーである．G, K, A 上の Haar 測度 $d_G(x), d_K(k), d_A(a)$ をとり，$\displaystyle\int_K d_K(k) = 1$ と正規化しておく．G/A 上の Haar 測度 $d_{G/A}(\dot{x})$ を

$$\int_G \varphi(x) d_G(x) = \int_{G/A} d_{G/A}(\dot{x}) \int_A d_A(a)\varphi(xa) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定める[1]．更に Γ 上の Haar 測度 $d_\Gamma(\gamma)$ を

$$\int_\Gamma \varphi(\gamma) d_\Gamma(\gamma) = \sum_{\dot{\gamma} \in \Gamma/A} \int_A \varphi(\gamma a) d_A(a) \qquad (\varphi \in C_c(\Gamma))$$

が成り立つように定め，$\Gamma\backslash G$ 上の右 G-不変測度 $d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$ を

$$\int_G \varphi(x) d_G(x) = \int_{\Gamma\backslash G} d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) \int_\Gamma d_\Gamma(\gamma)\varphi(\gamma x) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定めると

$$\int_{G/A} \varphi(\dot{x}) d_{G/A}(\dot{x}) = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\dot{\gamma} \in \Gamma/A} \varphi(\dot{\gamma}\dot{x}) d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) \qquad (\varphi \in C_c(G/A))$$

が成り立つ．

[1] $C_c(G)$ は G 上の複素数値連続関数でコンパクトな台を持つもの全体である．

2.2 以下，A のユニタリ指標 χ を一つ固定しておく．又，K の既約ユニタリ表現 (δ, V_δ) を固定して，$e_\delta(k) = \dim\delta\cdot\overline{\mathrm{tr}\,\delta(k)}$ $(k\in K)$ とおく．

まず G 上の複素数値可側関数 f であって

1) 任意の $a\in A$ に対して $f(ax) = \chi(a)^{-1}f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{G/A}|f(x)|d_{G/A}(\dot{x}) < \infty$

なるものの成す複素ベクトル空間（を $\displaystyle\int_{G/A}|f(x)|d_{G/A}(\dot{x}) = 0$ なる f のなす部分空間で割った商空間）$L^1(G/A,\chi)$ は $|f| = \displaystyle\int_{G/A}|f(x)|d_{G/A}(\dot{x})$ をノルムとする複素 Banach 空間であり，更に畳込み積

$$(f*g)(x) = \int_{G/A} f(xy)g(y^{-1})d_{G/A}(\dot{y})$$

を積とし，$f\mapsto f^*$ $(f^*(x) = \overline{f(x^{-1})})$ を対合とする対合的 Banach 環である．$L^1(G/A,\chi)$ の元 f であって G 上連続かつ G/A 上の関数 $|f|(\dot{x}) = |f(x)|$ がコンパクト台なるもの全体 $C_c(G/A,\chi)$ は $L^1(G/A,\chi)$ の稠密な部分代数となる．特に $L^1(G)$ は対合的 Banach 環であり $C_c(G)$ は $L^1(G)$ の稠密な部分代数である．又，$f\in C_c(G)$ に対して $f_\chi(x) = \displaystyle\int_A f(ax)\chi(a)d_A(a)$ $(x\in G)$ は $C_c(G/A,\chi)$ の元を与え $|f_\chi|\le|f|$ かつ $f\mapsto f_\chi$ は全射 $C_c(G)\to C_c(G/A,\chi)$ を与えるから，連続に延長することにより全射 $L^1(G)\to L^1(G/A,\chi)$ $(f\mapsto f_\chi)$ が定義される．

さて G のユニタリ表現 (σ, E) に対して，$\sigma|_A = \chi$ とすると，$f\in L^1(G/A,\chi)$ と任意の $u,v\in E$ に対して

$$(\sigma(f)u,v) = \int_{G/A} f(x)(\sigma(x)u,v)d_{G/A}(\dot{x})$$

なる E 上の有界作用素 $\sigma(f)$ が定まる．このとき $f\mapsto\sigma(f)$ は対合的 Banach 環 $L^1(G/A,\chi)$ の表現となる．

次に $e_\delta * f = f * e_\delta = f$ なる $f\in L^1(G/A,\chi)$ の全体 $L^1(G/A,\chi;\delta)$ は $L^1(G/A,\chi)$ の部分代数となる．ここで

$$\begin{aligned}(e_\delta * f)(x) &= \int_K e_\delta(k)f(k^{-1}x)d_K(k),\\ (f * e_\delta)(x) &= \int_K f(xk^{-1})e_\delta(k)d_K(k) \qquad (x\in G)\end{aligned}$$

である．更に任意の $k\in K$ に対して $f(kxk^{-1}) = f(x)$ なる $f\in L^1(G/A,\chi;\delta)$ の全体 $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ は $L^1(G/A,\chi;\delta)$ の部分代数となる．

$$\begin{aligned}C_c(G/A,\chi;\delta) &= L^1(G/A,\chi;\delta)\cap C_c(G/A,\chi),\\ C_c(G/A,\chi;\delta)^o &= L^1(G/A,\chi;\delta)^o\cap C_c(G/A,\chi)\end{aligned}$$

はそれぞれ $L^1(G/A,\chi;\delta), L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ の稠密な部分代数である．$C_c(G/A,\chi;\delta)^o$ を K-**タイプ** δ **の Hecke 作用素の環**と呼ぶ．$f \in C_c(G)$ で $e_\delta * f = f * e_\delta = f$ なるもの全体を $C(G;\delta)$ とし，任意の $k \in K$ に対して $f(kxk^{-1}) = f(x)$ なる $f \in C_c(G,\delta)$ の全体を $C(G;\delta)^o$ とおくと，$f \mapsto f_\chi$ は夫々 $C_c(G,\delta), C_c(G,\delta)^o$ から $C_c(G/A,\chi;\delta), C_c(G/A,\chi;\delta)^o$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像である．ここで次の命題が基本的である；

命題 2.2.1 $L^1(G/A,\chi;\delta)$ の中心は $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ に含まれる．更に，次は同値である；

1) $\pi|_A = \chi$ なる G の任意の既約ユニタリ表現 π に対して，$\pi|_K$ における δ の重複度は 1 以下,
2) $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ は $L^1(G/A,\chi;\delta)$ の中心に一致する,
3) $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ は可換.

以下の議論では用いないが，命題2.2.1 は次のように一般化される [8, pp.12–15], [2, 3.6.2]；まず可換とも 1 をもつとも限らない $\mathbb{C}$-代数 L について，任意の r 個の元 $a_i \in L$ $(1 \le i \le r)$ に対して

$$[a_1, a_2, \cdots, a_r] = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(r)} = 0$$

となるとき，L は r-**可換** であるという．次が成り立つ；

1) L が r-可換ならば，任意の $s > r$ に対して L は s-可換である,
2) $\dim_{\mathbb{C}} L = n < \infty$ ならば L は $n+1$-可換である,
3) 複素係数 n 次正方行列のなす $\mathbb{C}$-代数 $M_n(\mathbb{C})$ が r-可換となる最小の r を $r(n)$ とすると，$r(n) \ge n$ である,
4) $r(n+1) - r(n) > 1$ である.

これを用いて次の命題が示される；

命題 2.2.2 $1 < n \in \mathbb{Z}$ に対して次は同値である；

1) $\pi|_A = \chi$ なる G の任意の既約ユニタリ表現 π にたいして，$\pi|_K$ における δ の重複度は n 以下,
2) $L^1(G/A,\chi;\delta)$ は n-可換.

2.3 G のユニタリ表現 π であって，それを K に制限したときに既約成分として δ を有限重複度 $(\neq 0)$ で含むとき，π を**クラス**-δ のユニタリ表現と呼び，その重複度を δ に関する π の**高さ** と呼ぶ.

(π, H_π) を δ に関する高さ r の G のユニタリ表現で $\pi|_A = \chi$ なるものとして，$H_\pi(\delta)$ を δ-成分とする．即ち H_π 上の有界作用素 $\pi(e_\delta)$ を

$$(\pi(e_\delta)u, v) = \int_K e_\delta(k)(\pi(k)u, v) d_K(k) \qquad (u, v \in H_\pi)$$

により定義すれば，$u \mapsto \pi(e_\delta)u$ が直交射影 $H_\pi \to H_\pi(\delta)$ を与える．このとき有界連続関数

$$\Phi_{\pi,\delta} : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H_\pi(\delta)), \qquad \psi_{\pi,\delta} : G \to \mathbb{C}$$

を

$$\Phi_{\pi,\delta}(x) = \pi(e_\delta)\circ\pi(x)|_{H_\pi(\delta)}, \qquad \psi_{\pi,\delta}(x) = (\dim\delta)^{-1}\mathrm{tr}\,\Phi_{\pi,\delta}(x) \qquad (x \in G)$$

により定義する．$\Phi_{\pi,\delta}$ を (π, H_π) に付随する K-タイプ δ の**球関数**と呼び，$\psi_{\pi,\delta}$ を π に付随する K-タイプ δ の**球跡関数**と呼ぶ．定義から

$$\Phi_{\pi,\delta}(kxk') = \pi(k)\circ\Phi_{\pi,\delta}(x)\circ\pi(k') \qquad (k, k' \in K)$$

である．又，任意の $k \in K$ に対して $\psi_{\pi,\delta}(kxk^{-1}) = \psi_{\pi\,delta}(x)$ かつ $\overline{e_\delta}*\psi_{\pi,\delta} = \psi_{\pi,\delta}*\overline{e_\delta} = \psi_{\pi,\delta}$ である．$f \in L^1(G/a,\chi;\delta)^o$ に対して $\pi(f)H_\pi(\delta) \subset H_\pi(\delta)$ で

$$\pi(f)|_{H_\pi(\delta)} = \int_{G/A} f(x)\Phi_{\pi,\delta}(x)d_{G/A}(\dot{x}) \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta))$$

である．δ に関する π の高さが r だから $H_\pi(\delta) = V_\delta^r$ なる同一視を一つ決めると $\mathrm{End}_K(H_\pi(\delta)) = M_r(\mathbb{C})$ と同一視される．この同一視によって $\pi(f)|_{H_\pi(\delta)} \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta)) = M_r(\mathbb{C})$ とみたものを $\widehat{\Phi}_{\pi,\delta}(f)$ と書くことにすると

$$\widehat{\Psi}_{\pi,\delta} : L^1(G/A,\chi;\delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}$-代数の準同型写像となる．又，$f \in L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f) = \int_{G/A} f(x)\psi_{\pi,\delta}(x)d_{G/A}(\dot{x})$$

とおくと，$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f) = \mathrm{tr}\,\widehat{\Psi}_{\pi,\delta}(f)$ である．定義から $\psi_{\pi,\delta}$ は G 上の正定値関数（即ち，任意の有限部分集合 $\{g_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset G$ に対して $(\psi_{\pi,\delta}(g_i g_j^{-1}))_{i,j=1,\cdots,n}$ は半正定値 Hermite 行列）である．更に次が成り立つ；

命題 2.3.1 (π, H_π) が既約ならば

$$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta} : C_c(G/A,\chi;\delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$$

は全射である．

これらの逆が次のように成り立つ；

定理 2.3.2 G 上の正定値連続関数 ψ に対して

1) 任意の $a \in A$ に対して $\psi(ax = \chi(a)\psi(x)$,
2) 任意の $k \in K$ に対して $\psi(kxk^{-1}) = \psi(x)$,
3) $\overline{e_\delta}*\psi = \psi*\overline{e_\delta} = \psi$,

4) $\mathbb{C}$-代数の全射準同型写像 $\Phi : L^1(G/A, \chi; \delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$ があって

$$\Phi(f^*) = \Phi(f)^*, \qquad \int_{G/A} f(x)\psi(x)d_{G/A}(\dot{x}) = \operatorname{tr}\Phi(f)$$

が任意の $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して成り立つ

ならば，δ に関する高さが r かつ $\psi = \psi_{\pi,\delta}$ なる G の既約ユニタリ表現 π が存在する．

G の既約ユニタリ表現は，それに付随する球跡関数によって決定される．即ち，

定理 2.3.3 G の既約ユニタリ表現 π, π' は共にクラス-δ かつ $\pi|_A = \pi'|_A = \chi$ であるとする．このとき π, π' がユニタリ同値である必要十分条件は $\widehat{\psi}_{\pi,\delta} = \widehat{\psi}_{\pi',\delta}$ なることである．

2.4 (π, H_π) を G の既約ユニタリ表現で，δ に関する高さが 1 で $\pi|_A = \chi$ なるものとする．このとき π に付随して G 上の保型形式を定義しよう．

まず (ρ, V_ρ) を Γ の有限次元ユニタリ表現として，誘導表現 $\pi_{r,\rho} = \mathrm{Ind}_\Gamma^G \rho$ の表現空間を $L^2(\Gamma\backslash G, \rho)$ とする．即ち

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = \rho(\gamma) f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$

なる可側関数 $f : G \to V_\rho$ のなす複素ベクトル空間（を $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) = 0$ なる f のなす部分空間で割ったもの）で，内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))_\rho d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

(有限次元複素 Hilbert 空間 V_ρ の内積を $(\ ,\ )_\rho$ とする）に関して複素 Hilbert 空間である．$x \in G$ の $f \in L^2(\Gamma\backslash G, \rho)$ への作用を $(\pi_{r,\rho}(x)f)(y) = f(yx)$ により定義する．

$L^2(\Gamma\backslash G, \rho)$ の元 f は G 上局所二乗可積分である，即ち，任意のコンパクト部分集合 $M \subset G$ に対して $\displaystyle\int_M |f(x)|^2 d_G(x) < \infty$ である．

π に付随する G 上の保型形式を定義するのに，誘導表現 $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$（$\check{\rho}$ は ρ の反傾表現）の $\check{\pi}$-成分を考えるが，それが非自明であるためには $\rho|_A = \chi$ が必要である．

以上の準備の下，$\mathrm{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$ の $\check{\pi}$-成分を K に制限したときの $\check{\delta}$-成分（ここで反傾表現を考えなくてはいけない理由は 1.2 にあるとおりである）を $L^2(\Gamma\backslash G, \check{\rho}; \check{\pi}, \check{\delta})$ とおく．この空間をある程度具体的に把握するために，Godemenet の球関数の理論を用いる．次の定理が基本的である；

定理 2.4.1 $\sigma|_A = \chi$ なる G のユニタリ表現 (σ, E) に対して，E の π-成分 $E(\pi)$ 上の K のユニタリ表現 $(\sigma|_K, E(\pi))$ の δ-成分を $E(\pi, \delta)$ とおくと

$$E(\pi, \delta) = \{u \in E \mid \sigma(f)u = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f)u \text{ for } \forall f \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o\}$$

である．

この定理を $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$ と $\check{\pi}$ に適用することを念頭に，π に付随した G 上の保型形式の空間を次のように定義する；

定義 2.4.2 連続関数 $f : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ であって条件

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = f(x) \circ \rho(\gamma)^{-1}$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k)^{-1} \circ f(x)$,
4) 任意の $\varphi \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して

$$\int_{G/A} f(xy^{-1})\varphi(y) d_{G/A}(\dot{y}) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) \cdot f(x)$$

を満たすもの全体のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ と書く．

上の定義で $A, B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ の内積を $(A, B) = \mathrm{tr}(A \circ B^*)$ により定義する．但し，$B^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\delta, V_\rho)$ を $(B^* v, u)_\rho = (v, Bu)_\delta$ $(v \in V_\delta, u \in V_\rho)$ により定義する．保型形式の空間 $\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ 上の内積を

$$(f, g) = \int_{G/A} (f(x), g(x)) d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

により定義すると，次の基本定理が得られる；

定理 2.4.3 $f \otimes \alpha \in \mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \delta) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^*$ に対して $\theta_{f\otimes\alpha} : G \to V_\rho^*$ を

$$\langle \theta_{f\otimes\alpha}(x), u \rangle = (\dim \delta)^{1/2} \langle \alpha, f(x)u \rangle \qquad (x \in G, u \in V_\rho)$$

により定義すると，$f \otimes \alpha \mapsto \theta_{f\otimes\alpha}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \tilde{\to} L^2(\Gamma\backslash G, \check{\rho}; \check{\pi}, \check{\delta})$$

に延長される．

特に $\dim \chi = 1$ の場合には，$V_\rho = \mathbb{C}$ として $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ と $A(1) \in V_\delta$ を同一視すれば，$\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G.\rho.\pi)$ は

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = \rho(\gamma)^{-1} f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|_\delta^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,

3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k)^{-1} f(x)$,

4) 任意の $\varphi \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して

$$\int_{G/A} f(xy^{-1})\varphi(y) d_{G/A}(\dot{y}) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) \cdot f(x)$$

なる連続関数 $f : G \to V_\delta$ のなす複素ベクトル空間に内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))_\delta d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

を与えた複素 Hilbert 空間である.

2.5 最後に代数群のアデール化上の保型形式を扱うための一般論を与えておく. $\mathbb{P}$ は可算添え字集合で, $p \in \mathbb{P}$ に対して G_p は局所コンパクト・ユニモジュラー群, $K_p \subset G_p$ はコンパクト部分群とする. 更に有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset \mathbb{P}$ があって, $p \in \mathbb{P}_f = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_\infty$ に対しては K_p は G_p の開部分群であるとする. 有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $x_p \in K_p$ である $(x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} G_p$ の全体を G とすれば, それは直積群 $\prod_{p\in\mathbb{P}} G_p$ の部分群である. コンパクト空間の直積空間はコンパクトだから（Tikhonov の定理）, 有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して $G_S = \prod_{p\in S} G_p \times \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus S} K_p$ は直積位相に関して局所コンパクトである. 更に有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset S' \subset \mathbb{P}$ に対して G_S は $G_{S'}$ の開部分空間となり, $G = \bigcup_{\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}} G_S$ である. そこで $V \subset G$ が開集合であることを, 全ての有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して $V \cap G_S$ が G_S の開部分集合なることと定義すれば, この位相に関して G は局所コンパクト群となる. こうして出来た局所コンパクト群 G を $\{K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する $\{G_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の**制限直積**と呼ぶ. 直積群 $K = \prod_{p\in\mathbb{P}} K_p$ は G のコンパクト部分群である. 各 $p \in \mathbb{P}$ に対して $A_p \subset Z(G_p)$ は閉部分群として, $\{A_p \cap K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する $\{A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の制限直積を A とおけば, A は自然に $Z(G)$ の閉部分群となる.

G_p 上の Haar 測度 μ_p をとり, $p \in \mathbb{P}_f$ に対しては $\mu_p(K_p) = 1$ と仮定する. 又, K_p $(p \in \mathbb{P})$ 上の Haar 測度 ν_p は $\nu_p(K_p) = 1$ と正規化しておく. 有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して, $\nu_S(K^S) = 1$ なる $K^S = \prod_{p\notin S} K_p$ 上の Haar 測度 ν_S をとり, G_S 上の Haar 測度 $\mu_S = \prod_{p\in S} \mu_p \times \nu_S$ を得る. $\operatorname{supp}\varphi \subset G_S$ なる $\varphi \in C_c(G)$ の全体を $C_{c,S}(G)$ とおくと $C_c(G) = \bigcup_{\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}} C_{c,S}(G)$ だから, G 上の Haar 測度 μ が

$$\int_G \varphi(x) d\mu(x) = \int_{G_S} \varphi(x) d\mu_S(x) \qquad (\varphi \in C_{c,S}(G))$$

により定義される．μ を Haar 測度の族 $\{\mu_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する**制限直積** と呼ぶことにする．

G/A は $(x_p)_{p\in\mathbb{P}} \pmod{A} \mapsto (x_p \pmod{A_p})_{p\in\mathbb{P}}$ により $\{G_p/A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_pA_p/A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積 ${\prod_{p\in\mathbb{P}}}' G_p/A_p$ と位相群として同型だから，この二つを同一視する．各 $p \in \mathbb{P}$ に対して A_p 上の Haar 測度 η_p を定めて，$p \notin \mathbb{P}_\infty$ に対しては $\eta_p(A_p \cap K_p) = 1$ とする．A 上の Haar 測度 η は $\{\eta_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{A_p \cap K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積としよう．更に G_p/A_p, G/A 上の Haar 測度 $\overline{\mu}_p$, $\overline{\mu}$ をそれぞれ

$$\int_{G_p} \psi(x)d\mu_p(x) = \int_{G_p/A_p} \left(\int_{A_p} \psi(xa)d\eta_p(a)\right) d\overline{\mu}_p(\dot{x}) \qquad (\psi \in C_c(G_p),$$
$$\int_{G} \varphi(x)d\mu(x) = \int_{G/A} \left(\int_{A} \varphi(xa)d\eta(a)\right) d\overline{\mu}(\dot{x}) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

となるように定めると，$\overline{\mu}$ は $\{\overline{\mu}_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_pA_p/A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積となる．

コンパクト群 K_p $(p \in \mathbb{P})$ の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の全体を $\widehat{K}_p$ と書いて，直積集合 $\prod_{p\in\mathbb{P}} \widehat{K}_p$ の元 $(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}}$ であって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $\delta_p = \mathbf{1}_{K_p}$ となるもの全体を ${\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \widehat{K}_p$ とする．$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in {\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \widehat{K}_p$ に対して，有限部部集合 $S \subset \mathbb{P}$ があって $p \notin S$ ならば $\delta_p = \mathbf{1}_{K_p}$ となるように出来る．このときコンパクト群 $\prod_{p\notin S} K_p$ の自明な 1 次元表現を $\mathbf{1}_S$ として $\otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p = (\otimes_{p\in S}\delta_p) \otimes \mathbf{1}_S$ とおくと，これは K の既約ユニタリ表現を与えて，$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p$ は ${\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \widehat{K}_p$ から $\widehat{K}$ への単射である．更に

命題 2.5.1 有限個を除いて K_p が完全非連結（即ち，単位元を含む連結成分が単位元のみからなる）とき，$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p$ は ${\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \widehat{K}_p$ から $\widehat{K}$ への全単射である．

同様に A のユニタリ指標を調べておく．$p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_\infty$ に対しては $A_p \cap K_p$ は A_p のコンパクト開部分群となるから，A_p の Pontryagin 双対群 $\widehat{A}_p$ の中で

$$L_p = (A_p \cap K_p)^\perp = \{\alpha \in \widehat{A}_p \mid \langle A_p \cap K_p, \alpha \rangle = 1\}$$

はコンパクト開部分群である．そこで $\{\widehat{A}_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{L_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積を ${\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \widehat{A}_p$ とおく．すると $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{P}} \in {\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \widehat{A}_p$ に対して $\otimes_{p\in\mathbb{P}}\alpha_p \in \widehat{A}$ が $(a_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \prod_{p\in\mathbb{P}} \alpha_p(a_p)$ により定義される．このとき

命題 2.5.2　1) $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p\in\mathbb{P}}\alpha_p$ は $\prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \widehat{A}_p$ から $\widehat{A}$ への単射連続群準同型写像である，

2) 有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて A_p が完全非連結ならば，上の写像は全射である．

$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \widehat{K}_p$ をとり $\delta = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p \in \widehat{K}$ とおく．又，$(\chi_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \widehat{A}_p$ をとり $\chi = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\chi_p \in \widehat{A}$ とおく．簡単のために $\mathcal{C}_p = C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)$, $\mathcal{H}_p = C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$ とおく．$p \in \mathbb{P}_f$ に対して，K_p は G_p のコンパクト開部分群だから，G_p における K_p の特性関数を $\varepsilon_p \in C_c(G_p)$ とおき

$$\varepsilon_{\chi,p}(x) = \int_{A_p} \varepsilon_p(xa)\chi_p(a)d\eta_p(a) \qquad (x \in G_p)$$

とおくと，$\varepsilon_{\chi,p} \in \mathcal{C}_p$ である．$\mathbb{P}_\infty$ と $\delta_p \neq \mathbf{1}_{K_p}$ 又は $\chi_p \notin L_p$ となる $p \in \mathbb{P}_f$ の全体を S_1 とすると（S_1 は有限集合である）$p \notin S_1$ に対して $\varepsilon_{\chi,p}(1) = 1$ かつ任意の $\varphi \in \mathcal{C}_p$ に対して $\varepsilon_{\chi,p} * \varphi = \varphi * \varepsilon_{\chi,p} = \varphi$ となり

$$|\varepsilon_{\chi,p}(x)| = \begin{cases} 1 & : \dot{x} \in K_pA_p/A_p, \\ 0 & : \dot{x} \notin K_pA_p/A_p \end{cases}$$

となる．有限部分集合 $S_1 \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して，$\otimes_{p\in S}\varphi_p \in \otimes_{p\in S}\mathcal{C}_p$ を G 上の関数

$$(\otimes_{p\in S}\varphi_p)(x) = \prod_{p\in S}\varphi_p(x_p) \times \prod_{p\notin S}\varepsilon_{\chi,p}(x_p) \qquad (x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G)$$

と同一視して $\otimes_{p\in S}\mathcal{C}_p$ を $L^1(G/A, \chi, \delta)$ の $\mathbb{C}$-部分代数とみなして

$$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{C}_p = \bigcup_S \otimes_{p\in S}\mathcal{C}_p \subset L^1(G/A, \chi, \delta)$$

とおく（S は $S_1 \subset S$ なる $\mathbb{P}$ の有限部分集合を走る）．同様に $L^1(G/A, \chi, \delta)^o$ の $\mathbb{C}$-部分代数 $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{H}_p = \bigcup_S \otimes_{p\in S}\mathcal{H}_p$ を定義すると次の命題が成り立つ；

命題 2.5.3 L^1-ノルムに関して，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{C}_p$ は $L^1(G/A, \chi, \delta)$ の稠密な部分空間であり，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{H}_p$ は及び $L^1(G/A, \chi, \delta)^o$ の稠密な部分空間である．

次にユニタリ表現の制限直積を考えよう．まず，複素 Hilbert 空間の無限族 $\{H_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ 及び，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて（具体的には有限部分集合 $S_0 \subset \mathbb{P}$ を除いて）$|u_p^o| = 1$ なる $u_p^o \in H_p$ が与えられたとする．一般に有限部分集合 $S \subset \mathbb{P}$ に対して，代数的なテンソル積 $\otimes_{p\in S}H_p$ 上の内積が $(\otimes_{p\in S}u_p, \otimes_{p\in S}v_p) = \prod_{p\in S}(u_p, v_p)$ により定義されるが，更に有限部分集合

$S_0 \subset S \subset T \subset \mathbb{P}$ に対して $u \mapsto u \otimes (\otimes_{p \in T \setminus S} u_p^o)$ は $\otimes_{p\in S} H_p$ から $\otimes_{p \in T} H_p$ へのユニタリ線形写像となるから，これにより $\otimes_{p\in S} H_p$ を $\otimes_{p\in T} H_p$ の部分空間と同一視して

$$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p = \bigcup_{S_0 \subset S \subset \mathbb{P}} \otimes_{p\in S} H_p$$

とおく．言い換えれば，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p$ は代数的テンソル積 $\otimes_{p\in\mathbb{P}} H_p$ の元 $\sum \otimes_{p\in\mathbb{P}} u_p$ であって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除けば $u_p = u_p^o$ となるもの全体であるから，そこには内積が $(\otimes_{p\in\mathbb{P}} u_p, \otimes_{p\in\mathbb{P}} v_p) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (u_p, v_p)$ により定義される．この内積に関する $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p$ の完備化 $\widehat{\otimes}'_{p\in\mathbb{P}} H_p$ を $\{H_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{u_p^o\}_{p\in\mathbb{P}\setminus S_0}$ に関する**制限テンソル積** と呼ぶ．次に直積群 $\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{Aut}(H_p)$ の元 $(T_p)_{p\in\mathbb{P}}$ であって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $T_p u_p^o = u_p^o$ なるもの全体を $\prod'_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{Aut}(H_p)$ とおく．$(T_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{Aut}(H_p)$ をとると，有限部分集合 $S_0 \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して $\otimes_{p\in S} T_p \in \mathrm{Aut}(\otimes_{p\in S} H_p)$ となり，更に有限部分集合 $S_0 \subset S \subset T \subset \mathbb{P}$ に対して $\otimes_{p\in S} H_p$ 上では $\otimes_{p\in T} T_p = \otimes_{p\in S} T_p$ となるから，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p \in \mathrm{Aut}(\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p)$ が $(\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p) \otimes_{p\in\mathbb{P}} u_p = \otimes_{p\in\mathbb{P}} T_p u_p$ により定義され，これを連続的に延長して $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p \in \mathrm{Aut}(\widehat{\otimes}'_{p\in\mathbb{P}} H_p)$ を得る．このとき $(T_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p$ は $\prod'_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{Aut}(H_p)$ から $\mathrm{Aut}(\widehat{\otimes}'_{p\in\mathbb{P}} H_p)$ への単射群準同型写像となる．

さてここで，各 $p \in \mathbb{P}$ に対して G_p のユニタリ表現 (π_p, H_p) があって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて（具体的には有限部分集合 $S_0 \subset \mathbb{P}$ を除いて）$\pi_p|_{K_p}$ は K_p の自明な 1 次元表現 $\mathbf{1}_{K_p}$ を重複度 1 で含むとする．このとき $p \in \mathbb{P} \setminus S_0$ に対して $|u_p^o| = 1$ なる K_p-不変ベクトル $u_p^o \in H_p$ をとって，$\{H_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{u_p^o\}_{p\in\mathbb{P}\setminus S_0}$ に関する制限テンソル積 を H とする．$x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G$ をとると，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除くと $x_p \in K_p$ となり，従って $(\pi_p(x_p))_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{Aut}(H_p)$ であるから，$\pi(x) = \otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' \pi_p(x_p) \in \mathrm{Aut}(H)$ が定義される．このとき (π, H) は G のユニタリ表現となる．K_p-不変ベクトル $u_p^o \in H_p$ は絶対値 1 の複素定数倍を除いて一意的だから，(π, H) はユニタリ同値を除いて一意的に定まる．そこでこれを $\{\pi_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限テンソル積 と呼び，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' \pi_p$ と書く．次の定理が基本的である；

定理 2.5.4 π_p が全て既約であり，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて K_p が完全非連結ならば，制限テンソル積 $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' \pi_p$ は G の既約ユニタリ表現となる．

各 $p \in \mathbb{P}$ に対して $\pi_p|_{A_p} = \chi_p$ ならば $\pi|_A = \chi$ となるが，逆に次の定理が成り立つ；

定理 2.5.5 G_p $(p \in \mathbb{P})$ は全てタイプ I であり，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $C_c(G_p/A_p, \chi_p, \mathbf{1}_{K_p})$ は可換であるとする．このとき，$\pi|_A = \chi$ なる G の既約

ユニタリ表現 (π, H) が $\delta = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p \in \widehat{K}$ $((\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{K}_p)$ なる K-タイプを含むならば，各 G_p の既約ユニタリ表現 π_p を適当に取って $\pi = \otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\pi_p$ とできる．

以上の準備の下に，制限直積上の保型形式の空間を見てみよう．G の既約ユニタリ表現 π は G_p の既約ユニタリ表現 π_p の K_p に関する制限テンソル積で

$$\delta = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p \in \widehat{K}, \qquad (\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \widehat{K}_p$$

なる K-タイプを重複度 1 で含むとする．このとき $\pi_p|_{A_p} = \chi_p \in \widehat{A}_p$ とすると，$(\chi_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{A}_p$ で，$\pi|_A = \chi = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\chi_p$ となる．ここで π_p の K_p-タイプ δ_p の球跡関数を簡単に ψ_p と書くことにする．すると $x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G$ にたいして，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $x_p \in K_p$ かつ $\delta_p = \mathbf{1}_{K_p}$ だから，$\psi_p(x_p) = 1$ となり $\psi_{\pi,\delta}(x) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \psi_p(x_p)$ $(x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G)$ である．そこで G の閉部分群 Γ は A を開部分群として含むとして，Γ の有限次元ユニタリ表現 (ρ, V_ρ) は $\rho|_A = \chi$ を満たすとする．このとき，命題 2.5.3 に注意すると，G 上の保型形式の空間 $\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ は，連続関数 $f : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ で，条件

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = f(x) \circ \rho(\gamma)^{-1}$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k^{-1}) \circ f(x)$,
4) 任意の $\varphi \in C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$ $(p \in \mathbb{P})$ に対して

$$\int_{G_p/A_p} f(xy^{-1})\varphi(y) d\overline{\mu}_p(\dot{y}) = \widehat{\psi}_p(\varphi) f(x)$$

を満たすもの全体のなす複素ベクトル空間に内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x)) d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

を与えた複素 Hilbert 空間である．このように G 上の保型形式は各「局所的な Hecke 作用素」の環 $C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$ $(p \in \mathbb{P})$ の作用によって定まり，その作用の固有値は G_p の既約ユニタリ表現 π_p を定めるのである．

3 Siegel モジュラー形式

3.1 まず有界対象領域の基本的な一般論をまとめておく．詳細は [16, Chap.2] を参照.

G は中心が有限なる連結実 Lie 群で，その Lie 環 $\mathfrak{g}$ は半単純であるとする．即ち，$\mathfrak{g}$ の Killging 形式 $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$ は $\mathfrak{g}$ 上の非退化実二次形式である．指数写像を $\exp : \mathfrak{g} \to G$ とする．

$\mathfrak{g}$ の Cartan 対合 θ（即ち，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型写像であって，$\mathfrak{g}$ 上の二次形式 $B_{\mathfrak{g}}(X, \theta X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ が負定値となるもの）を一つとり，付随する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ とする（即ち $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ はそれぞれ θ の固有値 -1, 1 の固有空間）．$\mathfrak{k}$ に対応する G の連結閉部分群 K は G の極大コンパクト部分群であり，G のコンパクト部分群は K の G-共役部分群に含まれる．実解析的多様体の同型

$$K \times \mathfrak{p} \tilde{\to} G \qquad ((k, X) \mapsto k \cdot \exp X)$$

が成り立ち，$\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\theta(k \cdot \exp X) = k \cdot \exp(-X)$ $(k \in K, X \in \mathfrak{p})$ により G の自己同型写像に延長される [7, p.480, Cor 1].

$(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$ なる $H_0 \in Z(\mathfrak{k})$ が存在すると仮定する（このとき (G, K) を **Hermite 対**と呼ぶ）．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ として

$$\mathfrak{p}^{\pm} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = \pm\sqrt{-1}X\}$$

とおくと，$\mathfrak{p}^{\pm}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Lie 部分環であり $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^{+} \oplus \mathfrak{p}^{-}$ となる．

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = 0\}$$

である．そこで $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ なる連結複素 Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$ をとり，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の連結閉部分群をそれぞれ $K_{\mathbb{C}}, P^{\pm}$ とすると，$P^{\pm}$ は可換群で

$$\exp : \mathfrak{p}^{\pm} \to P^{\pm}$$

は全射連続群準同型写像である（$\mathfrak{p}^{\pm}$ は加法群）．$[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}] \subset \mathfrak{p}^{\pm}$ だから，$P^{+}K_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}P^{-}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の部分群である．更に

命題 3.1.1 $P^{+}K_{\mathbb{C}}P^{-}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の開部分集合で，$P^{+} \times K_{\mathbb{C}} \times P^{-}$ から $G_{\mathbb{C}}$ への写像 $(p, k, q) \mapsto pkq$ は全単射である．

よって $K_{\mathbb{C}}P^{-}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の閉部分群である．ここで連続群準同型写像 $i : G \to G_{\mathbb{C}}$ があって，次を満たすと仮定する；

1) i の微分写像 $d(i) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は自然な包含写像である，
2) $i(G) \subset P^{+}K_{\mathbb{C}}P^{-}$ かつ $i^{-1}(K_{\mathbb{C}}P^{-}) = K$.

このとき自然な単射の列

$$G/K \xrightarrow{i} i(G)K_{\mathbb{C}}P^{-}/K_{\mathbb{C}}P^{-} \subset P^{+}K_{\mathbb{C}}P^{-}/K_{\mathbb{C}}P^{-} \to P^{+} \xrightarrow{\log} \mathfrak{p}^{+}$$

$(\log = \exp^{-1})$ により G/K を複素ベクトル空間 $\mathfrak{p}^{+}$ の部分集合と同一視したものを $\mathcal{D}$ としよう．即ち，$\dot{g} \in \mathcal{D} = G/K$ に対して

$$i(g) = \exp z \cdot k \cdot q \qquad (z \in \mathfrak{p}^{+}, k \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^{-})$$

としたとき $\dot{g} = z$ と同一視する．特に $\dot{1} \in \mathcal{D} = G/K$ は $0 \in \mathfrak{p}^+$ と同一視される．このとき

$$\dim \mathcal{D} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}^+$$

だから $\mathcal{D}$ は $\mathfrak{p}^+$ の連結開部分集合となる．さて $g \in G$ と $z \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$ に対して，$\exp z \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$ だから $i(g)\exp z \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$ ，よって

$$i(g)\exp z = \exp g(z) \cdot J(g,z) \cdot q \qquad (g(z) \in \mathcal{D}, J(g,z) \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^-)$$

と一意的に書ける．このとき

1) $(g,z) \mapsto g(z)$ により G は $\mathcal{D}$ に推移的に作用し K は $0 \in \mathcal{D}$ の固定部分群である，
2) 写像 $J : G \times \mathcal{D} \to K_{\mathbb{C}}$ は実解析的で，$z \in \mathcal{D}$ に関しては正則である．更に任意の $g, h \in G$, $z \in \mathcal{D}$ に対して

$$J(gh,z) = J(g,h(z))J(h,z),$$

3) 任意の $k \in K$ に対して $J(k,0) = i(k)$ であり，$z \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{p}^+$ に対して $k(z) = \mathrm{Ad}(i(k))z$ である．

J を**自然な保型因子**と呼ぶ．$K_{\mathbb{C}}$ の有限次元連続複素表現 (δ, V_δ) があれば，$J_\delta(g,z) = \delta(J(g,z))$ とおくことにより，1.2 節の意味の保型因子

$$J_\delta : G \times \mathcal{D} \to GL_{\mathbb{C}}(V)$$

が得られる．ここで更に次のことを仮定してみよう；

> $G_{\mathbb{C}}$ の位相群としての自己同型写像 $g \mapsto \overline{g}$ があって，任意の $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に対して $\overline{\exp X} = \exp(\overline{X})$ である（$X \mapsto \overline{X}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における $\mathfrak{g}$ 上の複素共役である）．

このとき $z, z' \in \mathcal{D}$ に対して，$\exp z \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$ だから $\overline{\exp z} \in i(G)K_{\mathbb{C}}P^+$, よって $i(G) \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ より $\overline{\exp z}^{-1} \cdot \exp z' \in P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ となる．そこで

$$\overline{\exp z}^{-1} \cdot \exp z' = p \cdot K(z',z)^{-1} q \qquad (p \in P^+, K(z',z) \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^-)$$

と書ける．このとき

1) $g \in G$ に対して $K(g(z'), g(z)) = J(g,z')K(z',z)\overline{J(g,z)}^{-1}$,
2) $\overline{K(z',z)} = K(z,z')^{-1}$,
3) 任意の $z \in \mathcal{D}$ に対して $K(0,z) = 1$

が成り立つ．さて $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermite 内積が $\langle X, Y \rangle = B_{\mathfrak{g}}(X, \overline{Y})$ により定義され，$k \in K_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\langle \mathrm{Ad}(k)X, Y \rangle = \langle X, \mathrm{Ad}(\overline{k})^{-1} Y \rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$$

が成り立つ．この内積に関する正規直交基底により $\mathfrak{p}^+$ 上の Lebesgue 測度 $|dz \wedge d\overline{z}|$ が定まる．$K_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{p}^+$ 上の随伴表現を $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+}$ と書くことにして

$$K_{\mathrm{Ad}}(z', z) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+}(K(z', z)), \qquad J_{\mathrm{Ad}}(g, z) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+}(J(g, z))$$

とおくと，$g \in G$ に対して $d(g(z)) \wedge d\overline{g(z)} = |\det J_{\mathrm{Ad}}(g, z)|^2 dz \wedge d\overline{z}$ だから

$$d_{\mathcal{D}}(z) = \det K_{\mathrm{Ad}}(z, z)^{-1} \cdot |dz \wedge d\overline{z}| \qquad (z \in \mathcal{D})$$

は $\mathcal{D}$ 上の G-不変測度を与える．

ここで (δ, V_δ) は $K_{\mathbb{C}}$ の連続な既約表現で，付随する K の連続既約表現 $\delta(k) = J_\delta(k, 0)$ $(k \in K)$ がユニタリ表現になるように V_δ 上の正定値 Hermite 内積 $(\,,)_\delta$ がとられているとする．即ち，任意の $k \in K_{\mathbb{C}}$ に対して $(\delta(k)u, v)_\delta = (u, \delta(\overline{k})^{-1}v)_\delta$ $(u, v \in V_\delta)$ が成り立つと仮定する．このとき誘導表現 $\pi^\delta = \mathrm{Ind}_K^G \delta$ の表現空間を E_δ としよう．即ち，E_δ は可側関数 $\varphi : G \to V_\delta$ で

1) 任意の $k \in K$ に対して $\varphi(xk) = \delta(k)^{-1}\varphi(x)$,
2) $\displaystyle\int_{G/K} \varphi(x)|_\delta^2 d_{G/K}(\dot{x}) < \infty$

なるもののなす複素ベクトル空間（を $\displaystyle\int_{G/K} |\varphi(x)|_\delta^2 d_{G/K}(\dot{x}) = 0$ なる φ のなす部分空間で割った商空間）であって，内積

$$(\varphi, \psi) = \int_{G/K} (\varphi(x), \psi(x))_\delta d_{G/K}(\dot{x})$$

に関して複素 Hilbert 空間となり，G の作用は $(\pi^\delta(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$ により定義される．G の正則離散系列表現を構成するには，表現空間 E_δ を $\mathcal{D}$ 上の関数の空間として構成することが重要である．その為に $K_\delta(z', z) = \delta(K(z', z))$ $(z, z' \in \mathcal{D})$ とおいて，可側関数 $\varphi : \mathcal{D} \to V_\delta$ で

$$\int_{\mathcal{D}} (K_\delta(z, z)^{-1}\varphi(z), \varphi(z))_\delta d_{\mathcal{D}}(z) < \infty$$

なるもののなす複素ベクトル空間（を積分が 0 なる φ のなす部分空間で割った商空間）を $L^2(\mathcal{D}, \delta)$ とおくと，これは

$$(\varphi, \psi)_\delta = \int_{\mathcal{D}} (K_\delta(z, z)^{-1}\varphi(z), \psi(z))_\delta d_{\mathcal{D}}(z)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間となる．ここで $\varphi \in L^2(\mathcal{D}, \delta)$ に対して関数 $\widehat{\varphi} : G \to V_\delta$ を

$$\widehat{\varphi}(g) = J_\delta(g, 0)^{-1}\varphi(g(0)) \qquad (g \in G)$$

により定義すると，$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型 $L^2(\mathcal{D}, \delta) \xrightarrow{\sim} E_\delta$ を与える．そこで誘導表現 $\pi^\delta = \mathrm{Ind}_K^G \delta$ の作用を，上の同型を通して $L^2(\mathcal{D}, \delta)$

に移植すれば，G の $L^2(\mathcal{D},\delta)$ 上のユニタリ表現 π_δ が

$$(\pi_\delta(g)\varphi)(z) = J_\delta(g^{-1},z)^{-1}\varphi(g^{-1}(z)) \qquad (g\in G, \varphi\in L^2(\mathcal{D},\delta))$$

により定義される．ここで $\mathcal{D}$ 上正則なる $\varphi\in L^2(\mathcal{D},\delta)$ のなす部分空間を H_δ とすると

1) H_δ は $L^2(\mathcal{D},\delta)$ の G-不変な閉部分空間である，
2) $E\subset H_\delta$ が G-不変な閉部分空間ならば $E=\{0\}$ 又は $E=H_\delta$ である．

よって $H_\delta\neq\{0\}$ ならば (π_δ,H_δ) は G の既約ユニタリ表現となるから，これを最小の K-タイプ δ の**正則離散系列表現**と呼ぶ．というのは，第一に (π_δ,H_δ) は二乗可積分表現（つまり離散系列表現）である，即ち，任意の $\varphi,\psi\in H_\delta$ に対して

$$\int_G |(\pi_\delta(x)\varphi,\psi)|^2 d_G(x) < \infty$$

である．第二に V_δ に値をとる $\mathcal{D}$ 上の多項式関数全体 $H_{\delta,\mathrm{poly}}$ は H_δ の部分空間（精確には K-有限ベクトルの全体）となるが，$\mathfrak{p}^+$ 上の複素数値多項式関数全体を $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$ とすれば，V_δ に値をもつ $\mathcal{D}$ 上の多項式関数全体は $V_\delta\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$ と同一視される．よって $K_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$ 上の表現 ρ を $(\rho(k)f)(X)=f(\mathrm{Ad}(k)^{-1}X)$ により定義して，n 次多項式のなす部分空間 $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]_n$ への制限を ρ_n とすれば，K-加群としての直和分解

$$H_{\delta,\mathrm{poly}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\delta\otimes\rho_n$$

をもつ．ここで $\delta\otimes\rho_0=\delta$ であり，$n>0$ ならば $\delta\otimes\rho_n$ の既約成分に δ と同型な表現は現れない．従って δ は $\pi_\delta|_K$ に重複度 1 で含まれ，π_δ のその他の K-タイプは δ より “大きい”．H_δ の δ-成分 $H_\delta(\delta)$ を V_δ と同一視すれば，π_δ の K-タイプ δ の球関数は

$$\Phi_{\pi_\delta,\delta}(g) = J_\delta(g^{-1},0)^{-1} \qquad (g\in G)$$

である．$H_\delta\neq\{0\}$ となる必要十分条件は次のように与えられる．まず $H_0\in Z(\mathfrak{k})$ の存在から，$\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環でもあることがいえる．そこで，$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のルート系を Φ とおくと

$$\Phi\subset\sqrt{-1}\mathfrak{t}^* = \{\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\mathfrak{t}_{\mathbb{C}},\mathbb{C}) \mid \alpha(\mathfrak{k})\subset\sqrt{-1}\mathbb{R}\}$$

である．実ベクトル空間 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ の内積 $(\,,\,)$ は Φ の Weyl 群に対して不変であるとする．

$$\Phi_c = \{\alpha\in\Phi \mid \alpha(H_0)=0\} = \{\alpha\in\Phi \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}\subset\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\},$$
$$\Phi_n^{\pm} = \{\alpha\in\Phi \mid \alpha(H_0)=\pm\sqrt{-1}\} = \{\alpha\in\Phi \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}\subset\mathfrak{p}^{\pm}\}$$

とおくと ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}$ は $\alpha \in \Phi$ のルート空間)，Φ_c は $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の（半単純部分の）ルート系だから，Φ_c の正のルート系 Φ_c^+ を定めて $\Phi^+ = \Phi_c^+ \cup \Phi_n^+$ が Φ の正のルート系をなすようにしておく．$K_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現 δ の（微分表現の）Φ_c^+ に関する最高の重みを λ として $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ とおくと

$$H_\delta \neq \{0\} \ \Leftrightarrow\ (\lambda + \rho, \alpha) < 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Phi_n^+$$

である．

3.2　　上の一般論を実斜交群に適用してみよう．後の応用を考えて，実斜交空間 (V, D)（即ち，有限次元実ベクトル空間 V 上の非退化交代形式 D ）をとり，付随する斜交群を

$$G = Sp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = D(x, y) \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

とおく．ここで $GL_{\mathbb{R}}$ は V に右から作用していることに注意する．実 Lie 群 $Sp(V)$ の Lie 環は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \mid D(xX, y) + D(x, yX) = 0 \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

であり，その Killing 形式は

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (\dim_{\mathbb{R}} V + 2)\mathrm{tr}(XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

となり，非退化だから $\mathfrak{g}$ は半単純である．

$$\mathcal{I}_V = \{I \in Sp(V) \mid I^2 = -1_V, D(xI, x) > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in V\}$$

は空集合ではなくて，$(\sigma, I) \mapsto \sigma I \sigma^{-1}$ により $Sp(V)$ は $\mathcal{I}_V$ に推移的に作用する．$I \in \mathcal{I}_V$ に対して，V 上の複素構造を $\sqrt{-1}x = xI$ $(x \in V)$ により定めた複素ベクトル空間を V_I と書くと

$$\langle x, y\rangle_I = D(xI, y) + \sqrt{-1}D(x, y) \qquad (x, y \in V)$$

は V_I 上の正定値 Hermite 形式を与える．付随するコンパクト・ユニタリ群 $U(V_I, \langle\,,\rangle_I)$ は $Sp(V)$ における $I \in \mathcal{I}_V$ の固定部分群である．

以下，$I_0 \in \mathcal{I}_V$ を一つ固定しておく．$\theta X = I_0 X I_0^{-1}$ $(X \in \mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合を与え，付随する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とすると，$\mathfrak{k}$ に対応する G の連結閉部分群が $K = U(V_{I_0}, \langle\,,\rangle_{I_0})$ である．$H_0 = -\frac{1}{2}I_0 \in Z(\mathfrak{k})$ で $(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$ となるから，(G, K) は Hermite 対である．$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおいて，D を複素双線形に延長して複素斜交空間 $(V_{\mathbb{C}}, D)$ を考える．$G_{\mathbb{C}} = Sp(V_{\mathbb{C}})$ とおいて $i : G \to G_{\mathbb{C}}$ を複素線形延長による自然な包含写像とすると，上で述べた一般論が適用できることを，少し具体的な計算を含めて見てみよう．

$$W^{\pm} = \{x \in V_{\mathbb{C}} \mid xI_0 = \pm\sqrt{-1}x\}$$

とおくと，$V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ かつ $D(W^-, W^-) = D(W^+, W^+) = 0$ であるから

$$\langle\, , \rangle : W^- \times W^+ \ni (x, y) \mapsto D(x, y) \in \mathbb{C}$$

は非退化な pairing を与える．よって $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ に対して ${}^t b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ が

$$\langle x, y\, {}^t b\rangle = \langle xb, y\rangle \text{ for } \forall x, y \in W^-$$

により定義され，$d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+)$ に対して ${}^t d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ が

$$\langle x\, {}^t d, y\rangle = \langle x, yd\rangle \text{ for } \forall x \in W^-, y \in W^+$$

により定義される．$c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ に対する ${}^t c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ 及び $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ に対する ${}^t a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ も同様に定義する．直和分解 $V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ に応じて $\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-), & b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \\ c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-), & d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \end{matrix}$$

と表す．即ち $(x, y)\sigma = (xa + yc, ab + yd)$ $(x \in W^-, y \in W^+)$ とおく．$V_{\mathbb{C}}$ における V 上の複素共役を $x \mapsto \overline{x}$ とおく．部分空間 $W \subset V_{\mathbb{C}}$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V_{\mathbb{C}})$ に対して $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{W}, V_{\mathbb{C}})$ を $\overline{f}(x) = \overline{f(\overline{x})}$ $(x \in \overline{W})$ により定義する．特に $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ に対して $\overline{f} = \begin{pmatrix} \overline{d} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ である．よって

$$Sp(V) = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \mid \overline{\sigma} = \sigma\} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{d} & \overline{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \right\}$$

である．

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \right\}, \\ \mathfrak{p}^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \right\}, \\ \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} &= \left\{ \begin{pmatrix} -{}^t d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}, \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) &= \{b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid {}^t b = b\}, \\ \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) &= \{c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \mid {}^t c = c\} \end{aligned}$$

である．よって

$$P^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \right\},$$
$$P^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \right\}$$

となり，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の連結閉部分群は

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

である．$x \mapsto \dfrac{1}{2}(x - xI_0 \otimes \sqrt{-1})$ は複素ベクトル空間の同型 $V_{I_0} \tilde{\to} W^+$ を与え，これにより V_{I_0} 上の Hermite 形式 $\langle\,,\rangle_{I_0}$ を W^+ じょうで見ると

$$\langle x, y\rangle_{I_0} = 2\sqrt{-1}D(x, \overline{y}) = -2\sqrt{-1}\langle \overline{y}, x\rangle \qquad (x, y \in W^+)$$

となるから

$$K = K_{\mathbb{C}} \cap Sp(V) = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in U(W^+, \langle\,,\rangle_{I_0}) \right\}$$

となる．

$$P^+K_{\mathbb{C}}P^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

となり，これは $G_{\mathbb{C}} = Sp(V_{\mathbb{C}})$ の開部分集合で $G = Sp(V)$ を含み $G \cap K_{\mathbb{C}}P^- = K$ である．そこで 3.1 節の一般論を適用して $\mathcal{I}_V = G/K$ を $\mathfrak{p}^+$ の開部分集合と同一視したものを $\mathcal{D}_V$ とおく．$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}^+$ と $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ を同一視して，$\mathcal{D}_V \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ としよう．直接計算して $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V)$ と $z \in \mathcal{D}_V \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ に対して

$$\sigma(z) = (az+b)(cz+d)^{-1} \in \mathcal{D}_V, \quad J(\sigma, z) = \begin{pmatrix} {}^t(cz+d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz+d \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$$

となることがわかる．ここから

$$\mathcal{D}_V = \{z \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid 1_{W^+} - \overline{z} \cdot z \in \mathrm{Her}^+(W^+)\}$$

であることがわかる．ここで

$$\mathrm{Her}(W^+) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \mid \langle xT, y\rangle_{I_0} = \langle x, yT\rangle_{I_0} \text{ for } \forall x, y \in W^+\},$$
$$\mathrm{Her}^+(W^)) = \{T \in \mathrm{Her}(W^+) \mid \langle xT, x\rangle_{I_0} > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in W^+\}$$

とおいた．更に

$$K(z',z)=\begin{pmatrix}1-z'\overline{z} & 0\\ 0 & (1-\overline{z}z')^{-1}\end{pmatrix}\qquad (z,z'\in\mathcal{D}_V\subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+))$$

となる．さて斜交空間 (V,D) の**偏極** [2]$V=W'\oplus W$ を一つ定めておく．$\sigma\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ を直和分解 $V_{\mathbb{C}}=W'_{\mathbb{C}}\oplus W_{\mathbb{C}}$ に応じて

$$\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad (a\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}),b\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\ \text{etc.})$$

と書くことにする．又，非退化な pairing

$$\langle\,,\rangle: W'\times W\ni(x,y)\mapsto D(x,y)\in\mathbb{R}$$

を用いて，例えば $b\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W',W)$ に対して ${}^tb\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W',W)$ を $\langle x\,{}^tb,y\rangle=\langle x,yb\rangle$ $(\forall x,y\in W')$ により定義し，$d\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ に対して ${}^td\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W')$ を $\langle x\,{}^td,y\rangle=\langle x,yd\rangle$ $(\forall x\in W',y\in W)$ により定義する．さて $W^-\rho=W'_{\mathbb{C}}$ かつ $W^+\rho=W_{\mathbb{C}}$ なる $\rho\in Sp(V_{\mathbb{C}})$ が存在するから，それを一つ固定しておく．$\widehat{\mathfrak{p}}^{\pm}=\mathrm{Ad}(\rho^{-1})\mathfrak{p}^{\pm}$ とおくと

$$\widehat{\mathfrak{p}}^{+}=\left\{\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}\;\middle|\; b\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\right\},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}^{-}=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}\;\middle|\; c\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}},W'_{\mathbb{C}})\right\}$$

となる．そこで

$$\widehat{P}^{+}=\rho^{-1}P^{+}\rho,\qquad \widehat{P}^{-}=\rho^{-1}P^{-}\rho,\qquad \widehat{K}_{\mathbb{C}}=\rho^{-1}K_{\mathbb{C}}\rho$$

とおくと，$X\mapsto\exp X$ は $\widehat{\mathfrak{p}}^{+}=\mathrm{Ad}(\rho)\mathfrak{p}^{+}$ から $\widehat{P}^{+}$ への全単射で

$$\widehat{K}_{\mathbb{C}}=\left\{\begin{bmatrix}{}^td^{-1} & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\;\middle|\; d\in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})\right\},$$
$$\widehat{P}^{+}=\left\{\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\;\middle|\; b\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W'_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\right\},$$
$$\widehat{P}^{+}\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^{-}=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in Sp(V_{\mathbb{C}})\;\middle|\; d\in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})\right\}$$

[2]任煮の $x,y\in W$ に対して $D(x,y)=0$ なる部分空間 $W\subset V$ で次元が最大のものを V の Lagrange 部分空間と呼ぶ．$W\subset V$ が Lagrange 部分空間ならば $\dim_{\mathbb{R}}W=\dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}V$ であり，V の Lagrange 部分空間全体に $Sp(V)$ は推移的に作用する．Lagrange 部分空間 $W,W'\subset V$ に対して $V=W'\oplus W$ となるとき，これを斜交空間 (V,D) の偏極と呼ぶ．このとき Lagrange 部分空間の対 (W,W') に $\sigma\in Sp(V)$ は $(W,W')\cdot\sigma=(W\sigma,W'\sigma)$ により推移的に作用する．

となる．ここで $\rho Sp(V) \subset P^+ K_{\mathbb{C}} P^-$ が言えるから $Sp(V)\rho \subset \widehat{P}^+ \widehat{K}_{\mathbb{C}} \widehat{P}^-$ となる．そこで $z \in \mathcal{D}_V \subset \mathfrak{p}^+$ に対して $\exp z \in Sp(V) K_{\mathbb{C}} P^-$ だから，

$$\exp z \cdot \rho \in Sp(V)\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^- \subset \widehat{P}^+\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^-$$

となる．よって $\exp z \cdot \rho = \exp \widehat{z} \cdot k \cdot q$ $(\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+, k \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}^-)$ とおいて

$$\mathfrak{H}_V = \{\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+ \mid z \in \mathcal{D}_V\} \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})\}$$

とおく．但し $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ と $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+$ を同一視している．$z \mapsto \widehat{z}$ を ρ に関する **Cayley 変換**と呼ぶ．$\sigma \in Sp(V)$ と $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して，$\exp z \in Sp(V)\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^-$ だから

$$\sigma \exp z = \exp \sigma(z) \cdot J(\sigma, z) \cdot q \qquad (\sigma(z) \in \mathfrak{H}_V, J(\sigma, z) \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}^-)$$

と書けて，$(\sigma, z) \mapsto \sigma(z)$ により $Sp(V)$ は $\mathfrak{H}_V$ に作用する．具体的に計算すれば $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ に対して

$$\sigma(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}, \qquad J(\sigma, z) = \begin{bmatrix} {}^t(cz+d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz+d \end{bmatrix}$$

となり

$$\mathfrak{H}_V = \{z \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}\, z \in \mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W', W)\}$$

であり，更に $Sp(V)$ の $\mathfrak{H}_V$ への作用は推移的であることがわかる．但し

$$\mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W', W) = \{T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W) \mid \langle x, xT\rangle > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in W'\}$$

とする．$z \in \mathfrak{H}_V$ に対して $W_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermite 形式が

$$\langle v, w\rangle_z = D(v(\mathrm{Im}\, z)^{-1}, \overline{w}) \qquad (v, w \in W_{\mathbb{C}})$$

により定義され，付随するユニタリ群と $z \in \mathfrak{H}_V$ の固定部分群が同型となる；

$$\{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(z) = z\} \tilde{\to} U(W_{\mathbb{C}}, \langle\, ,\rangle_z) \qquad (\sigma \mapsto J(\sigma, z)|_{W_{\mathbb{C}}}).$$

特に $K = \{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(\widehat{0}) = \widehat{0}\}$ である．

3.3 古典的な Siegel モジュラー形式について簡単に復習しておく．詳細は [6] を参照．

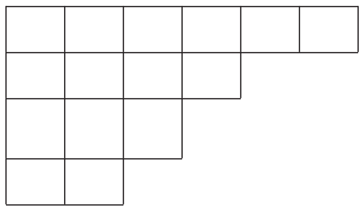
$\mathbb{Q}$ 上の斜交空間 $(V_{\mathbb{Q}}, D)$ とその偏極 $V_{\mathbb{Q}} = W'_{\mathbb{Q}} \oplus W_{\mathbb{Q}}$ があって，$V = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, W' = W'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, W = W_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ であるとする．部分群 $\Gamma \subset Sp(V_{\mathbb{Q}})$ は**数論的部分群**とする．即ち，$V_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}}$ があって Γ は

$$Sp(\Lambda) = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}}) \mid \Lambda\sigma = \Lambda\}$$

と**通約的**[3]であるとする．$\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ ならば，十分大きな $0 < N \in \mathbb{Z}$ に対して

$$Sp(\Lambda, N) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid x\gamma \equiv x \pmod{N \cdot \Lambda} \text{ for } \forall x \in \Lambda\}$$

は Γ に含まれるから，$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ の場合にもこれを仮定しよう．(ρ, V_ρ) を Γ に有限次元ユニタリ表現として $\operatorname{Ker}\rho$ は Γ の指数有限の部分群であると仮定する．$\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ を同一視して，(δ, V_δ) を $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現で Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応しているとして，$m_n > 0$ と仮定する．$J_\delta(\sigma, z) = \delta(J(\sigma, z))$ $(\sigma \in Sp(V), z \in \mathfrak{H}_V)$ とおいて，$k \mapsto J_\delta(k, \widehat{0})$ が K の既約ユニタリ表現となるように V_δ 上の Hermite 内積を定める[4]．表現空間 V_ρ, V_δ における Hermite 内積をそれぞれ $(\ ,\ )_\rho, (\ ,\ )_\delta$ とすると，任意の $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ に対して

$$(Tu, v)_\delta = (u, T^* v)_\rho \text{ for } \forall u, \in V_\rho, v \in V_\delta$$

なる $T^* \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\delta, V_\rho)$ が唯一定まるから，複素ベクトル空間 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ における Hermite 内積を $(S, T)_{\rho,\delta} = \operatorname{tr}(S \circ T^*)$ により定義する．さて正則関数

$$F : \mathfrak{H}_V \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$$

であって

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $F(\gamma z) = J_\delta(\gamma, z) \circ F(z) \circ \rho(\gamma)^{-1}$,
2) 任意の $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}})$ と任意の $y_0 \in \operatorname{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$ に対して $|F^\sigma(z)|$ は $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \operatorname{Im} z \geq y_0\}$ で有界

の二条件が成り立つとき，F を Γ に関して表現 ρ をもった重さ δ の（或いは簡単に (δ, ρ)-型の）**Siegel モジュラー形式**と呼ぶ．ここで $J_\delta(\sigma, z) = \delta(J(\sigma, z))$

---

[3]群 G の部分群 A, B に対して，群指数が $(A : A \cap B) < \infty$ かつ $(B : A \cap B) < \infty$ であるとき，A と B は通約的であるという．

[4]$k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K$ に対して $\operatorname{Im}\widehat{0} = \operatorname{Im} k(\widehat{0}) = {}^t\overline{(c\widehat{0}+d)}^{-1} \operatorname{Im}\widehat{0} \cdot (c\widehat{0}+d)^{-1}$ より

$$\delta(c\widehat{0}+d)^* = \delta((c\widehat{0}+d)^{-1}) = \delta((\operatorname{Im}\widehat{0})^{-1}\, {}^t\overline{(c\widehat{0}+d)} \cdot \operatorname{Im}\widehat{0})$$

となるから，V_δ の Hermite 内積は

$$\delta(d)^* = \delta((\operatorname{Im}\widehat{0})^{-1}\, {}^t\overline{d} \cdot \operatorname{Im}\widehat{0}) \quad \forall d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$$

となるようにとればよい．

$(\sigma \in Sp(V), z \in \mathfrak{H}_V)$ とおき

$$F^\sigma(z) = J_\delta(\sigma, z)^{-1} \circ F(\sigma z) \qquad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおく．よく知られているように，上の条件 2) は $\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ のときには条件 1) から自動的に成り立つ（**Koecher の定理**）．(δ, ρ)-型の Siegel モジュラー形式 F に付随する $Sp(V)$ 上の関数

$$f_F(\sigma) = J_\delta(\sigma, \widehat{0})^{-1} \circ F(\sigma(\widehat{0})) \qquad (\sigma \in Sp(V))$$

が $Sp(V)$ 上の有界関数であるとき，F を Γ に関する (δ, ρ)-型の **Siegel 尖点形式**と呼ぶ．$z = \sigma(\widehat{0}) \in \mathfrak{H}_V$ $(\sigma \in Sp(V))$ に対して

$$|f_F(\sigma)|^2 = (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z) \circ F(z), F(z))_{\rho,\delta}$$

となる．F が尖点形式ならば，このとき任意の実数 $p > 0$ に対して

$$\int_{\Gamma\backslash Sp(V)} |f(\sigma)|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

である．次の定理は Satake [14] による；

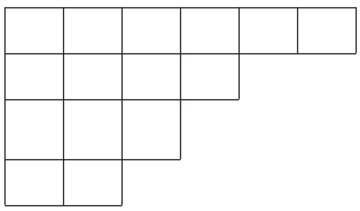
定理 3.3.1 実数 $p > 0$ に対して $pm_n \geq 2n$ とする．このとき Γ に関する (δ, ρ)-型の Siegel モジュラー形式 F に対して

$$\int_{\Gamma\backslash Sp(V)} |f_F(\sigma)|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

ならば F は尖点形式である．

Γ に関する (δ, ρ)-型の尖点形式の全体を $S_\delta(\Gamma, \rho)$ と書く．

さて 2.4 節の一般論を実斜交群に適用して，Siegel 尖点形式を表現論的にとらえてみよう．同型 $K_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ $(k \mapsto \rho k \rho^{-1})$ により $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現 (δ, V_δ) を $K_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現とみなしておく．従って $\begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+)$ を同一視すれば，δ は $GL_{\mathbb{C}}(W^+)$ の有限次元既約表現で Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応するものである．このとき最小の K-タイプ δ の正則離散系列表現が定義される（即ち $H_\delta \neq \{0\}$ となる）必要十分条件は $m_n > n$ なることである．このとき Satake の定理（定理 3.3.1）に注意すると，次の定理が示される；

定理 3.3.2 $m_n > n$ のとき，最小の K-タイプ δ の正則離散系列表現 (π_δ, H_δ) に対して，$F \mapsto f_F$ は複素ベクトル空間の同型 $S_\delta(\Gamma, \rho) \tilde{\to} \mathcal{A}_\delta(\Gamma \backslash Sp(V), \rho, \pi_\delta)$ を与える．

第II部
重さ半整数の Siegel モジュラー形式

4 Weil 表現

4.1 以下

$$\mathbb{Q}_p = \begin{cases} \text{実数体 } \mathbb{R} & : p = \infty, \\ p\text{-進数体 } \mathbb{Q}_p & : p < \infty \end{cases}, \quad \mathbb{Z}_p = \begin{cases} \text{有理整数環 } \mathbb{Z} & : p = \infty, \\ p\text{-進整数環 } \mathbb{Z}_p & : p < \infty \end{cases}$$

とする．局所コンパクト加法群 $\mathbb{Q}_p$ 上の Haar 測度 dt は

$$\begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 1 & : p = \infty, \\ \mathrm{vol}(\mathbb{Z}_p) = 1 & : p < \infty \end{cases}$$

と正規化しておく．加法群 $\mathbb{Q}_p$ の自明でないユニタリ指標 χ を一つ固定しておく．

(V, D) を $\mathbb{Q}_p$ 上の斜交空間とする．局所コンパクト加法群 V 上の Haar 測度 $d_V(x)$ は $(x, y) \mapsto \chi(D(x, y))$ に関して自己双対的であるとする．即ち V 上の Fourier 変換と逆変換が

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x)\chi(-D(x,y))d_V(x), \qquad \varphi(x) = \int_V \widehat{\varphi}(y)\chi(D(x,y))d_V(y)$$

を満たすとする．$H(V) = V \times \mathbb{Q}_p$ は群演算

$$(x, s) \cdot (y, t) = (x + y, s + t + 2^{-1}D(x, y))$$

により局所コンパクト群となる．これを斜交空間 (V, D) に付随する **Heisenberg 群** と呼ぶ．$H(V)$ の中心 $Z(H(V)) = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{Q}_p\}$ は同一視 $(0, t) = t$ により加法群 $\mathbb{Q}_p$ と同一視しておく．$d_{H(V)}(x, t) = d_V(x)dt$ は $H(V)$ の Haar 測度となり，$H(V)$ はユニモジュラーである．

斜交空間 (V, D) の Lagrange 部分空間 $W \subset V$ をとり，$H(V)$ の閉部分群 $W \times \mathbb{Q}_p$ のユニタリ指標 $\chi_W(y, t) = \chi(t)$ $(t \in \mathbb{Q}_p)$ から誘導された $H(V)$ のユニタリ表現 $(\pi_W^\chi, H_W^\chi) = \mathrm{Ind}_{W \times \mathbb{Q}_p}^{H(V)} \chi_W$ を考えよう．その表現空間 H_W^χ は

1) 任意の $g \in W \times \mathbb{Q}_p$ に対して $\varphi(gh) = \chi_W(g)\varphi(h)$,
2) $\displaystyle\int_{(W \times \mathbb{Q}_p)\backslash H(V)} |\varphi(h)|^2 d\dot{h} < \infty$

なる可測関数 $\varphi : H(V) \to \mathbb{C}$ 全体を内積

$$(\varphi, \psi) = \int_{W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V)} \varphi(h)\overline{\psi(h)}d\dot{h}$$

により複素 Hilbert 空間としたものであり，$H(V)$ の作用は $(\pi_W^\chi(h)\varphi)(g) = \varphi(gh)$ により定義される．ここで W の Haar 測度 $d_W(x)$ を一つ定めて，$(W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V)$ 上の右 $H(V)$-不変測度 $d\dot{g}$ を

$$\int_{H(V)} \varphi(h) d_{H(V)}(h) = \int_{(W \times \mathbb{Q}_p) \backslash H(V)} d\dot{g} \int_{W \times \mathbb{Q}_p} d_W(x) dt \varphi((x,t)h)$$

$(\varphi \in C_c(H(V)))$ となるように定める．大切なことは次の二つの定理である；

定理 4.1.1 (π_W^χ, H_W^χ) は Heisenberg 群 $H(V)$ の既約ユニタリ表現である．

定理 4.1.2 π が $H(V)$ のユニタリ表現であって，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$ に対して $\pi(t) = \chi(t)$ ならば，複素 Hilbert 空間 E 上の $H(V)$ の自明なユニタリ表現 $\mathbf{1}_E$ があって，π はユニタリ表現のテンソル積 $\mathbf{1}_E \otimes \pi_W^\chi$ とユニタリ同値である．

定理 4.1.2 から直ちに次の系が得られる；

系 4.1.3 π が $H(V)$ に既約ユニタリ表現で，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$ に対して $\pi(t) = \chi(t)$ ならば，π は π_W^χ とユニタリ同値である．

V の二つの Lagrange 部分空間 $W, W' \subset V$ に対して，系 4.1.3 から，(π_W^χ, H_W^χ) と $(\pi_{W'}^\chi, H_{W'}^\chi)$ は $H(V)$ のユニタリ表現としてユニタリ同値だから，その間のユニタリ同値写像を具体的に構成してみよう．まず，$W \cap W'$ 上の Haar 測度 $d_{W \cap W'}$ を一つとると，$W/(W \cap W')$ と $W'/(W \cap W')$ 上の Haar 測度

$$d_{W/(E \cap W')} = d_W / d_{W \cap W'}, \qquad d_{W'/(W \cap W')} = d_{W'} / d_{W \cap W'}$$

が定まる[5]．更に $W'/(W \cap W')$ の双対空間 $(W'/(W \cap W'))^*$ 上の Haar 測度 $d_{(W'/(W \cap W'))^*}$ として $d_{W'/(W \cap W')}$ の双対測度をとる．そこで $\mathbb{Q}_p$-線形同型写像

$$g_{W,W'} : W/(W \cap W') \tilde{\to} (W'/(W \cap W'))^*$$

を $\langle \dot{w}', g_{W,W'}(\dot{w}) \rangle = D(w, w')$ により定義して，$0 < |g_{W,W'}| \in \mathbb{R}$ を

$$d_{(W'/(W \cap W')}(g_{W,W'}(\dot{w})) = |g_{W,W'}| \cdot d_{W/(W \cap W')}(w)$$

[5]一般に局所コンパクト・ユニモジュラー群 G の閉部分群 H に対して，G, H 上の Haar 測度 $d_G(g), d_H(h)$ をとると，G/H 上の左 G-不変測度 $d_{G/H}(\dot{g})$ を

$$\int_G \varphi(g) d(g) = \int_{G/H} d_{G/H}(\dot{g}) \int_H d_H(h) \varphi(gh) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定めることかできる．このとき $d_{G/H} = d_G / d_h$ と書くことにする．

により定義すると，$|g_{W,W'}|^{1/2}d_{W'/(W\cap W')}$ は $W\cap W'$ 上の Haar 測度 $d_{W\cap W'}$ の選択に依存しなくなる．このときユニタリ写像 $T^{\chi}_{W',W} : H^{\chi}_{W} \to H^{\chi}_{W'}$ が

$$(T^{\chi}_{W',W}\varphi)(h) = \int_{W'/(W\cap W')} \varphi((w',0)h)\cdot |g_{W,W'}|^{1/2} d_{W'/(W\cap W')}(\dot{w}')$$

$(\varphi \in H^{\chi}_{W,c})$ により定義される．ここで $H^{\chi}_{W,c}$ は連続関数 $\varphi : H(V) \to \mathbb{C}$ で

1) 任意の $g \in W\times\mathbb{Q}_p$ に対して $\varphi(gh) = \chi_W(g)\varphi(h)$,
2) $\dot{h} \mapsto |\varphi(h)|$ は $W\times\mathbb{Q}_p\backslash H(V)$ 上のコンパクト台関数

なるもの全体からなる H^{χ}_{W} の稠密な部分空間である．このとき

1) $T^{\chi}_{W',W}\circ T^{\chi}_{W,W'} = T^{\chi}_{W,W} = id$,
2) 任意の $h \in H(V)$ に対して $T^{\chi}_{W',W}\circ \pi^{\chi}_{W}(h) = \pi^{\chi}_{W'}\circ T^{\chi}_{W',W}$

が成り立つ[6]．

4.2 有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間 X の双対空間を X^* として，$x\in X, \alpha \in X^*$ に対して $\langle x,\alpha\rangle = \alpha(x)$ とおくと，$V_X = X\times X^*$ は $D_X((x,\alpha),(y,\beta)) = \langle x,\beta\rangle - \langle y,\alpha\rangle$ に関して斜交空間となる．ここで自然に $X, X^* \subset V_X$ を部分空間とみなせば，これらは斜交空間 (V_X, D_X) の Lagrange 部分空間である．直和分解 $V = X\times X^*$ に関する $\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(V_X)$ のブロック分表示を $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ とする．Q を X 上の二次形式とする．即ち，関数 $Q : X \to \mathbb{Q}_p$ は

1) $\lambda\in\mathbb{Q}_p, x\in X$ に対して $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$,
2) $(x,y)\mapsto Q(x,y) = Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ $(x,y\in X)$ は $\mathbb{Q}_p$-双線形形式

を満たすとする．そこで $\widetilde{Q} \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(X,X^*)$ を

$$\langle x, y\widetilde{Q}\rangle = Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \qquad (x,y\in W)$$

により定めて $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Q} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in Sp(V_X)$ とおくと，$W_Q = X\sigma \subset V_X$ は Lagrange 部分空間となる．このとき $T^{\chi}_{X,W_Q}\circ T^{\chi}_{W_Q,X^*}$ と T^{χ}_{X,X^*} は共に $(\pi^{\chi}_{X^*}, H^{\chi}_{X^*})$ から $(\pi^{\chi}_{X}, H^{\chi}_{X})$ へのユニタリ同値写像となるから

$$T^{\chi}_{X,W_Q}\circ T^{\chi}_{W_Q,X^*} = \gamma_\chi(Q)\cdot T^{\chi}_{X,X^*}$$

なる $\gamma_\chi(Q) \in \mathbb{C}^1$ が定まる．これを二次形式 Q の **Weil 定数** と呼ぶ．X 上の二次形式 Q に対して

$$\mathrm{rad}(Q) = \{x\in X \mid \langle x, y\widetilde{Q}\rangle = 0 \text{ for } \forall y \in X\}$$

[6] $T^{\chi}_{W,W'}$ の性質と次の 4.2 節については [12] を参照のこと．

とおくと，$X/\mathrm{rad}(Q)$ 上の正則な二次形式 $Q^{\mathrm{reg}}(\dot{x}) = Q(x)$ が定まる．このとき $\gamma_\chi(Q) = \gamma_\chi(Q^{\mathrm{reg}})$ である．又，$Q \mapsto \gamma_\chi(Q)$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt 群 $W_{\mathbb{Q}_p}$ から乗法群 $\mathbb{C}^1$ への群準同型写像である．

さて $\mathbb{Q}_p$ 上の斜交空間 (V, D) をとる．三つの Lagrange 部分空間 $W_i \subset V$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して $W_1 \times W_2 \times W_3$ 上の二次形式 Q_{W_1,W_2,W_3} が

$$Q_{W_1,W_2,W_3}(w_1, w_2, w_3) = D(w_1, w_2)+D(w_2, w_3)+D(w_3, w_1) \qquad (w_i \in W_i)$$

により定義される．このとき

$$\mathrm{rad}(Q_{W_1,W_2,W_3}) = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1-w_2 \in W_3, w_2-w_3 \in W_1, w_3-w_1 \in W_2\}$$

であり，$(1, 2, 3)$ の並べ替え (i_1, i_2, i_3) に対して

$$Q_{W_{i_1},W_{i_2},W_{i_3}} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot Q_{W_1,W_2,W_3}$$

が成り立つ．更に次の定理が基本的である；

定理 4.2.1 Lagrange 部分空間 $W_i \subset V$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して

$$T^\chi_{W_1,W_2} \circ T^\chi_{W_2,W_3} \circ T^\chi_{W_3,W_1} = \gamma_\chi(Q_{W_1,W_2,W_3}) \cdot id.$$

4.3 $\mathbb{Q}_p$ 上の斜交空間 (V, D) の偏極 $V = W' \oplus W$ をとり，$x \in W', y \in W$ に対して $\langle x, y\rangle = D(x, y)$ とおく．局所コンパクト加法群 W', W 上の Haar 測度 $d_{W'}(x), d_W(y)$ は $(x, y) \mapsto \chi(\langle x, y\rangle)$ に関して自己双対的であるとする．即ち W' 上の Fourier 変換と逆変換が

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{W'} \varphi(x)\chi(-\langle x, y\rangle)d_{W'}(x), \qquad \varphi(x) = \int_W \widehat{\varphi}(y)\chi(\langle x, y\rangle)d_W(y)$$

を満たすとする．このとき $d_V(x, y) = d_{W'}(x)d_W(y)$ である．$\varphi \in L^2(W')$ に対して

$$\widetilde{\varphi}(g) = \chi\left(\nu \cdot (t + 2^{-1}\langle x, y\rangle)\right) \cdot \varphi(x) \qquad (g = ((x, y), t) \in H(V))$$

とおくと，$\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ は $L^2(W')$ から H^χ_W へのユニタリ同型写像となる．そこで誘導表現 $\mathrm{Ind}^{H(V)}_{W\times\mathbb{Q}_p}\chi_W$ を $L^2(W')$ 上に実現したものを Π_χ と書くと，その作用は $(h = ((x, y), t) \in H(V)$ と $\varphi \in L^2(W')$ に対して

$$(\Pi_\chi(h)\varphi)(w') = \chi\left(t + \langle w', y\rangle + 2^{-1}\langle x, y\rangle\right) \cdot \varphi(w' + x) \quad (w' \in W')$$

となる．$H(V)$ のユニタリ表現 $(\Pi_\chi, L^2(W'))$ を **Schrödinger 表現**と呼ぶ．同様に $H(V)$ の閉部分群 $W' \times \mathbb{Q}_p$ のユニタリ指標 $\overline{\chi}_{W'}(x, t) = \chi(t)^{-1}$ から誘導された $H(V)$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}^{H(V)}_{W'\times\mathbb{Q}_p}\overline{\chi}_{W'}$ を $L^2(W)$ 上に実現したものを $\check{\Pi}_\chi$ とおくと，その作用は $h = ((x, y), t) \in H(V)$ と $\varphi \in L^2(W)$ に対して

$$(\check{\Pi}_\chi(h)\varphi)(w) = \chi\left(-t - \langle x, w\rangle + 2^{-1}\langle x, y\rangle\right) \cdot \varphi(w - y)$$

となる．$\check{\Pi}_\chi$ は Π_χ の反傾表現である．実際，複素双線形形式

$$\langle\,,\rangle_\chi : L^2(W') \times L^2(W) \to \mathbb{C}$$

を $\varphi \in L^2(W') \cap L^1(W')$, $\psi \in L^2(W) \cap L^1(W)$ に対して

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\chi = \int_{W'} d_{W'}(w') \int_W d_W(w)\varphi(w')\psi(w)\chi(\langle w', w\rangle)$$

により定めると，任意の $h \in H(V)$, $\varphi \in L^2(W')$, $\psi \in L^2(W)$ に対して

$$\langle \Pi_\chi(h)\varphi, \psi\rangle_\chi = \langle \varphi, \check{\Pi}_\chi(h^{-1})\psi\rangle_\chi$$

が成り立つ．反傾表現 $(\check{\Pi}_\chi, L^2(W))$ も Schrödinger 表現と呼ぼう．

さて $\sigma \in Sp(V)$ は $h = (x,t) \in H(V)$ に $h^\sigma = (x\sigma, t)$ により右から作用していて，$h \mapsto h^\sigma$ は $H(V)$ の自己同型写像である．そこで $\sigma \in Sp(V)$ に対して $\Pi_\chi^\sigma(h) = \Pi_\chi(h^\sigma)$ $(h \in H(V))$ とおくと，$(\Pi_\chi^\sigma, L^2(W'))$ は $H(V)$ の既約ユニタリ表現で，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$ に対して $\Pi_\chi^\sigma(t) = \chi(t)$ となる．よって系 4.1.3 より Π_χ^σ は Π_χ とユニタリ同値となり，任意の $h \in H(V)$ に対して

$$T^{-1} \circ \Pi_\chi(h) \circ T = \Pi_\chi(h^\sigma)$$

となる $T \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ が存在する．ここで $\mathrm{Aut}(L^2(W'))$ の位相として，任意の $\varphi \in L^2(W')$ に対して $T \mapsto T\varphi$ が連続となる最弱の位相を与えると，$\mathrm{Aut}(L^2(W'))$ は Hausdorff 位相群となる．そこで直積群 $Sp(V) \times \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ の閉部分群

$$Mp(V) = \{(\sigma, T) \mid T^{-1} \circ \Pi_\chi(h) \circ T = \Pi_\chi(h^\sigma) \text{ for } \forall h \in H(V)\}$$

を考えると

$$\varpi : Mp(V) \to Sp(V) \qquad ((\sigma, T) \mapsto \sigma)$$

は $Mp(V)$ から $Sp(V)$ への全射連続群準同型写像であり，その核は定数倍写像という意味で $\mathbb{C}^1$ である．$Mp(V)$ の元を幾つか作ってみよう．まず $a \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$ に対して $\mathrm{d}(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{bmatrix} \in Sp(V)$ であり，$\mathbf{d}_0(a) \in \mathrm{Aut}(L^2(W')$ を

$$(\mathbf{d}_0(a)\varphi)(w') = |\det a|^{1/2}\varphi(w'a) \qquad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W')$$

により定義すると $\mathbf{d}(a) = (\mathrm{d}(a), \mathbf{d}_0(a)) \in Mp(V)$ であり

$$\mathbf{d} : GL_{\mathbb{Q}_p}(W') \to Mp(V)$$

は連続群準同型写像である．又，$b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(W', W)$ に対して $\mathrm{t}(b) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sp(V)$ で，$\mathbf{t}_0(b) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ を

$$(\mathbf{t}_0(b)\varphi)(w') = \chi(2^{-1}\langle w', w'b\rangle) \cdot \varphi(w') \qquad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W')$$

により定義すると $\mathbf{t}(b) = (\mathrm{t}(b), \mathbf{t}_0(b)) \in Mp(V)$ であり

$$\mathbf{t} : \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(W', W) \to Mp(V)$$

は連続群準同型写像である．又，$\mathbb{R}$-線形同型写像 $c : W \tilde{\to} W'$ に対して $\mathrm{d}'(c) = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix} \in Sp(V)$ で，$\mathbf{d}'_0(c) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ を

$$(\mathbf{d}'_0\varphi)(w') = |c|^{-1/2}\widehat{\varphi}(w'\,{}^t c^{-1}) \qquad (\varphi \in L^2(W')), w' \in W^{|prime})$$

により定義すると，$\mathbf{d}'(c) = (\mathrm{d}'(c), \mathbf{d}'_0(c)) \in Mp(V)$ である．ここで $d_{W'}(wc) = |c| d_W(w)$ により $0 < |c| \in \mathbb{R}$ を定義する．$c \mapsto \mathbf{d}'(c)$ は連続写像である．更に

$$\Omega(V) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V) \,\middle|\, c : W \tilde{\to} W' : \text{線形同型} \right\}$$

とおいて，$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(V)$ ならば $\sigma = \mathrm{t}(ac^{-1})\mathrm{d}'(c)\mathrm{t}(c^{-1}d)$ であることに注意して，

$$\mathbf{r}_0(\sigma) = \mathbf{t}_0(ac^{-1}) \circ \mathbf{d}'_0(c) \circ \mathbf{t}_0(c^{-1}d) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$$

とおけば $\mathbf{r}(\sigma) = (\sigma, \mathbf{r}_0(\sigma)) \in Mp(V)$ であり

$$\mathbf{r} : \Omega(V) \to Mp(V)$$

は連続写像である．よって $(\sigma, \lambda) \mapsto (\sigma, \lambda\mathbf{r}(\sigma))$ は $\Omega(V) \times \mathbb{C}^1$ から $Mp(V)$ の開集合 $\varpi^{-1}(\Omega(V))$ への位相同型写像となるから，$Mp(V)$ は局所コンパクト群である（[19, p.186] 参照）．更に連続群準同型写像 $\Phi : Mp(V) \to \mathbb{C}^1$ で

1) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}^1$ に対して $\Phi(1, \lambda) = \lambda^2$,
2) $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(V)$ に対して $\Phi(\mathbf{r}(\sigma)) = (|c|, -1)_2 \gamma_\chi(Q_1)^{\dim V}$

なるものが存在する．ここで $Q_1(x) = x^2$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の二次形式であり，$(a, b)_2$ は **Hilbert 記号**である[7]．$\widetilde{Sp}(V) = \mathrm{Ker}\,\Phi$ は $Mp(V)$ の閉部分群（従って局所コンパクト群）で

$$\varpi : \widetilde{Sp}(V) \to Sp(V) \qquad ((\sigma, T) \mapsto \sigma)$$

[7] $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} s + t\sqrt{a} & u + v\sqrt{a} \\ b(u - v\sqrt{a}) & s - t\sqrt{a} \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t, u, v \in \mathbb{Q}_p \right\}$$

は $M_2(\mathbb{Q}_p(\sqrt{a}))$ の $\mathbb{Q}_p$-部分代数となり，$M_2(\mathbb{Q}_p)$ と同型であるか又は $\mathbb{Q}_p$ 上の斜体となる．

$$(a, b)_2 = \begin{cases} 1 & : H \tilde{\to} M_2(\mathbb{Q}_p) \text{ のとき,} \\ -1 & : H \text{ が } \mathbb{Q}_p \text{ 上の斜体のとき} \end{cases}$$

を Hilbert 記号と呼ぶ.

連続全射群準同型写像で，その核は $\{(1,\pm 1)\}$ である．

$$\omega_\chi : \widetilde{Sp}(V) \to \mathrm{Aut}(L^2(W')) \qquad ((\sigma, T) \mapsto T)$$

は $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現を与えるから，これを **Weil 表現**と呼ぶ．後に用いるために次のことを注意しておく；$a \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$ に対して，$cW \tilde{\to} W'$ を一つとれば，$\mathbf{d}'(c)\mathbf{d}(a) = \mathbf{d}'(ca)$ だから，$\Phi(\mathbf{d}(a)) = (\det a, -1)_2$ である．ここで $\eta_\chi(a) = \gamma_\chi(Q_1)\gamma_\chi(-\det a \cdot Q_1)$ とおくと $\eta_\chi(a)^2 = (\det a, -1)_2$ となるから

$$\widetilde{\mathbf{d}}(a) = (\mathrm{d}(a), \eta_\chi(a)^{-1}\mathbf{d}(a)) \in \widetilde{Sp}(V) \tag{3}$$

とおく．

4.4 $\mathbb{Z}_p$-格子 $L \subset W$ をとり[8]，$L' = \{x \in W' \mid \chi(\langle x, L\rangle) = 1\}$ とおいて $\Lambda = L' \oplus L$ とおく．$H(\Lambda) = \Lambda \times \mathbb{Q}_p$ は $H(V)$ の閉部分群で

$$\chi_\Lambda : H(\Lambda) \to \mathbb{C}^1 \qquad \left(((x,y),t) \mapsto \chi\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right)\right)$$

は $H(\Lambda)$ の連続なユニタリ指標となる．そこで誘導表現 $\pi_{\chi_\Lambda} = \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ を考える．その表現空間は

1) 任意の $\lambda \in H(\Lambda)$ に対して $\theta(\lambda g) = \chi_\Lambda(\lambda)\theta(g)$,
2) $\displaystyle\int_{H(\Lambda)\backslash H(V)} |\theta(g)|^2 d(\dot{g}) < \infty$

なる $H(V)$ 上の可測関数 θ の全体であり，$h \in H(V)$ の $\theta \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ への作用は $(\pi_{\chi_\Lambda}(h)\theta)(g) = \theta(gh)$ により定義される．ここで Schwartz 関数[9] $\varphi \in \mathcal{S}(W')$ に対して

$$\Theta_\varphi(h) = \int_{L'} \varphi(x+l)\chi\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle + \langle l, y\rangle\right) d_{L'}(l) \quad (h = ((x,y),t) \in H(V))$$

により $H(V)$ 上の関数 Θ_φ を定義すれば，$\Theta_\varphi \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ であり $|\Theta_\varphi| = |\varphi|$ である．更に次の定理が成り立つ；

定理 4.4.1 $\varphi \mapsto \Theta_\varphi$ は $H(V)$ のユニタリ表現のユニタリ同値写像

$$(\Pi_\chi, L^2(W')) \tilde{\to} \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$$

に延長される．

---

[8] 即ち，W の $\mathbb{Z}_p$-部分加群であって W の $\mathbb{Q}_p$ 上の基底を含むもの．

[9] $p = \infty$ のときには各階微分の多項式倍が常に有界なる関数，$p < \infty$ のときには台がコンパクトなる連続関数．

$\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ を Schrödinger 表現の**格子モデル** と呼ぶ．さて $\Lambda\sigma = \Lambda$ なる $\sigma \in Sp(V)$ の全体を $Sp(\Lambda)$ と書き，$Sp(\Lambda)$ の部分群

$$Sp_{0,\chi}(\Lambda) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi_\Lambda(\lambda^\gamma) = \chi_\Lambda(\lambda) \text{ for } \forall\lambda \in H(\Lambda)\}$$

を考えよう．$\gamma \in Sp_{0,\chi}(\Lambda)$ に対して，複素 Hilbert 空間 $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ の自己同型写像 $\mathbf{r}_\chi(\gamma)$ が

$$(\mathbf{r}_\chi(\gamma)\theta)(h) = \theta(h^\gamma) \qquad (\theta \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda, h \in H(V))$$

により定義される．そこで定理 4.4.1 のユニタリ同値写像 $\varphi \mapsto \Theta_\varphi$ により $\mathbf{r}_\chi(\gamma)$ が誘導する $L^2(W')$ 上の自己同型写像を同じく $\mathbf{r}_\chi$ と書こう．すると $\gamma \mapsto (\gamma, \mathbf{r}_\chi(\gamma))$ は $Sp_{0,\chi}(\Lambda)$ から $Mp(V)$ への群準同型写像であることがわかる．そこで $\widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda) = \varpi_\chi^{-1}Sp_{0,\chi}(\Lambda)$ とおくと，群準同型写像

$$\rho_\chi = \rho_{\Lambda,\chi} : \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda) \to \mathbb{C}^1$$

が定まって，任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$ に対して

$$\omega_\chi(\widetilde{\gamma}) = \rho_\chi(\widetilde{\gamma}) \cdot \mathbf{r}_\chi(\gamma) \qquad (\gamma = \varpi_\chi(\widetilde{\gamma}))$$

が成り立つようにできる．ここで $a \in V$ をとって $H(\Lambda)$ のユニタリ指標

$$\chi_{\Lambda,a}(\lambda) = \chi_\Lambda(\lambda) \cdot \chi(D(a,l)) \qquad (\lambda = (l,t) \in H(\Lambda))$$

を定義する．又，$a = (a', a'') \in V = W' \times W$ として W' 上の Schwartz 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(W')$ に対して

$$\begin{aligned}\vartheta_\varphi[a](\widetilde{g}) &= \Theta_{\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi}(a,0)\\ &= \chi\left(\frac{1}{2}\langle a', a''\rangle\right) \cdot \int_{L'} (\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi)(a'+l)\chi(\langle l, a''\rangle)d_{L'}(l)\end{aligned}$$

$(\widetilde{g} \in \widetilde{Sp}(V)_J)$ とおくと，テータ級数の変換公式が次のように述べられる；

定理 4.4.2 任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$ と $\lambda \in H(\Lambda)$ に対して

$$\vartheta_\varphi[a]((\widetilde{\gamma},\lambda)\widetilde{g}) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\chi_{\Lambda,a\gamma}(\lambda)\vartheta_\varphi[a\gamma](\widetilde{g}).$$

[**証明**] $\omega_\chi(\widetilde{\gamma})$ と $\Pi_\chi(\lambda)$ を $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ 上で実現したものを同じ記号で表せば，$\psi = \omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi$ として

$$\begin{aligned}\vartheta_\varphi[a]((\widetilde{\gamma},\lambda)\widetilde{g}) &= (\omega_\chi(\widetilde{\gamma}) \circ \Pi_\chi(\lambda)\Theta_\psi)(a,0)\\ &= \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})(\Pi_\chi(\lambda)\Theta_\psi)(a\gamma,0)\\ &= \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\Theta_\psi((a\gamma,0)\lambda).\end{aligned}$$

ここで $\lambda = (l, t)$ とおくと，$(x, s) \in H(V)$ に対して

$$\begin{aligned}(l,t)^{-1}(x,s)(l,t) &= (-l,-t)(x+l, s+t+2^{-1}D(x,l)) \\ &= (x, s+2^{-1}D(x,l) - 2^{-1}D(l, x+l)) \\ &= (0, D(x,l))(x,s)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\Theta_\psi((a\gamma,0)\lambda) &= \Theta_\psi(\lambda(0, D(a\gamma,l))(a\gamma,0) \\ &= \chi_\Lambda(\lambda(0, D(a\gamma,l)))\Theta_\psi(a\gamma,0)\end{aligned}$$

となり，求める等式を得る．■

特に $\widetilde{g} = \widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V), a = 0$ の場合に

系 4.4.3 W' 上の Schwartz 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(W')$ に対して

$$\vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma}) = \int_{L'} (\omega_\chi(\widetilde{\sigma})\varphi)(l) d_{L'}(l) \qquad (\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))$$

とおくと，任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$ に対して

$$\vartheta_\varphi(\widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma}) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma}) \cdot \vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma}).$$

4.5 $GL_{\mathbb{Q}_p}(V)$ の閉部分群

$$GSp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{Q}_p}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = \nu(\sigma) \cdot D(x,y) \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

は，$\sigma \in GSp(V)$ と $h = (x,t) \in H(V)$ に対して $h^\sigma = (x\sigma, \nu(\sigma)t)$ により $H(V)$ に右から作用し，$h \mapsto h^\sigma$ は $H(V)$ の位相的自己同型写像である．特に半直積 $Sp(V)_J = Sp(V) \ltimes H(V)$ を **Jacobi 群**と呼ぶ．更に $\widetilde{Sp}(V)$ は $\varpi : \widetilde{Sp}(V) \to Sp(V)$ を通して $H(V)$ に作用するから，半直積 $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V) \ltimes H(V)$ 及び

$$\varpi_J : \widetilde{Sp}(V)_J \to Sp(V)_J \qquad ((\widetilde{\sigma}, h) \mapsto (\varpi(\widetilde{\sigma}), h))$$

を考えると，$\widetilde{Sp}(V)$ の Weil 表現 $(\omega_\chi, L^2(W'))$ を用いて $\widetilde{Sp}(V)_J$ の既約ユニタリ表現 $(\omega_{\chi,J}, L^2(W'))$ が

$$\omega_{\chi,J}(\widetilde{\sigma}, h) = \omega_\chi(\widetilde{\sigma}) \circ \Pi_\chi(h)$$

により定義される．

ここで $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現 π があれば，自然な射影 $\widetilde{Sp}(V)_J \to \widetilde{Sp}(V)$ を通して $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現 π_J が生ずるから，ユニタリ表現のテンソル積 $\rho = \pi_J \otimes \omega_{\chi,J}$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現で，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V)) =$

$Z(\widetilde{Sp}(V)_J)$ に対して $\rho(t)=\chi(t)$ となる．逆に，任意の $t\in\mathbb{Q}_p$ に対して $\rho(t)=\chi(t)$ なる $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現 (ρ,H) があると，それを $H(V)$ に制限すると，定理 4.1.2 より，複素 Hilbert 空間 E があって $H=E\widehat{\otimes}L^2(W')$ かつ $\rho|_{H(V)}=\mathbf{1}_E\otimes\Pi_\chi$ である．このとき $E=\mathcal{L}_{H(V)}(L^2(W'),H)$ で，オペレータ・ノルム $|T|=\sup\limits_{0\neq\varphi\in L^2(W')}|T\varphi|/|\varphi|$ により複素 Hilbert 空間になる．そこで E 上の $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現 π を

$$\pi(\widetilde{\sigma})T=\rho(\widetilde{\sigma},1)\circ T\circ\omega_\chi(\widetilde{\sigma})^{-1}$$

により定義すると，$\rho=\pi_J\otimes\omega_{\chi,J}$ となる．正確には次の定理が成り立つ；

定理 4.5.1 $\pi\mapsto\pi_J\otimes\omega_{\chi,J}$ は $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現 π のユニタリ同値類と $\rho|_{Z(\widetilde{Sp}(V)_J}=\chi$ なる $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現 ρ のユニタリ同値類の間の全単射を与える．特に $\pi_J\otimes\omega_{\chi,J}$ が既約となる必要十分条件は π が既約なることである．

5 重さ 1/2 の保型因子

5.1 (V,D) を実斜交空間として，7.1 節の記号を用いる．$\mathbf{e}(t)=\mathbf{e}_\infty(t)=\exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ とおいて，$g=(\sigma,h)\in Sp(V)_J$ $(\sigma\in Sp(V),h=(x,t)\in H(V))$ と $Z=(z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J}$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(g;Z)=&\mathbf{e}\Biggl(t+\frac{1}{2}D(x,x\begin{bmatrix}z\\1_W\end{bmatrix}J(\sigma,z)^{-1}\sigma)\\&\qquad+D(x,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma)+\frac{1}{2}D(w,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma)\Biggr)\end{aligned}$$

とおき，$Z'=(z',w')\in\mathfrak{H}_{V,J}$ に対して

$$\kappa(Z';Z)=\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle(w'-\overline{w})(z'-\overline{z})^{-1},w'-\overline{w}\rangle\right)$$

とおくと

$$\kappa(g(Z'),g(Z))=\eta(g;Z')\kappa(Z';Z)\overline{\eta(g;Z)}$$

となる．特に $z\in\mathfrak{H}_V$ と $w',w\in W_\mathbb{C}$ に対して $\kappa_z(w',w)=\kappa(z,w';z,w)$ とおく．

Heisenberg 群 $H(V)$ の中心 $Z(H(V))=\mathbb{R}$ のユニタリ指標 $\chi(t)=e^{-2\pi\sqrt{-1}t}$ から $H(V)$ に誘導された誘導表現 $\pi_\chi=\mathrm{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)}\chi$ を考える．その表現空間は

1) 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\varphi(g(0,t))=\chi(t)^{-1}\varphi(g)=\mathbf{e}(t)\varphi(g)$,
2) $\displaystyle\int_{H(V)/Z(H(V))}|\varphi(g)|^2d(\dot{g})<\infty$

なる $H(V)$ 上の複素数値可測関数 φ の全体であり，$h \in H(V)$ の作用は $(\pi_\chi(h)\varphi)(g) = \varphi(h^{-1}g)$ で定義される．一方 $\mathfrak{H}_{V,J}$ における $(z,0) \in \mathfrak{H}_{V,J}$ の $H(V)$-軌道は $\Omega_z = \{z\} \times W_{\mathbb{C}}$ となり，これを $(z,w) = w$ なる同一視により $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ とみなす．$(z,0) \in \Omega_z$ の $H(V)$ における固定部分群は $Z(|H(V))$ だから，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)}\chi$ を $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の関数の空間上に実現することができる．それを具体的に書いてみよう．まず

$$d_z(w) = (\det \mathrm{Im}\, z)^{-1} d_{W_{\mathbb{C}}}(w)$$

は $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の $H(V)$-不変測度であり，$g \in Sp_(V)_J$ に対して $g(z,w) = (z', w') \in \mathfrak{H}_{V,J}$ とすると

$$d_{z'}(w') = d_z(w)$$

となる．$\varphi \in \mathrm{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)}\chi$ に対して $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の関数 $\widetilde{\varphi}$ が

$$\widetilde{\varphi}(w) = \eta(h; z, 0)^{-1}\varphi(h) \qquad (w = h(0) \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}, h \in H(V))$$

により定義されて $|\varphi(h)|^2 = |\widetilde{\varphi}(w)|^2 \kappa_z(w,w)$ となる．一方，$h \in H(V)$ に対して $\psi = \pi_\chi(h)\varphi$ とおくと

$$\widetilde{\psi}(w) = \eta(h^{-1}; z, w)\widetilde{\varphi}(h^{-1}(w)) \qquad (w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}})$$

となる．そこで $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して，$\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の複素数値可測関数 φ であって

$$\int_{W_{\mathbb{C}}} |\varphi(w)|^2 \kappa_z(w,w) d_z(w) < \infty$$

なるもの全体のなす複素 Hilbert 空間を $\mathcal{L}_z$ とすると，$H(V)$ の $\mathcal{L}_z$ 上のユニタリ表現 π_z が

$$(\pi_z(h)\varphi)(w) = \eta(h^{-1}; z, w)\varphi(h^{-1}(w)) \qquad (h \in H(V), \varphi \in \mathcal{L}_z)$$

により定義される．更に $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上正則なる $\varphi \in \mathcal{L}_z$ の全体 $\mathcal{H}_z$ は $\mathcal{L}_z$ の閉部分空間となり，$(\pi_z, \mathcal{L}_z)$ の部分表現 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ が定まるが，実は $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ は $H(V)$ の Schrödinger 表現 $(\check{\Pi}_{\mathbf{e}}, L^2(W))$ とユニタリ同値である．そのユニタリ同値写像を具体的に与えるために，幾つか準備をしておこう．まず $\mathrm{Re}\, T = (T + \overline{T})/2$ が正定値となる $T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ の全体 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数 $\det^{-1/2}$ を

$$\det{}^{-1/2} T = \int_{W'} e^{-\pi\langle w, wT\rangle} d_{W'}(w) \qquad (T \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}})$$

により定義すると，$(\det^{-1/2} T)^2 = \det T^{-1}$（$d_{W'}(w) = \prod_{i=1}^{n} dx_i$ $(w = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i)$ なる W' の $\mathbb{R}$-基底 $\{u_i\}_{1=1,\cdots,n}$ に対して $\det T = \det(\langle u_i, u_j T\rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$ により定める）であり，正定値なる $T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$ に対して $\det^{-1/2} T =$

$(\det T)^{1/2}$ となる．整数 n に対して $\det^{n/2}T = (\det^{-1/2}T)^{-n}$ とおく．同様に $\mathrm{Re}\, S = (S + \overline{S})/2$ が正定値なる $S \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$ の全体 $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数 $\det^{-1/2}$ が

$$\det{}^{-1/2} S = \int_W e^{-\pi\langle wS, w\rangle} d_W(w) \qquad (S \in \mathcal{S}'_{\mathbb{C}})$$

により定義される．$T \mapsto T^{-1}$ は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ から $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ への双正則な全単射で $\det^{-1/2}(T^{-1}) = \det^{1/2}T$ である．そこで $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\gamma(z) = \det{}^{-1/2}(z/\sqrt{-1}) \cdot \det(2\mathrm{Im}\, z)^{1/4},$$
$$q_z(w) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle wz^{-1}, w\rangle\right) \qquad (w \in W_{\mathbb{C}})$$

とおいて，$\psi \in L^2(W)$ に対して

$$Q_z(\psi)(w) = \gamma(z)\int_W q_z(w - v)\psi(v) d_W(v) \qquad (w \in W_{\mathbb{C}})$$

とおくと，$\psi \mapsto Q_z(\psi)$ は $H(V)$ のユニタリ表現 $(\check{\Pi}_{\mathbf{e}}, L^2(W))$ から $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ へのユニタリ同値写像を与える．$(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ を Schrödinger 表現 $(\check{\Pi}_{\mathbf{e}}, L^2(W))$ の **Fock モデル** と呼ぶ．反傾表現 $(\Pi_{\mathbf{e}}, L^2(W')$ の Fock モデルをみるために，まず Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(W') \tilde{\to} L^2(W)$ を

$$(\mathcal{F}\varphi)(w) = \int_{W'} \varphi(v)\mathbf{e}(-\langle v, w\rangle) d_{W'}(v) \qquad (\varphi \in L^2(W') \cap L^1(W'))$$

により定義する．又 $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して $z^\vee = -\overline{z} \in \mathfrak{H}_V$ とおき，$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GSp(V)$ とおいて，$H(V)$ の $\mathcal{H}_{z^\vee}$ 上のユニタリ表現を $\check{\pi}_z(h) = \pi_{z^\vee}(h^\varepsilon)$ $(h \in H(V))$ により定義する．このとき

$$L^2(W') \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(W) \xrightarrow{Q_{z^\vee}} \mathcal{H}_{z^\vee}$$

は $(\Pi_{\mathbf{e}}, L^2(W'))$ から $(\check{\pi}_z, \mathcal{H}_{z^\vee})$ へのユニタリ同値写像となる．ここで $\kappa_{z^\vee}(w, w) = \kappa_z(w, w)$ だから，複素 Hiulbert 空間としては $\mathcal{H}_{z^\vee}$ は $\mathcal{H}_z$ と同じものである．

5.2　Heisenberg 群 $H(V)$ のユニタリ表現 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ の作用は，$\varphi \in \mathcal{H}_z$ と $h \in H(V)$ 及び $w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ に対して $w' = h(w) \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ とおくと

$$(\pi_z(h)\varphi)(w') = \eta(h; z, w)^{-1}\varphi(w)$$

と書ける．そこで $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ と $w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ に対して $g(z, w) = (\sigma(z), w') \in \Omega_{\sigma(z)} = W_{\mathbb{C}}$ として

$$(T^z(g)\varphi)(w') = \eta(g; z, w)^{-1}\varphi(w) \qquad (\varphi \in \mathcal{H}_z)$$

とおくと，$T^z(g)$ は $\mathcal{H}_z$ から $\mathcal{H}_{\sigma(z)}$ へのユニタリ写像で，更に $g' \in Sp(V)_J$ をとれば

$$T^z(g'g) = T^{\sigma(z)}(g') \circ T^z(g)$$

となる．そこでユニタリ自己同型 $T_z(g) \in \mathrm{Aut}(L^2(W))$ を可換図式

$$\begin{tikzcd} L^2(W) \arrow[r, "Q_z"] \arrow[d, "T_z(g)"'] & \mathcal{H}_z \arrow[d, "T^z(g)"] \\ L^2(W) \arrow[r, "Q_{\sigma(z)}"'] & \mathcal{H}_{\sigma(z)} \end{tikzcd}$$

により定義する．$z, z' \in \mathfrak{H}_V$ に対して $\mathcal{H}_z$ から $\mathcal{H}_{z'}$ へのユニタリ同型を $U_{z',z} = Q_{z'} \circ Q_z^{-1}$ と定義すると，$\varphi \in \mathcal{H}_z$ に対して

$$(U_{z',z}\varphi)(w') = \gamma(z', z) \int_{W_\mathbb{C}} \kappa(z', w'; z, w)^{-1} \varphi(w) \kappa_z(w, w) d_z(w)$$

となることが示される．ここで

$$\begin{aligned} \gamma(z', z) &= \gamma(z')\overline{\gamma(z)} \mathrm{det}^{-1/2} \left\{ (z'/\sqrt{-1})^{-1} + \overline{(z/\sqrt{-1})}^{-1} \right\} \\ &= \mathrm{det}^{-1/2} \left(\frac{z' - \overline{z}}{2\sqrt{-1}} \right) \det(\mathrm{Im}\, z')^{1/4} \det(\mathrm{Im}\, z)^{1/4} \end{aligned}$$

である．ユニタリ自己同型 $T_z(g) \in \mathrm{Aut}(L^2(W))$ をユニタリ同型写像 $Q_z : L^2(W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_z$ により $\mathcal{H}_z$ のユニタリ自己同型とみれば

$$T_z(g) = U_{z,\sigma(z)} \circ T^z(g) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_z) \qquad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J)$$

となる．さて，ユニタリ同型写像 $\check{T}_z(g) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ を可換図式

$$\begin{tikzcd} L^2(W') \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\check{T}_z(g)"'] & L^2(W) \arrow[r, "Q_{z^\vee}"] & \mathcal{H}_{z^\vee} \arrow[d, "T^{z^\vee}(\varepsilon^{-1} g \varepsilon)"] \\ L^2(W') \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & L^2(W) \arrow[r, "Q_{\sigma(z)^\vee}"'] & \mathcal{H}_{\sigma(z)^\vee} \end{tikzcd}$$

により定義する．すると $g = (\sigma, h), g' = (\tau, h') \in Sp(V)_J$ に対して

$$\check{T}_z(g) \circ \check{T}_z(g') = \beta_z(\sigma, \tau) \check{T}_z(gg')$$

が成り立つ．ここで $\sigma \in Sp(V)$ と $z, z' \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma; z', z) = \mathrm{det}^{-1/2} &\left(\frac{\sigma(z') - \overline{\sigma(z)}}{2\sqrt{-1}} \right) \cdot \mathrm{det}^{1/2} \left(\frac{z' - \overline{z}}{2\sqrt{-1}} \right) \\ &\times |\det J(\sigma, z')|^{-1/2} |\det J(\sigma, z)|^{-1/2} \end{aligned}$$

とおき，$\sigma, \tau \in Sp(V)$ と $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\beta_z(\sigma, \tau) = \varepsilon(\sigma; z, \tau(z)) \in \mathbb{C}^1$$

とおく．$g, g', g'' \in Sp(V)_J$ に対して結合法則

$$(\check{T}_z(g) \circ \check{T}_z(g')) \circ \check{T}_z(g'') = \check{T}_z(g) \circ (\check{T}_z(g') \circ \check{T}_z(g''))$$

が成り立つから，$\sigma, \tau, \delta \in Sp(V)$ に対して

$$\beta_z(\tau, \delta)\beta_z(\sigma\tau, \delta)^{-1}\beta_z(\sigma, \tau\delta)\beta_z(\sigma, \tau)^{-1} = 1$$

となる．即ち β_z は $\mathbb{C}^1$ に値をとる $Sp(V)$ 上の実解析的な 2-cocycle となる（$Sp(V)$ は $\mathbb{C}^1$ に自明に作用している）．そこで付随する群拡大を $Mp(V; z)$ としよう．即ち，$Mp(V; z) = \mathbb{C}^1 \times Sp(V)$ で，群演算を

$$(\varepsilon, \sigma) \cdot (\eta, \tau) = (\varepsilon\eta\beta_z(\sigma, \tau), \sigma\tau)$$

により定義すると，$Mp(V; z)$ は連結な実 Lie 群である．更に $\sigma \in Sp(V)$ に対して

$$\alpha_z(\sigma) = \det J(\sigma, z)/|\det J(\sigma, z)|$$

とおくと[10]，$\sigma, \tau \in Sp(V)$ に対して

$$\beta_z(\sigma, \tau)^2 = \alpha_z(\tau)\alpha_z(\sigma\tau)^{-1}\alpha_z(\sigma)$$

となるから，$(\varepsilon, \sigma) \mapsto \varepsilon^2\alpha_z(\sigma)$ は $Mp(V; z)$ から $\mathbb{C}^1$ への連続群準同型写像となる．その核を $\widetilde{Sp}(V; z)$ としよう．即ち

$$\widetilde{Sp}(V; z) = \{(\varepsilon, \sigma) \in \mathbb{C}^1 \times Sp(V) \mid \varepsilon^2 = \alpha_z(\sigma)^{-1}\}$$

は $Mp(V; z)$ の閉部分群となり，従って実 Lie 部分群となるが，更に連結であることもわかる．よって

$$\varpi_z : \widetilde{Sp}(V; z) \to Sp(V) \qquad ((\varepsilon, \sigma) \mapsto \sigma)$$

により $\widetilde{Sp}(V; z)$ は $Sp(V)$ の連結な二重被覆群となる．ここで $(\varepsilon, \sigma) \mapsto (\sigma, \varepsilon\check{T}_z(\sigma))$ は $Mp(V; z)$ から $Mp(V)$ への位相群としての同型写像であり，$(\varepsilon, \sigma) \in Mp(V; z)$ に対して

$$\Phi(\sigma, \varepsilon\check{T}_z(\sigma)) = \varepsilon^2\alpha_z(\sigma)$$

[10] $\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ を同一視しているから (26 頁)，$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ に対して

$$J(\sigma, z) = \begin{bmatrix} {}^t(cz+d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz+d \end{bmatrix} = cz + d \in \widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$$

である．

であることが示される．よって $(\varepsilon.\sigma) \mapsto (\sigma, \varepsilon\check{T}_z(\sigma))$ は $\widetilde{Sp}(V;z)$ から $\widetilde{Sp}(V)$ への位相群の同型写像となる．よって Weil 表現は

$$\omega_\chi : \widetilde{Sp}(V;z) \to \mathrm{Aut}(L^2(W')) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \varepsilon\check{T}_z(\sigma))$$

となる（但し $\chi(t) = \mathbf{e}(t)$ である）．その反傾表現 $(\check{\omega}_\chi, L^2(W))$ は $\check{\omega}_\chi(\widetilde{\sigma}) = \varepsilon^{-1}T_z(\sigma)$ $(\widetilde{\sigma} = (\varepsilon,\sigma) \in \widetilde{Sp}(V;z))$ である．

5.3 $z_0 = \widehat{0} \in \mathfrak{H}_V$ に対して $\widetilde{Sp}(V) = \widetilde{Sp}(V;z_0)$ とおき

$$\begin{aligned} \varpi :& \widetilde{Sp}(V) \to Sp(V) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \sigma), \\ \omega :& \widetilde{Sp}(V) \to \mathrm{Aut}(L^2(W')) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \varepsilon \cdot \check{T}_{z_0}(\sigma)) \end{aligned}$$

とおく．$\widetilde{Sp}(V)$ は φ を通して $\mathfrak{H}_V$ に作用している．特に

$$\widetilde{K} = \varpi^{-1}(K) = \{(\varepsilon,k) \in \mathbb{C}^1 \times K \mid \varepsilon^2 = \det J(k,z_0)^{-1}\}$$

は $z_0 \in \mathfrak{H}_V$ の固定部分群で，直積群 $\mathbb{C}^1 \times K$ の閉部分群である．ここで $\widetilde{\sigma} = (\varepsilon,\sigma) \in \widetilde{Sp}(V)$ に対して

$$J_{1/2}(\widetilde{\sigma},z) = \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon(\sigma;z,z_0)|\det J(\sigma,z)|^{1/2}$$

とおくと，$J_{1/2}(\widetilde{\sigma},z)^2 = \det J(\sigma,z)$ となるから，$J_{1/2}(\widetilde{\sigma},z)$ は $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V)$ に関して実解析的，$z \in \mathfrak{H}_V$ に関して正則である．又，$\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau} \in \widetilde{Sp}(V)$ に対して

$$J_{1/2}(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau},z) = J_{1/2}(\widetilde{\sigma},\tau(z))J_{1/2}(\widetilde{\tau},z)$$

となる．特に

$$\det{}^{1/2} : \widetilde{K} \to \mathbb{C}^1 \qquad (\widetilde{k} = (\varepsilon,k) \mapsto J(\widetilde{k},z_0) = \varepsilon^{-1})$$

はコンパクト群 $\widetilde{K}$ の 1 次元ユニタリ表現である．ここで Weil 表現 $(\omega, L^2(W'))$ を $\widetilde{K}$ に制限したときの既約分解を考えよう．その為にユニタリ同型

$$L^2(W') \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(W) \xrightarrow{Q_{z_0^\vee}} \mathcal{H}_{z_0^\vee}$$

により Weil 表現を $\mathcal{H}_{z_0^\vee}$ 上で実現したとしよう．すると $W_\mathbb{C}$ 上の多項式関数 $P \in \mathbb{C}[W_\mathbb{C}]$ に対して $\varphi(w) = P(w)\kappa_{z_0^\vee}(w,0)^{-1}$ $(w \in W_\mathbb{C})$ とおくと $\varphi \in \mathcal{H}_{z_0^\vee}$ で，$\widetilde{\sigma} = (\varepsilon,\sigma) \in \widetilde{Sp}(V)$ に対して

$$(\omega(\widetilde{\sigma})\varphi)(w) = \varepsilon \cdot P(w\overline{J(\sigma,z_0)})\kappa_{\sigma(z_0)^\vee}(w,0)^{-1} \qquad (w \in W_\mathbb{C})$$

となる．従って Weil 表現 ω を $\widetilde{K}$ のい制限したときの既約分解は

$$\omega|_{\widetilde{K}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \det{}^{-1/2} \otimes \mathrm{Sym}_n$$

となる．ここで Sym_n はコンパクト・ユニタリ群 $K=U(W_{\mathbb{C}},\langle\,,\rangle_{z_0})$ の n 次対称テンソル表現であり，$GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の表現とみれば Young 図形は

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{\cdots}\boxed{n}$$

である．そこで "最小の" $\widetilde{K}$-タイプ $\det^{-1/2}$ に対応する $L^2(W')$ のベクトルをとろう．即ち $\varphi=\mathcal{F}^{-1}\circ Q_{z_0^\vee}^{-1}\kappa_{z_0^\vee}(*,0)^{-1}\in L^2(W')$ とおくと

$$\varphi(u)=\det(2\mathrm{Im}\,z_0)^{1/4}\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle u,uz_0\rangle\right)\qquad(u\in W')$$

である．ここで $\widetilde{g}=(\widetilde{\sigma},h)\in\widetilde{Sp}(V)_J$ $(\widetilde{\sigma}=(\varepsilon,\sigma)\in\widetilde{Sp}(V),h\in H(V))$ に対して $g=(\sigma,h)\in Sp(V)_J$ とおいて $g(z_0,0)=(z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J}$ とおくと

$$\begin{aligned}(\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi)(u)&=\varepsilon(\check{T}_{z_0}(g)\varphi)(u)\\&=\varepsilon\cdot\eta(g;z_0,0)\det(2\mathrm{Im}\,z)^{1/4}\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle u,uz\rangle+\langle u,w\rangle\right)\qquad(u\in W')\end{aligned}$$

となる．よって $\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})$ を $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ 上で実現したとして $\Theta_\varphi\in\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ への作用を考えれば

$$(\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\Theta_\varphi)(h')=\varepsilon\cdot\eta(g;z_0,0)\det(2\mathrm{Im}\,z)^{1/4}\mathbf{e}\left(t-\frac{1}{2}\langle a',a''\rangle\right)\cdot\vartheta[a](z,w)$$

となる．ここで $h'=(a,t)\in H(V)$ $(a=(a',a'')\in W'\times W)$ とし

$$\vartheta[a](z,w)=\sum_{l\in L'}\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l+a',(l+a')z\rangle+\langle l+a',w+a''\rangle\right)\tag{4}$$

は Riemenn のテータ級数である．よって定理 4.4.2 よりテータ級数の変換公式を得る；$\chi_\Lambda(h)=\mathbf{e}\left(t+\dfrac{1}{2}\langle x,y\rangle\right)$ $(h=((x,y),t)\in H(\Lambda))$ に対して

$$Sp_0(\Lambda)=\{\gamma\in Sp(\Lambda)\mid\chi_\Lambda(h^\gamma)=\chi_\Lambda(h)\text{ for }\forall h\in H(\Lambda)\}$$

とおくと

定理 5.3.1 任意の $\gamma\in Sp_0(\Lambda)$ に対して，$\varpi(\widetilde{\gamma})=\gamma$ なる $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{Sp}_0(\Lambda)$ をとれば

$$\vartheta^*[a](\gamma(z),wJ(\gamma,z)^{-1})=\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})J_{1/2}(\widetilde{\gamma},z)\eta(\gamma;z,w)^{-1}\vartheta^*[a\gamma](z,w)$$

である．ここで $\vartheta^*[a](z,w)=\mathbf{e}\left(-\dfrac{1}{2}\langle a',a''\rangle\right)\cdot\vartheta[a](z,w)$ とおく．

$(x,y)\in\Lambda$ に対して $h=((x,y),0)\in H(\Lambda)$ とおくと

$$\vartheta[0](z,w+xz+y)=\chi_\Lambda(h)\eta(h;z,w)^{-1}\vartheta[0](z,w)$$

となることに注意しよう．定理 5.3.1 で特に

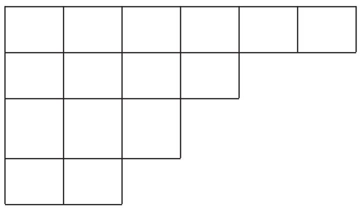
$$\vartheta(z) = \vartheta[0](z,0) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l, lz\rangle\right) \qquad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおけば，任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$ に対して

$$\vartheta(\gamma(z))/\vartheta(z) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma}) J_{1/2}(\widetilde{\gamma}, z)$$

である．よって特に任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$ に対して $\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})^8 = 1$ である（[11] の Chap.V, §2 参照）．

5.4 数論的部分群 $\Gamma \subset Sp(V_{\mathbb{Q}})$ をとり（$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ のときには十分大きな $0 < N \in \mathbb{Z}$ に対して $Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma$ であると仮定する），$\widetilde{Sp}(V)$ の離散的部分群 $\widetilde{\Gamma} = \varpi^{-1}(\Gamma)$ のユニタリ指標 α として，$\mathrm{Ker}\,\alpha$ は $\widetilde{\Gamma}$ の指数有限の部分群であると仮定する．$\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ を同一視して，(δ, V_δ) を $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現で Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応しているとして，$m_n > 0$ と仮定する．このとき $\widetilde{K}$ の既約ユニタリ表現 $\delta \otimes \det^{-1/2}$ が

$$\widetilde{k} = (\varepsilon, k) \mapsto J_{1/2}(\widetilde{k}, z_0)^{-1} J_\delta(k, z_0) = \varepsilon \cdot J_\delta(k, z_0)$$

により定義される．これらのデータに対して 3.3 節と同様にして，“重さ半整数”の Siegel モジュラー形式を論ずることができるだろう．即ち，正則関数

$$F : \mathfrak{H}_V \to V_\delta$$

であって

1) 任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ に対して $F(\gamma(z)) = \alpha(\widetilde{\gamma})^{-1} J_{1/2}(\widetilde{\gamma}, z)^{-1} J_\delta(\gamma, z) F(z)$,
2) 任意の $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}})$ と任意の $y_0 \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$ に対して

$$|\det J(\sigma, z)|^{1/2} |J_\delta(\sigma, z)^{-1} F(\sigma(z))|$$

は $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \mathrm{Im}\, z \geq y_0\}$ で有界

であるとき，F を Γ に関する重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$，指標 α の Siegel モジュラー形式と呼ぶ．更に，付随する $\widetilde{Sp}(V)$ 上の関数

$$f_F(\widetilde{\sigma}) = J_{1/2}(\widetilde{\sigma}, z_0) J_\delta(\sigma, z_0)^{-1} F(\sigma(z_0)) \qquad (\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V), \varpi(\widetilde{\sigma}) = \sigma)$$

が $\widetilde{Sp}(V)$ 上の有界関数となるとき，F を尖点形式と呼ぶ．ここで

$$|f_F(\widetilde{\sigma})| = |\det J(\sigma, z_0)|^{1/2}|J_\delta(\sigma, z_0)F(\sigma(z_0))|$$

は $\varpi(\widetilde{\sigma}) = \sigma \in Sp(V)$ の関数となって，任意の $p > 0$ に対して

$$\int_{\Gamma\backslash Sp(V)} |f_F(\widetilde{\sigma})|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

となる．逆に Satake の定理 3.3.1 と同様に

定理 5.4.1 実数 $p > 0$ に対して $p(m_n - 1/2) \geq 2n$ とする．このとき Γ に関する重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$，指標 α の Siegel モジュラー形式 F に対して

$$\int_{\Gamma\backslash Sp(V)} |f_F(\widetilde{\sigma})|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

ならば F は尖点形式である．

Γ に関する重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$，指標 α の尖点形式の全体を $S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)$ と書く．3.3 節で述べた Siegel 尖点形式の場合と同様に，定理 5.4.1 の $p = 2$ の場合を用いて，$\widetilde{Sp}(V)$ 上の正則離散系列表現と重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$ の Siegel 尖点形式の関係を与えることができる．即ち

$$\int_{\mathfrak{H}_V} (\delta \otimes \det{}^{-1/2}(\operatorname{Im} z)\varphi(z), \varphi(z))_\delta d_{|frakH_V}(z) < \infty$$

なる正則関数 $\varphi : \mathfrak{H}_V \to V_\delta$ の全体 $H_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ は

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathfrak{H}_V} (\delta \otimes \det{}^{-1/2}(\operatorname{Im} z)\varphi(z), \psi(z))_\delta d_{|frakH_V}(z)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間となり，$\widetilde{Sp}(V)$ の $H_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ 上のユニタリ表現 $\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ が

$$(\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\sigma})\varphi)(z) = J_{1/2}(\widetilde{\sigma}^{-1}, z)^{-1} J_\delta(\sigma^{-1}, z)^{-1}\varphi(\sigma^{-1}(z))$$

により定義される．$H_{\delta\otimes\det^{-1/2}} \neq \{0\}$ となる必要十分条件は $m_n > n$ なることであり，このとき $(\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}, H_{\delta\otimes\det^{-1/2}})$ は $\widetilde{Sp}(V)$ の既約ユニタリ表現となり，“最小の” $\widetilde{K}$-タイプ $\delta \otimes \det^{-1/2}$ を重複度 1 で含む．

定理 5.4.2 $m_n > n$ ならば，$F \mapsto f_F$ は複素 Hilbert 空間の同型

$$S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha) \tilde{\to} \mathcal{A}_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{Sp}(V), \alpha, \pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}})$$

を与える．よって $F \in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)$ と $\beta \in V_\delta^*$ に対して

$$\theta_{F\otimes\beta}(\widetilde{\sigma}) = (\dim \delta)^{1/2}\langle \beta, f_F(\widetilde{\sigma})\rangle \qquad (\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))$$

とおくと，$F \otimes \beta \mapsto \theta_{F\otimes\beta}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \tilde{\to} L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{Sp}(V), \alpha^{-1}; \check{\pi}_{\delta\otimes\det^{-1/2}}, \check{\delta} \otimes \det{}^{1/2})$$

に延長される．

5.5 V を有限次元複素ベクトル空間とし，$\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V$ をとる．実双線形形式 $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ が，任意の $x, y \in V$ に対して

$$Q(\sqrt{-1}x, y) = \sqrt{-1}Q(x, y), \qquad (Q(x, y) - Q(y, x) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

を満たすとき，Q を V 上の**準 Hermite 形式**と呼ぶ．このとき

$$H_Q(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Q(\sqrt{-1}x, y) - Q(x, \sqrt{-1}y)) \qquad (x, y \in V)$$

は V 上の Hermite 形式となり

$$D_Q(x, y) = \operatorname{Im} H_Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-1}}(Q(x, y) - Q(y, x)) \qquad (x, y \in V)$$

は V 上の交代形式である．写像

$$\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

が，任意の $u, v \in \Lambda$ に対して

$$\alpha(u + v) = \alpha(u)\alpha(v)e^{\pi\sqrt{-1}D_Q(u,v)}$$

を満たすとき，α を準 Hermite 形式 Q に関する（或いは D_Q に関する）**準指標** と呼ぶ．準 Hermite 形式 Q に関する準指標が存在する必要十分条件は，任意の $u, v \in \Lambda$ に対して $D_Q(u, v) \in \mathbb{Z}$ なることである．

V 上の準 Hermite 形式 Q に関する準指標 α に対して

$$J_{Q,\alpha}(u, x) = \alpha(u) \exp\left(\pi Q(x, u) + \frac{\pi}{2}Q(u, u)\right) \qquad (u \in \Lambda, x \in V)$$

とおくと，任意の $u, v \in \Lambda$ に対して

$$J_{Q,\alpha}(u + v, x) = J_{Q,\alpha}(u, x + v)J_{Q,\alpha}(v, x)$$

となる．そこで V 上の正則関数 θ が，任意の $u \in \Lambda$ に対して

$$\theta(x + u) = J_{Q,\alpha}(u, x)\theta(x)$$

を満たすとき，θ を Λ に関する型 (Q, α) の**テータ関数**と呼ぶび，そのようなテータ関数の全体を $\mathcal{L}(Q, \alpha)$ と書く．

V 上の準 Hermite 形式に関する準指標が存在するとき

$$\Lambda_Q = \{x \in V \mid D_Q(u, x) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall u \in \Lambda\}$$

は $\Lambda \subset \Lambda_Q$ なる V の部分加群であり，次は同値である；

1) $(\Lambda_Q : \Lambda) < \infty$,
2) V 上の実交代形式 D_Q は非退化,

3) V 上の Hermite 形式 H_Q は非退化.

次の定理が基本的である；

定理 5.5.1 V 上の準 Hermite 形式 Q に関する準指標 α に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(Q,\alpha) = \begin{cases} (\Lambda_Q : \Lambda)^{1/2} & : H_Q \text{ が正定値のとき}, \\ 0 & : H_Q \text{ が正定値でないとき}. \end{cases}$$

実斜交空間 (V, D) の偏極 $V = W' \oplus W$ をとり，$x \in W', y \in W$ に対して $\langle x, y \rangle = D(x, y)$ とおいて，$\langle L', L \rangle \subset \mathbb{Z}$ なる $\mathbb{Z}$-格子 $L' \subset W', L \subset W$ をとる．

$$L'_D = \{x \in W' \mid \langle x, L \rangle \subset \mathbb{Z}\}, \qquad L_D = \{y \in W \mid \langle L', y \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

とおくと，$L' \subset L'_D \subset W'$ 及び $L \subset L_D \subset W$ は $\mathbb{Z}$-格子となる．このとき(4)で定義された Riemann のテータ級数

$$\vartheta[a](z, w) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l + \lambda, (l + \lambda)z \rangle + \langle l + \lambda, w + \mu \rangle\right)$$

$(a = (\lambda, \mu) \in W' \times W,\ z \in \mathfrak{H}_V,\ w \in W_{\mathbb{C}})$ について次が成り立つ；

定理 5.5.2 $a = (\lambda, \mu) \in W' \times W$ 及び $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して，$\vartheta[a](z, *)$ は $W_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda_z = \{uz + v \mid u \in L', v \in L\}$ に関する型 (Q_z, α) のテータ関数である．ここで

$$Q_z = \frac{2}{\sqrt{-1}}\langle x(\operatorname{Im} z)^{-1}, \operatorname{Im} y \rangle \qquad (x, y \in W_{\mathbb{C}})$$

は $W_{\mathbb{C}}$ 上の準 Hermite 形式であり，α は

$$\alpha(u) = e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle u, \mu \rangle}, \quad \alpha(v) = e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \lambda, v \rangle} \quad (u \in L', v \in L)$$

により定義される Q_z に関する準指標である．

ここで $h = ((x, y), 0) \in H(V)$ $(x \in W', y \in W)$ に対して

$$\eta(h; z, w) = J_{Q_z, \mathbf{1}}(xz + y, w)^{-1}$$

であることに注意しよう（$\mathbf{1}$ は $\mathbf{1}|_{L'}$, $\mathbf{1}|_L$ が共に自明な指標となる Q_z に関する準指標）．従って $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{L}(Q_z, \alpha)$ に対して $\theta_1(w)\overline{\theta_2(w)}\kappa_z(w, w)$ は Λ_z-不変となり，$\mathcal{L}(Q_z, \alpha)$ 上の Hermite 内積が

$$(\theta_1, \theta_2) = \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} \theta_1(w)\overline{\theta_2(w)}\kappa_z(w, w) d_z(w)$$

により定義される．このとき定理 5.5.2 の記号を用いて，次の定理が成り立つ；

定理 5.5.3 $a=(\lambda,\mu)\in W'\times W$ 及び $z\in\mathfrak{H}_V$ に対して $\{\vartheta[a+(v,0)](z,*)\}_{\dot v\in L'_D/L'}$ は $\mathcal{L}(Q_z,\alpha)$ の基底で，$v,v'\in L'_D$ に対して

$$(\vartheta[a+(v,0)](z,*),\vartheta[a+(v',0)](z,*)) \\ =\begin{cases}(L'_D:L')\det(2\mathrm{Im}\,z)^{-1/2} & : v\equiv v' \pmod{L'},\\ 0 & : v\not\equiv v' \pmod{L'}.\end{cases}$$

6 保型形式のテータ対応の一般的原理

6.1 　実斜交空間 (V,D) の偏極 $V=W'\oplus W$ をとり，$z_0\in\mathfrak{H}_V$ を固定して $Sp(V)$ の二重被覆群 $\widetilde{Sp}(V)=\widetilde{Sp}(V;z_0)$ の Weil 表現 $(\omega,L^2(W'))$ を考えよう（ここでは $\chi(t)=\mathbf{e}(t)$ としておく）．(G,H) を V 上の **reductive dual pair** として，極大コンパクト部分群 $K\subset G, L\subset H$ をとって，被覆写像 $\varpi:\widetilde{Sp}(V)\to Sp(V)$ により

$$\widetilde{K}=\varpi^{-1}(K)\subset\widetilde{G}=\varpi^{-1}(G),\quad \widetilde{L}=\varpi^{-1}(L)\subset\widetilde{H}=\varpi^{-1}(H)$$

とおく．$\widetilde{G}$ の元と $\widetilde{H}$ の元は $\widetilde{Sp}(V)$ で可換だから，$\omega(\widetilde{G}),\omega(\widetilde{H})$ で生成される $L^2(W')$ 上の von Neumann 環

$$\mathcal{A}_G=\omega(\widetilde{G})'',\qquad \mathcal{A}_H=\omega(\widetilde{H})''$$

は互いに可換である[11]．更に Howe [9] が示したように

定理 6.1.1 $\mathcal{A}_H=\mathcal{A}'_G$，従って $\mathcal{A}_G=\mathcal{A}'_H$ である．

自然な群準同型写像 $i:\widetilde{G}\times\widetilde{H}\to\widetilde{Sp}(V)$ $((g,h)\mapsto gh)$ により $\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}}=\omega\circ i$ は直積群 $\widetilde{G}\times\widetilde{H}$ の $L^2(W')$ 上のユニタリ表現となるが，上の定理から直ちに次の定理を得る；

定理 6.1.2 　1) $(\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}})_{\mathrm{disc}}$ の既約分解は重複度 1 である，

2) $\widetilde{G}$ の既約ユニタリ表現 π に対して $\pi\otimes\pi'\hookrightarrow\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}}$ なる $\widetilde{H}$ の既約ユニタリ表現は高々 1 個である．

そこで

$$(\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}})_{\mathrm{disc}}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\pi_\lambda\otimes\pi'_\lambda$$

(π_λ,π'_λ はそれぞれ $\widetilde{G},\widetilde{H}$ の既約ユニタリ表現）とおく．π_λ,π'_λ の表現空間を $H_{\pi_\lambda},H_{\pi'_\lambda}$ として，$H_{\pi_\lambda}\widehat{\otimes}H_{\pi'_\lambda}$ から $L^2(W')$ の $\pi_\lambda\otimes\pi'_\lambda$-成分 $L^2(W')_\lambda$ へのユ

[11] 複素 Hilbert 空間 X 上の有界線形作用素全体 $\mathcal{L}(X)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して

$$\mathcal{S}'=\{T\in\mathcal{L}(X)\mid T\circ S=S\circ T \text{ for } \forall S\in\mathcal{S}\}$$

とおき，$\mathcal{S}''=(\mathcal{S}')'$ とおく．$\mathcal{L}(X)$ の自己共役的な $\mathbb{C}$-部分代数 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}''=\mathcal{A}$ を満たすとき，$\mathcal{A}$ を X 上の **von Neumann 代数** と呼ぶ．

ニタリ同値写像を U_λ とする．特に $\pi\otimes\pi'\hookrightarrow\omega_{-}\widetilde{G}\times\widetilde{H}$ なる $\widetilde{G},\widetilde{H}$ の既約ユニタリ表現 π,π' を選び，$\widetilde{K},\widetilde{L}$ の既約ユニタリ表現 δ,δ' はそれぞれ $\pi|_{\widetilde{K}},\pi'|_{\widetilde{L}}$ に重複度 1 で含まれると仮定する．$\mathbb{Z}$-格子 $L\subset W$ をとり

$$L'=\{x\in W'\mid\langle x,L\rangle\subset\mathbb{Z}\}$$

とおき $\Lambda=L'\oplus L$ とおいて

$$\Gamma\subset Sp_0(\Lambda)\cap G,\qquad\Gamma'\subset Sp_0(\Lambda)\cap H$$

なる合同部分群 Γ,Γ' をとる．W' 上の Schwartz 関数 $\varphi\in\mathcal{S}(W')$ に付随するテータ級数

$$\vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma})=\sum_{l\in L'}(\omega(\widetilde{\sigma})\varphi)(l)\qquad(\widetilde{\sigma}\in\widetilde{Sp}(V))$$

の変換公式（系 4.4.3）

$$\vartheta_\varphi(\widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma})=\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma})\qquad(\widetilde{\gamma}\in\widetilde{Sp}_0(\Lambda))$$

が成り立つから，$\rho_G=\rho_\Lambda|_{\widetilde{\Gamma}},\rho_H=\rho_\Lambda|_{\widetilde{\Gamma}'}$ とおく．

以上の設定の下に $f\in L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G},\rho_G^{-1};\check{\pi},\check{\delta})$ と $\varphi\in\mathcal{S}(W')$ に対して

$$F_{f,\varphi}(h)=\int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}}f(g)\vartheta_\varphi(gh)d_{\widetilde{G}}(g)\qquad(h\in\widetilde{H})$$

とおくと

$$F_{f,\varphi}(\widetilde{\gamma}h)=\rho_H(\widetilde{\gamma})\cdot F_{f,\varphi}(h)\text{ for }\forall\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}'$$

である．ここで

定理 6.1.3 $\varphi=U_\lambda(u\otimes v)$ $(u\in H_{\pi_\lambda},v\in H_{\pi'_\lambda})$ とする．このとき $F_{f,\varphi}\neq 0$ ならば $\pi_\lambda=\pi$（従って $\pi'_\lambda=\pi'$）かつ $u\in H_\pi(\delta)$ である．更に任意の $\psi\in C_c(\widetilde{H},\delta')^o$ に対して

$$\int_{\widetilde{H}}F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\widetilde{H}}(y)=\widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi)$$

となる必要十分条件は $v\in H_{\pi'}(\delta')$ なることである．

[**証明**] まず任意の $\psi\in C_c(\widetilde{G},\delta)^o$ に対して

$$\begin{aligned}F_{f,\omega(\psi)\varphi}(h)&=\int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}}f(g)\left(\int_{\widetilde{G}}\psi(x)\vartheta_\varphi(ghx)d_{\widetilde{G}}(x)\right)d_{\widetilde{G}}(g)\\&=\int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}}d_{\widetilde{G}}(g)\int_{\widetilde{G}}d_{\widetilde{G}}(x)f(gx^{-1})\psi(x)\vartheta_\varphi(gh)\\&=\widehat{\psi}_{\check{\pi},\check{\delta}}(\overline{\psi^*})\cdot F_{f,\varphi}(h)=\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi)\cdot F_{f,\varphi}(h).\end{aligned}$$

ここで $u \notin H_{\pi_\lambda}(\delta)$ ならば

$$\begin{aligned}\omega(\psi)\varphi &= U_\lambda(\pi_\lambda(\psi)u \otimes v)\\ &= U_\lambda(\pi_\lambda(\psi * e_\delta)u \otimes v) = 0\end{aligned}$$

だから，任意の $\psi \in C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi) \cdot F_{f,\varphi} = F_{f,\omega(\psi)\varphi} = 0,$$

よって $F_{f,\varphi} = 0$ となる．そこで

$$u \in H_{\pi_\lambda}(\delta) = \bigoplus^r V_\delta, \quad u = \sum_{i=1}^r u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$(u_i \in V_\delta)$ とおくと，任意の $\psi \in C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ に対して $A_\psi \in M_r(\mathbb{C})$ で

$$\pi_\lambda(\psi) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

なるものがとれて，$\psi \mapsto A_\psi$ は $C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ から $M_r(\mathbb{C})$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像である．$\varphi_i = U_\lambda(u_i \otimes v) \in \mathcal{S}(W')$ とおくと $\varphi = \sum_{i=1}^r \varphi_i$ で

$$\begin{bmatrix} F_{f,\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\varphi_r} \end{bmatrix} \neq 0$$

かつ，任意の $\psi \in C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi) \begin{bmatrix} F_{f,\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\varphi_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{f,\omega(\psi)\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\omega(\psi)\varphi_r} \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} F_{f,\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\varphi_r} \end{bmatrix}$$

となる．よって $r = 1$ となり，従って任意の $\psi \in C_c(\widehat{G}, \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi_\lambda,\delta}(\psi) = A_\psi = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi)$$

となるから，$\pi_\lambda = \pi$ を得る．最後に任意の $\psi \in C_c(\widehat{H}, \delta')^o$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{H}} F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\widehat{H}}(y) &= \int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}} d_{\widetilde{G}}(g) \int_{\widetilde{H}} d_{\widetilde{H}}(y) f(g)\vartheta_\varphi(ghy)\\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}} f(g)\vartheta_{\omega(\psi)\varphi}(gh)d_{\widetilde{G}}(g)\\ &= \begin{cases} \widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi) \cdot F_{f,\varphi}(g) & : v \in H_{\pi'}(\delta'),\\ 0 & : v \notin H_{\pi'}(\delta') \end{cases}\end{aligned}$$

だから

$$\int_{\widetilde{H}} F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\widetilde{H}}(y) = \widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi)\cdot F_{f,\varphi}(h) \text{ for } \forall\psi \in C_c(\widetilde{H},\delta')^o$$

ならば $v \in H_{\pi'}(\delta')$ となり，逆も成り立つ．■

よって $F_{f,\varphi}$ が $\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}$ 上で二乗可積分ならば $F_{f,\varphi} \in L^2(\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H},\rho_H;\pi',\delta')$ となる．ここで形式的には

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}} |f'(h)|^2 d_{\widetilde{H}}(\dot{h})\\ =&\int_{\widetilde{\Gamma}\times\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}\times\widetilde{G}} d_{\widetilde{G}\times\widetilde{G}}(\dot{g},\dot{g}')f(g)\overline{f(g')}\int_{\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}}\vartheta_\psi(gh)\overline{\vartheta_\psi(g'h)}d_{\widetilde{H}}(\dot{h})\end{aligned}$$

であって

$$\vartheta_\psi(gh)\overline{\vartheta_\psi(g'h)} = \sum_{(l,l')\in L'\times L'}(\omega_\chi(gh)\psi)(l)\overline{(\omega_\chi(g'h)\psi)(l')}$$

を $Sp(V\times V)$ の reductive dual pair $(H\times H, G\times G)$ 上の theta 級数を $H\times H$ の対角部分群 $\Delta(H)$ に制限したものとみれば，所謂 seesaw dual pair $(\Delta(H),\mathcal{G})$ ができて，Siegel-Weil の公式が成り立てば

$$\int_{\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}}\vartheta_\psi(gh)\overline{\vartheta_\psi(g'h)}d_{\widetilde{H}}(\dot{h}) = E_{\mathcal{G}}((g,g'),\lambda) : \mathcal{G} \text{ の Eisenstein 級数}$$

となる．

$$\begin{tikzcd} H\times H \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \mathcal{G} \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ \Delta(H) & G\times G \end{tikzcd}$$

従って [5] にあるように（或いは広い意味での Rankin-Selberg の方法によって）

$$\int_{\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}}|f'(h)|^2 d_{\widetilde{H}}(\dot{h}) = \int_{\widetilde{\Gamma}\times\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}\times\widetilde{G}} f(g)\overline{f(g')}E_{\mathcal{G}}((g,g'),\lambda)d_{\widetilde{G}\times\widetilde{G}}(\dot{g},\dot{g}')$$

は f の L-関数の特殊値との関連が生ずるであろうことが見て取れる．

6.2 $H_\pi\widehat{\otimes}H_{\pi'}$ から $L^2(W')$ の $\pi\otimes\pi'$-成分へのユニタリ同値写像を U として，任意の $u \in H_\pi(\delta) = V_\delta$, $v \in H_{\pi'}(\delta') = V_{\delta'}$ に対して $U(u\otimes v) \in \mathcal{S}(W')$ であると仮定する．このとき $v \in V_{\delta'}$ に対して

$$\langle u, \Theta_v(s)\rangle = \vartheta_{U(u\otimes v)}(s) \qquad \forall u \in V_\delta, s \in \widetilde{Sp}(V)$$

により $\Theta_v : \widetilde{Sp}(V) \to V_\delta^*$ を定義すると

1) 任意の $k \in \widetilde{K}$ に対して $\Theta_v(sk) = \check{\delta}(k)^{-1}\Theta_v(s)$,
2) 任意の $k' \in \widetilde{K}'$ に対して $\Theta_v(sk') = \Theta_{\delta'(k')v}(s)$

である．実際，任意の $u \in V_\delta$ に対して

$$\begin{aligned}\langle u, \Theta_v(sk)\rangle &= \vartheta_{U(u\otimes v)}(sk) = \vartheta_{U(\delta(k)u\otimes v)}(s)\\ &= \langle \delta(k)u, \Theta_v(s)\rangle = \langle u, \check{\delta}(k)^{-1}\Theta_v(s)\rangle,\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\langle u, \Theta_v(sk')\rangle &= \vartheta_{U(u\otimes v)}(sk') = \vartheta_{U(u\otimes\delta'(k')v)}(s)\\ &= \langle u, \Theta_{\delta'(k')v)}(s)\rangle.\end{aligned}$$

そこで $f \in \mathcal{A}_\delta(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}, \rho_G, \pi)$ に対して

$$\langle v, F_f(h)\rangle = \int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}} \langle f(g), \Theta_v(gh)\rangle d_{\widetilde{G}}(g) \qquad \forall v \in V_{\delta'}, h \in \widetilde{H}$$

により $F_f : \widetilde{H} \to V_{\delta'}^*$ を定義する．V_δ の正規直交基底を $\{u_1, \cdots, u_d\}$ として $f_i(g) = (f(g), u_i)$ $(g \in \widetilde{G})$ とおくと

$$f_i \in L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}, \rho_G^{-1}; \check{\pi}, \check{\delta})$$

で，任意の $v \in V_{\delta'}$ に対して

$$\langle v, F_f(h)\rangle = \sum_{i=1}^{d} F_{f_i,\varphi_i}(h) \qquad (\varphi_i = U(u_i \otimes v) \in \mathcal{S}(W'))$$

となる．よって

1) 任意の $\gamma' \in \widetilde{\Gamma}'$ に対して $F_f(\gamma' h) = \rho_H(\gamma')F_f(h)$,
2) 任意の $k' \in \widetilde{K}'$ に対して $F_f(hk') = \check{\delta}'(k')^{-1}F_f(h)$,
3) 任意の $\psi \in C_c(\widetilde{H}, \check{\delta}')^o$ に対して

$$\int_{\widetilde{H}} F_f(hy^{-1})\psi(y)d_{\widetilde{H}}(y) = \widehat{\psi}_{\check{\pi}',\check{\delta}'}(\psi)\cdot F_f(h)$$

となる．よって F_f が $\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}$ 上で二乗可積分ならば $F_f \in \mathcal{A}_{\check{\delta}'}(\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}, \rho_H^{-1}, \check{\pi}')$ となる．

6.3　　G がコンパクト群の場合（即ち $G = K$ の場合）を考えよう．従って $\widetilde{G}$ もコンパクト群であり，$\pi = \delta$ である．$\widetilde{\Gamma} = \{1\}$ としよう．このとき $L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}, \rho_G^{-1}; \check{\pi}, \check{\delta})$ は $\widetilde{G}$ の右正則表現 $L^2(\widetilde{G})$ の $\check{\delta}$-成分 $L^2(\widetilde{G}; \check{\delta})$ に他ならず，ユニタリ同型

$$V_\delta \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \tilde{\to} L^2(\widetilde{G}; \check{\delta}) \quad (v \otimes \alpha \mapsto [x \mapsto (\dim\delta)^{1/2}\langle v, \check{\delta}(x)\alpha\rangle])$$

が成り立つ．又 $f \in \mathcal{A}_\delta(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}, \rho_G, \pi)$ に対して $f(x) = \delta(x)^{-1}f(1)$ $(\forall k \in \widetilde{K} = \widetilde{G})$ だから，ユニタリ同型

$$\mathcal{A}_\delta(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}, \rho_G, \pi) \tilde{\to} V_\delta \quad (f \mapsto f(1))$$

が成り立つ．少し計算してみると，$f \in \mathcal{A}_\delta(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}, \rho_G, \pi)$ に対して

$$\langle v, F_f(h)\rangle = \langle f(1), \Theta_v(h)\rangle \ \forall v \in V_{\delta'}$$

であることが判る．

第 III 部
Jacobi 形式

7 実素点での様子

7.1 (V, D) を実斜交空間として，3.2 節の記号を用いる．Jacobi 群 $Sp(V)_J$ は連結な実 Lie 群で，その Lie 環は $\mathfrak{sp}(V)_J = \mathfrak{sp}(V) \times V \times \mathbb{R}$ に Lie 括弧積を

$$[(X, x, s), (Y, y, t)] = ([X, Y], xY - yX, D(x, y))$$

により定義したものであり，指数写像 $\exp : \mathfrak{sp}(V)_J \to Sp(V)_J$ は

$$\exp(X, x, s) = (\exp X, x \cdot e(X), s + 2^{-1}D(x \cdot f(X), x))$$

である．ここで

$$e(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}, \qquad f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+2)!}$$

である．$\mathcal{I}_J = \mathcal{I} \times V$ とおく．$g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ $(h = (x, t) \in H(V))$ と $Z = (I, v) \in \mathcal{I}_J$ に対して

$$g(I, (v, 0))g^{-1} = (\sigma I \sigma^{-1}, (v + xI - x)\sigma^{-1}, D(x - v - vI, xI))$$

に注意すると，$(g, Z) \mapsto g{\cdot}Z = (\sigma I \sigma^{-1}, (v{+}xI{-}x)\sigma^{-1})$ により $Sp(V)_J$ は $\mathcal{I}_J$ に作用する．この作用は推移的で，$(I, 0) \in \mathcal{I}_J$ の固定部分群は $U(V_I, \langle\,,\rangle_I) \times Z(H(V))$ である．以下，$I_0 \in \mathcal{I}$ を固定して，$K = U(V_{I_0}, \langle\,,\rangle_{I_0})$ とおく．このとき $\mathfrak{p}_J^\pm = \mathfrak{p}^\pm \times W^\pm$ は $\mathfrak{sp}(V_\mathbb{C})_J$ の可換 Lie 部分環であり，$K_J = K \times Z(H(V))$ 及び $K_{J,\mathbb{C}} = K_\mathbb{C} \times Z(H(V_\mathbb{C}))$ はそれぞれ $Sp(V)_J$ 及び $Sp(V_\mathbb{C})_J$ の閉部分群となり，$P_J^\pm = \exp \mathfrak{p}_J^\pm = P^\pm \times W^\pm$ は $Sp(V_\mathbb{C})_J$ の可換閉部分群である．指数写像 $\exp(X, x, 0) = (\exp X, x, 0)$ は $\mathfrak{p}_J^\pm$ から $P_J^\pm$ への全単射である．

$P_J^+K_{J,\mathbb{C}}P_J^- = P^+K_{\mathbb{C}}P^- \times H(V_{\mathbb{C}})$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$ の開部分集合で，$(p,k,q) \mapsto pkq$ は $P_J^+ \times K_{J,\mathbb{C}} \times P_J^-$ から $P_J^+K_{J,\mathbb{C}}P_J^-$ への全単射となり

$$Sp(V)_J \subset P_J^+K_{J,\mathbb{C}}P_J^-, \qquad K_J = Sp(V)_J \cap K_{J,\mathbb{C}}P_J^-$$

が成り立つ．そこで自然な単射

$$Sp(V)_J/K_J \to Sp(V)_J K_{J,\mathbb{C}}P_J^-/K_{J,\mathbb{C}}P_J^- \subset P_J^+K_{J,\mathbb{C}}P_J^- \to P_J^+ \xrightarrow{\log} \mathfrak{p}_J^+$$

による $\mathcal{I}_J \tilde{\to} Sp(V)_J/K_J$ の $\mathfrak{p}_J^+$ における像を $\mathcal{D}_J$ とおくと

1) $\mathcal{D}_J$ は $\mathfrak{p}_J^+$ の開部分集合である，
2) 任意の $g \in Sp(V)_J$ と $Z \in \mathcal{D}_J \subset \mathfrak{p}_J^+$ に対して

$$g \exp Z = \exp(g(Z)) \cdot \mathbf{J}(g,Z) \cdot q$$

なる $g(Z) \in \mathcal{D}_J$, $\mathbf{J}(g,Z) \in K_{J,\mathbb{C}}$ 及び $q \in P_J^-$ が唯一存在する，
3) $(g,Z) \mapsto g(Z)$ により $Sp(V)_J$ は $\mathcal{D}_J$ に推移的に作用する．

ここで $\mathfrak{p}^+$ を $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+)$ と同一視して，$\mathcal{D}_J$ を $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+) \times W^+$ の部分集合として具体的に計算してみれば

1) $\mathcal{D}_J = \mathcal{D} \times W^+$,
2) $g = (\sigma,h) \in Sp(V)_J$ $(h = (x,s) \in H(V))$ と $Z = (z,w) \in \mathcal{D}_J$ に対して

$$g(Z) = (\sigma(z), (w+x_-z+z_+)J(\sigma,z)^{-1}) \qquad (x = (x_-,x_+) \in V_{\mathbb{C}} = W^- \times W^+),$$

又 $\mathbf{J}(g,Z) = (J(\sigma,z),0,\eta) \in K_{J,\mathbb{C}}$ で

$$\begin{aligned}\eta = s + \frac{1}{2}D(x,(x_-z+x_+)J(\sigma,z)^{-1}\sigma)& \\ + D(x,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma) + \frac{1}{2}D(w,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma)&\end{aligned}$$

であることがわかる．ここで (V,D) の偏極 $V = W' \oplus W$ をとり $W^-\rho = W'_{\mathbb{C}}, W^+\rho = W_{\mathbb{C}}$ なる $\rho \in Sp(V_{\mathbb{C}})$ を一つ固定しておく．

$$\widehat{\mathfrak{p}}_J^\pm = \mathrm{Ad}(\rho^{-1})\mathfrak{p}_J^\pm, \qquad \widehat{P}_J^\pm = \exp \widehat{\mathfrak{p}}_J^\pm = \widehat{P}^\pm \times W_{\mathbb{C}}$$

とおき $\widehat{K}_{J,\mathbb{C}} = \rho^{-1}K_{J,\mathbb{C}}\rho = \widehat{K}_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}}))$ とおくと，$\widehat{P}_J^+\widehat{K}_{J,\mathbb{C}}\widehat{P}_J^-$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$ の開部分集合で，$(p,k,q) \mapsto pkq$ は $\widehat{P}_J^+ \times \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \times \widehat{P}_J^-$ から $\widehat{P}_J^+\widehat{K}_{J,\mathbb{C}}\widehat{P}_J^-$ への全単射となる．そこで $\rho Sp(V)_J \subset P_J^+K_{J,\mathbb{C}}P_J^-$ に注意すると，$Z \in \mathcal{D}_J \subset \mathfrak{p}_J^+$ に対して $\rho \exp Z \in \exp \rho(Z) K_{J,\mathbb{C}}P_J^+$ なる $\rho(Z) \in \mathfrak{p}_J^+$ をとり $\widehat{Z} = \mathrm{Ad}(\rho^{-1})\rho(Z) \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+$ とおく．$\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ と同一視すれば

$$\{\widehat{Z} \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+ \mid Z \in \mathcal{D}_J\} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$$

となる．ここで $g \in Sp(V)_J$ と $Z \in \mathcal{D}_J$ に対して $g(\widehat{Z}) = \widehat{g(Z)}$ により，$Sp(V)_J$ は $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$ に推移的に作用する．具体的に計算すれば，

$g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ $(\sigma \in Sp(V), h = (x, s) \in H(V))$ と $Z = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J}$ $(z \in \mathfrak{H}, w \in W_{\mathbb{C}})$ に対して

$$g(Z) = (\sigma(z), (w + x'z + x'')J(\sigma, z)^{-1}) \quad (x = (x', x'') \in V = W' \times W)$$

となる．又，$Z \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+$ とみると $\exp Z \in Sp(V)_J \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \widehat{P}_J^-$ で，

$$g \exp Z = \exp g(Z) \cdot \mathbf{J}(g, Z) \cdot q$$

なる $\mathbf{J}(g, Z) \in \widehat{K}_{J,\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}_J^-$ が唯一存在する．具体的には $\mathbf{J}(g, Z) = (J(\sigma, z), \eta)$ で

$$\begin{aligned}\eta = s + \frac{1}{2}D(x, (x'z + x'')J(\sigma, z)^{-1}\sigma) \\ + D(x, wJ(\sigma, z)^{-1}\sigma) + \frac{1}{2}D(w, wJ(\sigma, z)^{-1}\sigma).\end{aligned}$$

である．更に

$$\check{K}_{J,\mathbb{C}} = \overline{\rho}^{-1} K_{J,\mathbb{C}} \rho = \check{K}_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}})) \qquad (\check{K}_{\mathbb{C}} = \overline{\rho}^{-1} K_{\mathbb{C}} \rho)$$

とおくと，$Z, Z' \in \mathfrak{H}_{V,J}$ に対して

$$\overline{\exp Z}^{-1} \exp Z' \in \widehat{P}^- K(Z', Z)^{-1} \widehat{P}^-$$

なる $K(Z', Z) \in \check{K}_{J,\mathbb{C}}$ が存在する．具体的には $Z = (z, w), Z' = (z', w')$ $(z, z' \in \mathfrak{H}_V, w, w' \in W_{\mathbb{C}})$ とおいて $K(Z', Z) = (K(z', z), \kappa)$ と書くと

$$K(z', z) = \begin{bmatrix} 0 & z' - \overline{z} \\ -(z' - \overline{z})^{-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1}, \quad \kappa = \frac{1}{2}\langle (w' - \overline{w})(z' - \overline{z})^{-1}, w' - \overline{w} \rangle$$

となる．

7.2

$$GSp(V) = \left\{ \sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \;\middle|\; \begin{array}{l} D(x\sigma, y\sigma) = \nu(\sigma) D(x, y) \text{ for } \forall x, y \in V, \\ \nu(\sigma) \in \mathbb{R}^\times \end{array} \right\}$$

は $Sp(V)$ を正規部分群としてふくみ，$\sigma \in GSp(V)$ は $X \in \mathfrak{sp}(V)$ に

$$\exp(t \cdot \mathrm{Ad}(\sigma)X) = \sigma \exp(t \cdot X)\sigma^{-1} \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

により作用する．具体的には $\mathrm{Ad}(\sigma)X = \sigma X \sigma^{-1}$ である．更に $\sigma \in GSp(V)$ は $h = (x, t) \in H(V)$ に $h^\sigma = (x\sigma, \nu(\sigma)t)$ により $H(V)$ の自己同型群として作用して，半直積 $GSp(V)_J = GSp(V) \ltimes H(V)$ は $Sp(V)_J$ を正規部分群として含む．特に $\sigma \in GSp(V)$ と $(X, x, s) \in \mathfrak{sp}(V)_J$ に対して

$$\exp(t \cdot \mathrm{Ad}(\sigma)(X, x, s)) = \sigma \exp(t(X, x, s))\sigma^{-1} \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

により $GSp(V)$ の $\mathfrak{sp}(V)_J$ への作用が定義される．具体的には

$$\mathrm{Ad}(\sigma)(X,x,s) = (\sigma X\sigma^{-1}, x\sigma^{-1}, \nu(\sigma)^{-1}s)$$

である．ここで $GSp^+(V) = \{\sigma \in GSp(V) \mid \nu(\sigma) > 0\}$ とおいて

$$\tau = \begin{bmatrix} \nu \cdot {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in GSp^+(V) \qquad (0 < \nu = \nu(\tau) \in \mathbb{R}, d \in GL_{\mathbb{R}}(W))$$

とおく．$Z = (z,w) \in \mathfrak{H}_J$ に対して，$\mathfrak{H}_J \subset \widehat{\mathfrak{p}}_J^+ \subset \mathfrak{sp}_J(V_{\mathbb{C}})$ とみれば

$$Z = (\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (0,w), 0) \in \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}}) \times V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$$

であるから

$$\mathrm{Ad}(\tau)Z = (\nu \cdot {}^t d^{-1} z d^{-1}, w d^{-1}) \in \mathfrak{H}_{V,J}$$

である．$\mathrm{Ad}(\tau)z = \nu \cdot {}^t d^{-1} z d^{-1} \in \mathfrak{H}_V$ とおく．一方 $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ に対して

$$g \cdot \exp Z = \exp g(Z) \cdot \mathbf{J}(g,Z) \cdot q \qquad (\mathbf{J}(g,Z) = (J(\sigma,z), \eta))$$

から

$$\begin{aligned} \tau g \tau^{-1} \exp(\mathrm{Ad}(\tau)Z) &= \tau g \cdot \exp Z \tau^{-1} \\ &= \exp(\mathrm{Ad}(\tau) g(Z)) \cdot \tau \mathbf{J}(g,Z)\tau^{-1} \cdot \tau q \tau^{-1}, \end{aligned}$$

従って $(\tau g \tau^{-1})(\mathrm{Ad}(\tau)Z) = \mathrm{Ad}(\tau)(g(Z))$ で

$$\tau \mathbf{J}(g,Z)\tau^{-1} = (\tau J(\sigma,z)\tau^{-1}, \nu^{-1} \cdot \eta)$$

である．特に

$$J(\tau\sigma\tau^{-1}, z) = \tau J(\sigma,z)\tau^{-1}$$

であり，又 $\eta(\tau g \tau^{-1}; \mathrm{Ad}(\tau)Z) = \eta(g;Z)^{\nu(\tau)^{-1}}$, 即ち

$$\eta(\tau^{-1} g \tau; Z) = \eta(g; \mathrm{Ad}(\tau)Z)^{\nu(\tau)} \tag{5}$$

となる[12].

7.3 $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}}$ を $D(\Lambda,\Lambda) \subset \mathbb{Z}$ なる $\mathbb{Z}$-格子として，$\chi(0,t) = \mathbf{e}(t)$ なる群準同型写像 $\chi : H(\Lambda) \to \mathbb{C}^1$ に対して

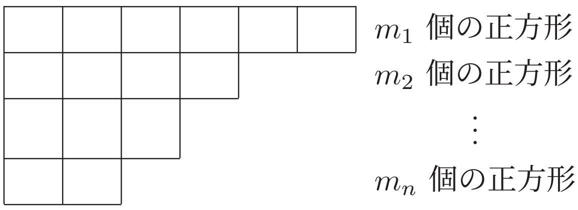
$$Sp(\Lambda;\chi) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi(h^\gamma) = \chi(h) \text{ for } \forall h \in H(\Lambda)\}$$

[12] ここで $\eta(g;Z) = \mathbf{e}(\eta)$ ならば $\eta(g;Z)^{\nu(\tau)} = \mathbf{e}(\nu(\tau)\cdot\eta)$ と定義する．

とおく．ここで $\alpha(x)=\chi(x,0)$ $(x\in\Lambda)$ は D に関する準指標となり，$x\mapsto\alpha(x)^2$ は群準同型写像となる．そこで $\operatorname{Ker}\alpha^2\subset\Lambda$ は指数有限であると仮定すると，十分大きな $0<N\in\mathbb{Z}$ をとれば

$$Sp(\Lambda,N)=\{\gamma\in Sp(\Lambda)\mid x\gamma\equiv x \pmod{N\cdot\Lambda} \text{ for } \forall x\in\Lambda\}\subset Sp(\Lambda;\chi)$$

となる．そこで部分群 $Sp(\Lambda,N)\subset\Gamma\subset Sp(\Lambda;\chi)$ をとり，$\Gamma_J=\Gamma\ltimes H(\Lambda)$ とおいて，$g=(\gamma,h)\in\Gamma_J$ に対して $\chi_J(g)=\chi(h)$ とおく．(δ,V_δ) を $\widehat{K}_{\mathbb{C}}=GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現で Young 図形



に対応しているとして，$m_n>0$ と仮定する．正則関数

$$F:\mathfrak{H}_{V,J}\to V_\delta \qquad (\mathfrak{H}_{V,J}=\mathfrak{H}_V\times W_{\mathbb{C}})$$

は任意の $g=(\gamma,h)\in\Gamma_J$ に対して変換公式

$$F(g(Z))=\chi_J(g)\eta(g;Z)^{-1}J_\delta(\gamma,z)F(Z) \qquad (Z=(z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J})$$

を満たすとしよう．このとき $\mathbb{Z}$-格子 $L'\subset W'_{\mathbb{Q}}, L\subset W_{\mathbb{Q}}$ をとって

a) $L'\oplus L\subset\Lambda$ かつ任意の $(u,v)\in L'\times L$ に対して $\alpha(u+v)=\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle u,v\rangle\right)$,

b) $\left\{\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}\,\middle|\, b\in\operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*,L)\right\}$, 但し $L^*=\{x\in W'\mid\langle x,L\rangle\subset\mathbb{Z}\}$ とおき $\operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*,L)=\{b\in\operatorname{Sym}_{\mathbb{R}}(W',W)\mid L^*b\subset L\}$ とおく

を満たすようにできて

1) 任意の $b\in\operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*,L)$ に対して $F(z+b,w)=F(z,w)$,
2) 任意の $l'\in L', l\in L$ に対して

$$F(z,w+l'z+l)=J_{Q_z,\alpha}(l'z+l,w)F(z,w). \tag{6}$$

特に任意の $l\in L$ に対して $F(z,w+l)=F(z,w)$

となる．よって F の正則性から

$$F(z,w)=\sum_{T\in\operatorname{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*,L)}\sum_{\lambda\in L^*}a(T,\lambda)\mathbf{e}(\operatorname{tr}(Tz)+\langle l,w\rangle)$$

なる Fourier 展開をもつ．ここで

$$\operatorname{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*,L)=\{T\in\operatorname{Sym}_{\mathbb{R}}(W,W')\mid\operatorname{tr}(Tb)\in\mathbb{Z}\text{ for }\forall b\in\operatorname{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*,L)\}$$

である．さて任意の $h=((a,b),t)\in H(V_{\mathbb{Q}})$ $(a\in W'_{\mathbb{Q}}, b\in W_{\mathbb{Q}})$ に対して

$$\begin{aligned}F^h(z)&=\eta(h;z,0)F(h(z,0))\\&=\mathbf{e}\left(t+\frac{1}{2}\langle a,az+b\rangle\right)\cdot F(z,az+b)\qquad (z\in\mathfrak{H}_V)\end{aligned}$$

とおく．$\sigma\in Sp(V)$ に対して

$$h\sigma h^{-1}=\sigma h^{\sigma}h^{-1}=((a,b)(\sigma-1),-\frac{1}{2}D((a,b)\sigma,(a,b)))$$

だから，十分大きな $0<N\in\mathbb{Z}$ をとれば，任意の $\gamma\in Sp(\Lambda,N)\subset\Gamma$ に対して $h\gamma h^{-1}\in\Gamma_J=\Gamma\ltimes H(\Lambda)$ となり

$$\begin{aligned}F^h(\gamma(z))&=\eta(h;\gamma(z,0))F(h\gamma h^{-1}h(z,0))\\&=\eta(h;\gamma(z,0))\eta(h\gamma h^{-1};h(z,0))^{-1}J_{\delta}(\gamma,z)F(h(z,0))\\&=\eta(\gamma;z,0)^{-1}\eta(h^{-1};h(z,0))^{-1}J_{\delta}(\gamma,z)F(h(z,0))\\&=J_{\delta}(\gamma,z)F^h(z)\end{aligned}$$

となる．一方，$F(z,w)$ の Fourier 展開から

$$\begin{aligned}F^h(z)&=\sum_{T,\lambda}a(T,\lambda)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}(Tz)+\langle\lambda,az+b\rangle+\frac{1}{2}\langle a,ax+b\rangle+t\right)\\&=\sum_{T,\lambda}a(T,\lambda)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}\left(T-\frac{1}{2}{}^t\lambda\lambda+\frac{1}{2}{}^t(\lambda+a)(\lambda+a)\right)z+\langle\lambda,b\rangle\right)\\&\qquad\qquad\times\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle a,b\rangle+t\right)\end{aligned}$$

となる．ここで $a\in W'$ に対して ${}^taa\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W,W')$ を

$$\mathrm{tr}({}^taa)S=\langle a,aS\rangle\text{ for }\forall S\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W',W)$$

により定義する．よって次は同値である；

1) $a(T,\lambda)\neq 0$ となるのは $T-\frac{1}{2}{}^t\lambda\lambda\geq 0$ の場合に限る，
2) 任意の $h\in H(V_{\mathbb{Q}})$ と $0<y_0\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W',W)$ に対して $|F^h(z)|$ は $\{z\in\mathfrak{H}_V\mid\mathrm{Im}\,z\geq y_0\}$ で有界である．

$\mathbb{Z}$-格子 L',L が上の二条件 a), b) に加えて更に

c) $L'^*=\{y\in W\mid\langle L',y\rangle\subset\mathbb{Z}\}$ とおいて $L\subset 2L'^*$

を満たすようにとる．(6) より $z\in\mathfrak{H}_V$ を固定すると $F(z,*)\in\mathcal{L}(Q_z,\mathbf{1})$ となるから，定理 5.5.3 の基底を用いて

$$F(z,w)=\sum_{\dot{v}\in L^*/L}f_{\dot{v}}(z)\vartheta[v,0](z,w)$$

とおく．$f_{\dot{v}}(z)$ は $z \in \mathfrak{H}_V$ の正則関数である．任意の $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$ をとると，$l \in L', v \in L^*$ に対して

$$\begin{aligned}\langle l+v, lb\rangle = \langle l, (l+v)b\rangle \in \langle L', L^*b\rangle \subset \langle L', L\rangle \subset \langle L', 2L'^*\rangle \subset a\mathbb{Z},\\ \langle l, vb\rangle \in \langle L', L^*b\rangle \subset 2\mathbb{Z},\\ \langle v, vb\rangle \in \langle L^*, L^*b\rangle \subset \langle L^*, L\rangle \subset \mathbb{Z}\end{aligned}$$

より $\langle l+v, (l+v)b\rangle \equiv \langle v, vb\rangle \pmod{2\mathbb{Z}}$ となるから

$$\vartheta[v,0](z+b,w) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle v, vb\rangle\right) \cdot \vartheta[v,0](z,w)$$

となる．よって $F(z+b,w) = F(z,w)$ より

$$f_{\dot{v}}(z+b) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle v, vb\rangle\right) \cdot f_{\dot{v}}(z) \qquad (v \in L^*)$$

となる．よって $\widetilde{f_v}(z) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle v, vz\rangle\right) \cdot f_{\dot{v}}(z)$ とおくと，任意の $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$ に対して $\widetilde{f_v}(z+b) = \widetilde{f_v}(z)$ となるから，$f_{\dot{v}}(z)$ の正則性から

$$\begin{aligned}f_{\dot{v}}(z) &= \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*,L)} a_v(T)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}(Tz) - \frac{1}{2}\langle v, vz\rangle\right)\\ &= \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*,L)} a_v(T)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}(T - \frac{1}{2}{}^t vv)z\right)\end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}F(z,w) &= \sum_{\dot{v} \in L^*/L'} f_{\dot{v}}(z)\vartheta[v,0](z,w)\\ &= \sum_{\dot{v} \in L^*/L'} f_{\dot{v}}(z) \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l+v, (l+v)z\rangle + \langle l+v, w\rangle\right)\\ &= \sum_{\lambda \in L^*} f_{\dot{\lambda}}(z)\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda z\rangle + \langle \lambda, w\rangle\right)\\ &= \sum_{\lambda \in L^*} \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*,L)} a_\lambda(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tz) + \langle \lambda, w\rangle)\end{aligned}$$

となる．即ち $a(T,\lambda) = a_\lambda(T)$ $(T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L), \lambda \in L^*)$ である．以上を踏まえて Jacobi 形式と Jacobi 尖点形式を次のように定義する；

定義 7.3.1 V_δ に値をとる $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数 F が

1) 任意の $g = (\gamma, h) \in \Gamma_J = \Gamma \ltimes H(\Lambda)$ に対して変換公式

$$F(g(Z)) = \chi_J(g)\eta(g;Z)^{-1}J_\delta(\gamma, z)F(Z) \qquad (Z = (z,w) \in \mathfrak{H}_{V,J})$$

を満たし，

2) 任意の $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$ に対して

$$F^h(z) = \eta(h;(z,0))F(h(z,0)) \qquad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

が 3.3 節の意味で重さ δ の Siegel モジュラー形式となる

とき，F を Γ_J に関して指標 χ をもつ重さ δ の **Jacobi 形式**と呼ぶ．更に

3) 任意の $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$ に対して $F^h(z)$ $(z \in \mathfrak{H}_V)$ が 3.3 の意味で Siegel 尖点形式である

とき F を **Jacobi 尖点形式**と呼ぶ．

Γ_J に関して指標 χ をもつ重さ δ の Jacobi 形式全体は有限次元複素ベクトル空間をなす．Koecher の定理から，$\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ ならば，上の定義の条件 2) は条件 1) から自動的に従う．Γ_J に関して指標 χ をもつ重さ δ の Jacobi 尖点形式のなす複素ベクトル空間を $S_\delta(\Gamma_J,\chi)$ と書く．F が Jacobi 尖点形式ならば

$$\int_{\Gamma_J\backslash\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)F(z,w),F(z,w))_\delta \kappa_z(w,w)d_{\mathfrak{H}_V}(z)d_z(w) < \infty$$

である（$(\,,)_\delta$ は $k \mapsto J_\delta(k,z_0)$ が K の既約ユニタリ表現となるように定めた V_δ 上の Hermite 内積）．これにより $S_\delta(\Gamma_J)$ に Hermite 内積が定義される．逆に，$m_n > n$ のとき， Jacobi 形式 F に対して

$$\int_{\Gamma_J\backslash\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)F(z,w),F(z,w))_\delta \kappa_z(w,w)d_{\mathfrak{H}_V}(z)d_z(w) < \infty$$

ならば F は Jacobi 尖点形式となる．

7.4 $Sp(V)_V = Sp(V) \ltimes H(V)$ は $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$ に推移的に作用し，$(z_0,0) \in \mathfrak{H}_{V,J}$ の固定部分群は $K \times Z(H(V))$ である．そこで $K \times Z(H(V))$ の V_δ 上の既約ユニタリ表現 $(k,t) \mapsto J_\delta(k,z_0)\cdot\mathbf{e}(-t)$ を $\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}$ と書いて，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{K\times Z(H(V))}^{Sp(V)_J}(\delta\otimes\overline{\mathbf{e}})$ を $\mathfrak{H}_{V,J}$ 上の関数の空間に実現する．即ち，

$$\int_{\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)\varphi(z,w),\varphi(z,w))_\delta \kappa_z(w,w)d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z,w) < \infty$$

なる可測関数 $\varphi : \mathfrak{H}_{V,J} \to V_\delta$ 全体 $E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ は

$$(\varphi,\psi) = \int_{\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)\varphi(z,w),\psi(z,w))_\delta \kappa_z(w,w)d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z,w)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間である．但し $d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z,w) = d_{\mathfrak{H}_V}(z)d_z(w)$ は $\mathfrak{H}_{V,J}$ 上の $Sp(V)_J$-不変測度である．ここで

$$\mathbf{J}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g,Z) = J_\delta(\sigma,z)\eta(g;Z)^{-1} \quad (g = (\sigma,h) \in Sp(V)_J, Z = (z,w) \in \mathfrak{H}_{V,J}$$

とおいて，$E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ 上の $Sp(V)_J$ のユニタリ表現 $\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ が

$$(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g)\varphi)(Z) = J_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g^{-1}, Z)\varphi(g^{-1}(Z))$$

により定義すれば，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{K\times Z(H(V))}^{Sp(V)_J}(\delta\otimes\overline{\mathbf{e}})$ は $(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$ とユニタリ同値である．ここで特に正則なる $\varphi\in E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ のなす部分空間 $H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ は，$E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ の $Sp(V)_J$-不変な閉部分空間で，$H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ の $Sp(V)_J$-不変な閉部分空間は自明なものに限る．

さて $Sp(V)_J$ のユニタリ表現 $(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$ を $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V)\ltimes H(V)$ のユニタリ表現とみれば，5.4 節で定義した $\widetilde{Sp}(V)$ の正則離散系列表現と $\widetilde{Sp}(V)_J$ の既約ユニタリ表現 $\omega_{\chi,J}$ との関係が見えてくる．即ち $\varphi\in H_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ と $\psi\in\mathcal{H}_{z_0}$ に対して $\mathfrak{H}_{V,J}$ 上の関数 $\varphi\boxtimes\psi$ を

$$(\varphi\boxtimes\psi)(z,w) = \det(\mathrm{Im}\,z)^{-1/4}\varphi(z)\cdot(U_{z,z_0}\psi)(w) \qquad (z\in\mathfrak{H}_V, w\in W_{\mathbb{C}})$$

により定義すると，$\varphi\otimes\psi\mapsto\varphi\boxtimes\psi$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現のユニタリ同値

$$(\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}, H_{\delta\otimes\det^{-1/2}})\widehat{\otimes}(\check{\omega}_{\chi,J}, \mathcal{H}_{z_0}) \xrightarrow{\sim} (\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}) \qquad (7)$$

を与える．ここで $\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ は自然な射影 $\widetilde{Sp}(V)_J\to\widetilde{Sp}(V)$ により $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現とみなしている．よって特に $H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}\neq\{0\}$ となる必要十分条件は $m_n > n$ なることであり，このとき $(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ の既約ユニタリ表現となる．

さて Jacobi 尖点形式 $F\in S_\delta(\Gamma_J,\chi)$ に対して $Sp(V)_J$ 上の関数 f_F を

$$f_F(g) = \mathbf{J}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g;(z_0,0))^{-1}F(g(z_0,0)) \qquad (g\in Sp(V)_J)$$

により定義すると

1) 任意の $g'\in\Gamma_J$ に対して $f_F(g'g) = \chi_J(g')f_F(g)$,
2) 任意の $k\in K$ に対して $f_F(gk) = \delta(k)^{-1}f_F(g)$,
3) $\displaystyle\int_{\Gamma_J\backslash Sp(V)_J}|f_F(g)|^2 d(\dot{g})$
$\displaystyle = \int_{\Gamma_J\backslash\mathfrak{H}_{V,J}}(\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)F(z,w), F(z,w))_\delta\kappa_z(w,w)d_{\mathfrak{H}_V}(z)d_z(w) < \infty$

である．より正確には次の定理が成り立つ；

定理 7.4.1 $F\mapsto f_F$ は複素線形同型写像

$$S_\delta(\Gamma_J,\chi)\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}_\delta(\Gamma_J\backslash Sp(V)_J, \chi_J^{-1}, \pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$$

を与える．従って $F\in S_\delta(\Gamma_J,\chi)$ と $\alpha\in V_\delta^*$ に対して

$$\theta_{F\otimes\alpha}(g) = (\dim\delta)^{1/2}\langle\alpha, f_F(g)\rangle \qquad (g\in Sp(V)_J)$$

とおくと，$F\otimes\alpha\mapsto\theta_{F\otimes\alpha}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$S_\delta(\Gamma_J,\chi)\otimes_{\mathbb{C}}V_\delta^*\tilde{\to}L^2(\Gamma_J\backslash Sp(V)_J;\chi_J;\check{\pi}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}},\check{\delta})$$

に延長される．

7.5 　実斜交空間 (V,D) の偏極 $V=W'\oplus W$ をとり，$\mathbb{Z}$-格子 $L'\subset W', L\subset W$ は

$$L'=\{x\in W'\mid\langle x,L\rangle\subset\mathbb{Z}\}$$

なるものとして $\Lambda=L'\oplus L$ とおく．$H(\Lambda)$ のユニタリ指標

$$\chi_\Lambda:H(\Lambda)\to\mathbb{C}^1\qquad(((x,y),t)\mapsto\mathbf{e}\left(t+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle\right))$$

に対して

$$Sp_0(\Lambda)=\{\gamma\in Sp(\Lambda)\mid\chi_\lambda(h^\gamma)=\chi_\Lambda(h)\text{ for }\forall h\in H(\Lambda)\}$$

は $Sp(\Lambda)$ の部分群で，十分大きな $0<N\in\mathbb{Z}$ をとれば $Sp(\Lambda,N)\subset Sp_0(\Lambda)$ であるから，$Sp(\Lambda,N)\subset\Gamma\subset Sp_0(\Lambda)$ なる部分群 Γ をとる．$\Gamma_J=\Gamma\ltimes H(\Lambda)$ のユニタリ指標

$$\chi_{\Lambda,J}:\Gamma_J\to\mathbb{C}^1\qquad((\gamma,h)\mapsto\chi_\Lambda(h))$$

からの誘導表現 $\pi^{\chi_{\Lambda,J}}=\mathrm{Ind}_{\Gamma_J}^{Sp(V)_J}\chi_{\Lambda,J}$ を考える．$Sp(V)$ の二重被覆群

$$\varpi:\widetilde{Sp}(V)=\widetilde{Sp}(V;z_0)\to Sp(V)$$

に対して $\widetilde{\Gamma}-\varpi^{-1}(\Gamma)\subset\widetilde{Sp}(V)$ とおく．$\widetilde{Sp}(V)_J=\widetilde{Sp}(V)\ltimes H(V)$ とおき，自然な射影 $\varpi_J:\widetilde{Sp}(V)_J\to SP(V)_J$ を通して $\widetilde{\pi}^{\chi_{\Lambda,J}}=\pi^{\chi_{\Lambda,J}}\circ\varpi_J$ を $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現とみれば

$$\widetilde{\pi}^{\chi_{\Lambda,J}}=\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J}\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}\qquad(\widetilde{\Gamma}_J=\widetilde{\Gamma}\ltimes H(\Lambda),\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}=\chi_{\Lambda,J}\circ\varpi_J)$$

である．$\widetilde{\pi}^{\chi_{\Lambda,J}}$ に定理 4.5.1 を適用しよう．実際，$\widetilde{Sp}(V)$ の Weil 表現を $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ 上に実現しておこう．このとき $\varphi\in\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{Sp}(V)}\rho_\Lambda^{-1}$ と $\psi\in\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ に対して

$$(\varphi\boxtimes\psi)(\widetilde{g})=\varphi(\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\qquad(\widetilde{g}=(\widetilde{\sigma},h)\in\widetilde{Sp}(V)_J)$$

とおくと，$(\widetilde{\gamma},h')\in\widetilde{\Gamma}_J$ に対して

$$\begin{aligned}(\varphi\boxtimes\psi)((\widetilde{\gamma},h')\widetilde{g})&=\varphi(\widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{\gamma},h')\circ\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\\&=\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})^{-1}\varphi(\widetilde{\sigma})(\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\mathbf{r}(\gamma)\circ\Pi(h')\circ\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\\&=\varphi(\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(h')=\chi_\Lambda(h')\varphi(\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\\&=\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}(\widetilde{\gamma},h')(\varphi\boxtimes\psi)(\widetilde{g})\end{aligned}$$

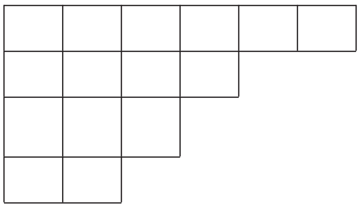
となるから $\varphi\boxtimes\psi\in\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J}\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}$ となる．更に正確には

命題 7.5.1 $\varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \boxtimes \psi$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現のユニタリ同値写像

$$(\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{Sp}(V)} \rho_\Lambda^{-1})_J \otimes \omega_J \tilde{\to} \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J} \widetilde{\chi}_{\Lambda,J}$$

に延長される．

さて $GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現 (δ, V_δ) は Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応しているとして，$m_n > n$ とする．このとき $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現のユニタリ同値(7) から反傾表現のユニタリ同値

$$\check{\pi}_{\delta \otimes \det^{-1/2}} \otimes \omega_J \tilde{\to} \check{\pi}_{\delta \otimes \overline{\mathbf{e}}}$$

を得る．ここで $\check{\pi}_{\delta \otimes \overline{\mathbf{e}}}$ の最小の $\widetilde{K}$-タイプ $\check{\delta}$ は $\check{\pi}_{\delta \otimes \det^{-1/2}}$ の最小の $\widetilde{K}$-タイプ $\check{\delta} \otimes \det^{1/2}$ と ω_J の最小の $\widetilde{K}$-タイプ $\det^{-1/2}$ のテンソル積に対応する．ところで 5.3 節で見たように $\psi \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)} \chi_\Lambda$ を $\det^{-1/2}$-ベクトルとすると

$$(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1) = \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\mathrm{Im}\sigma(z_0))^{1/4} \vartheta(g(z_0, 0)),$$

$(\widetilde{g} = (\widetilde{\sigma}, h) \in \widetilde{Sp}(V)_J)$ である．但し

$$\vartheta(z, w) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l, lz\rangle + \langle l, w\rangle\right) \qquad ((z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}})$$

である．さて Jacobi 尖点形式 $F \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ と $\alpha \in V_\delta^*$ に対して $\theta_{F \otimes \alpha} \in \mathrm{Ind}_{\Gamma_J}^{Sp(V)_J} \chi_J$ をみれば

$$\theta_{F \otimes \alpha}(g) = \theta_{f \otimes \alpha}(\widetilde{\sigma}) \cdot (\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1) \qquad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J)$$

なる $f \in S_{\delta \otimes \det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma}, \rho_\Lambda^{-1})$ が定まる．即ち

$$\begin{aligned} &\eta(g; z_0, 0) J_\delta(\sigma, z_0)^{-1} F(g(z_0, 0)) \\ =&J_{1/2}(\widetilde{\sigma}, z_0) J_\delta(\sigma, z_0)^{-1} f(\sigma(z_0)) \times \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\mathrm{Im}\sigma(z_0))^{1/4} \vartheta(g(z_0, 0)) \end{aligned}$$

$(\widetilde{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \widetilde{Sp}(V))$，よって

$$F(z, w) = \det(2\mathrm{Im}\, z_0)^{1/4} f(z) \vartheta(z, w) \qquad ((z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J})$$

である．よって定理 5.5.3 から次の定理を得る；

定理 7.5.2 $m_n > n$ のとき，Jacobi 尖点形式 $F \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} f(z) &= \det(2\mathrm{Im}\, z_0)^{-1/4} \det(2\mathrm{Im}\, z)^{1/2} \\ &\quad \times \int_{W_\mathbb{C}/\Lambda_z} F(z,w)\overline{\vartheta(z,w)}\kappa_z(w,w)d_z(w)(z \in \mathfrak{H}_V) \end{aligned}$$

とおくと，$F \mapsto f$ は $S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ から $S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma}, \rho_\Lambda)$ への複素線形同型写像である．

7.6 $V = \mathbb{R}^{2n}$ 上の交代形式を $D(x,y) = xJ_n\, {}^t y$ ($J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$) により定義し，実斜交空間 (V, D) の偏極 $V = W' \oplus W$ を

$$W' = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}$$

により定める．$(x,0) = x, (0,y) = y$ によりそれぞれ $W' = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^n$ と同一視する．W', W の $\mathbb{Z}$-格子を

$$L' = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Z}^n\}, \qquad L = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}^n\}$$

として $\Lambda = L' \oplus L$ とおく．$f \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対して

$$f'(z) = f(z/2) = f(\mathrm{Ad}(\tau^{-1})z) \qquad (\tau = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GSp(V))$$

とおくと $f' \in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$ である．ここで

$$\Gamma = \tau\Gamma_0(4)\tau^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(\Lambda) \,\middle|\, b \equiv c \equiv 0 \pmod 2 \right\}$$

は $Sp_0(\Lambda)$ の部分群であり，$GL_\mathbb{C}(W_\mathbb{C})$ の既約表現 $\delta = \det^k$ をとる．一方，$F \in J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ に対して

$$F'(z,w) = F(2z,w) = F(\mathrm{Ad}(\tau)(z,w))$$

とおくと，任意の

$$g = (\gamma, h) \in \tau^{-1}Sp(\Lambda)_J\tau = \tau^{-1}Sp(\Lambda)\tau \ltimes H(\Lambda\tau)$$

に対して

$$F'(g(z,w)) = \chi_\Lambda(h)\eta(g;z,w)^{-1} \det J(\gamma,z)^k F'(z,w)$$

となる．更に

$$F''(z,w) = \sum_{h \in H(\Lambda\tau)\backslash H(\Lambda)} \chi_\Lambda(h)^{-1}\eta(h;z,w)F'(h(z,w))$$

とおくと $F'' \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ となるから，定理 7.5.2 に従って F'' に対応する $S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$ の元を求めよう．ここで，定理 5.5.3 から，$r, s \in L'$ に対して

$$\int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda'_z} \theta_r(2z, w)\overline{\theta_s(2z, w)}\kappa_z(w, w)d_z(w) = \begin{cases} 2^n \det(2\mathrm{Im}\, z)^{-1/2} & r \equiv s \pmod{2L'}, \\ 0 & r \not\equiv s \pmod{2L'} \end{cases}$$

$(\Lambda'_z = \{xz + y \mid x \in 2L', y \in L\})$ であることと

$$\vartheta(z, w) = \sum_{r \in L'/2L'} \theta_r(2z, w)$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
&\int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} F''(z, w)\overline{\vartheta(z, w)}\kappa_z(w, w)d_z(w) \\
&= \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} \sum_{\lambda \in \Lambda_z/\Lambda'_z} F'(z, w + \lambda)\overline{\vartheta(z, w + \lambda)}\kappa_z(w + \lambda, w + \lambda)d_z(w) \\
&= \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda'_z} F'(z, w)\overline{\vartheta(z, w)}\kappa_z(w, w)d_z(w) \\
&= 2^n \det(2\mathrm{Im}\, z)^{-1/2} \sum_{r \in L'/2L'} f_r(2z)
\end{aligned}$$

となる．よって $F'' \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ には

$$\sum_{r \in L'/2L'} f_r(2z) \in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$$

が対応する．即ち $\displaystyle\sum_{r \in L'/2L'} f_r(4z) \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ が対応する．

8　有元素点での様子

8.1　　局所コンパクト群上の帯球関数の一般論を復習しておく．詳細は Tamagawa [18], Gaal [4] 等を参照のこと．2.1 節の設定を思い出そう．即ち，G は局所コンパクト・ユニモジュラー群で，K はそのコンパクト部分群，A は G の中心 $Z(G)$ の閉部分群として，χ を A の連続なユニタリ指標とする．K の自明な一次元ユニタリ表現を $\mathbf{1}_K$ と書いて，簡単のために $\mathcal{H} = C_c(G/A, \chi; \mathbf{1}_K)$ とおく．即ち，$\mathcal{H}$ は G 上の複素数値連続関数 φ であって

1) 任意の $a \in A$ に対して $\varphi(ax) = \chi(a)^{-1}\varphi(x)$,
2) G/A 上の関数 $\dot{x} \mapsto |\varphi(x)|$ の台はコンパクト,
3) 任意の $k, k' \in K$ に対して $\varphi(kxk') = \varphi(x)$

なるもののなす複素ベクトル空間を，G/A 上の畳込み積

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{G/A} \varphi(xy)\psi(y^{-1})d_{G/A}(\dot{y})$$

により $\mathbb{C}$-代数としたものである．さて θ を G 上の複素数値連続関数として，任意の $a \in A$ に対して $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$ であるとすると，任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\widehat{\theta}(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(x)\theta(x)d_{G/A}(\dot{x}), \qquad \check{\theta}(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(x)\theta(x^{-1})d_{G/A}(\dot{x})$$

が定義される．そこで G 上の**帯球関数**を次のように定義する；

定義 8.1.1 G 上の複素数値連続関数 θ が

1) 任意の $a \in A$ に対して $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$,
2) 任意の $k \in K$ に対して $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$,
3) $\widehat{\theta} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像

を満たすとき，θ を中心指標 χ をもつ K に関する G 上の帯球関数と呼ぶ.

上のような帯球関数の全体を $\Theta(G/A, \chi, K)$ と書こう．帯球関数の基本的な性質として

命題 8.1.2 $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$ に対して

1) 任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して $\varphi * \theta = \theta * \varphi = \check{\theta}(\varphi) \cdot \theta$,
2) θ は両側 K-不変で $\theta(1) = 1$,
3) $\displaystyle\int_K \theta(xky)d_K(k) = \theta(x)\theta(y)$.

逆にこれらの性質により帯球関数が特徴付けられる；

定理 8.1.3 G 上の複素数値可側関数 θ で，任意の $a \in A$ に対して $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$ であり，G/A 上の関数 $\dot{x} \mapsto |\theta(x)|$ が G/A 上局所可積分であるとき，次は同値である；

1) $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$,
2) θ は両側 K-不変で $\theta(1) = 1$ かつ，任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して $\varphi * \theta = \lambda_\varphi \cdot \theta$ $(\lambda_\varphi \in \mathbb{C})$,
3) $\theta \neq 0$ かつ $\displaystyle\int_K \theta(xky)d_K(k) = \theta(x)\theta(y)$,
4) 任意の $k \in K$ に対して $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$ であって，$\widehat{\theta} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像.

$\mathcal{H}$ に特殊な移送を導入しよう．コンパクト部分集合 $M \subset G/A$ をとり，$\mathrm{supp}[\dot{x} \mapsto |\varphi(x)|] \subset M$ なる $\varphi \in \mathcal{H}$ の全体を $\mathcal{H}_M$ と書くと，$\mathcal{H}_M$ は $|\varphi| =$

$\sup_{\dot{x}\in G/A}|\varphi(x)|$ をノルムとする複素 Banch 空間となる．$\mathcal{H}=\bigcup_M \mathcal{H}_M$ だから，部分集合 $V\subset\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ における開集合であることを，任意のコンパクト部分集合 $M\subset G/A$ に対して $V\cap\mathcal{H}_M$ が $\mathcal{H}_M$ における開部分集合なることと定義する．すると任意の $0<r\in\mathbb{R}$ に対して，$\{\varphi\in\mathcal{H}\mid|\varphi|<r\}$ は $\mathcal{H}$ の開部分集合となるから，$\mathcal{H}$ は局所凸 Hausdorff 空間となる．このとき

定理 8.1.4　1) $\theta\in\Theta(G/A,\chi,K)$ に対して，$\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\widehat{\theta}:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ は連続である，

2) 連続な全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\lambda:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ に対して，$\widehat{\theta}=\lambda$ なる $\theta\in\Theta(G/A,\chi,K)$ が唯一存在する．

保型形式の Hecke 作用素との関連で考えるときには，K が G の開コンパクト部分群である場合が重要である．この場合には

命題 8.1.5 K が G の開コンパクト部分群ならば，$\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像は全て連続である．

従ってこの場合，$\theta\mapsto\widehat{\theta}$ は $\Theta(G/A,\chi,K)$ から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathcal{H},\mathbb{C})\setminus\{0\}$ への全単射を与える．

8.2　　$p\neq 2$ を有限素点として，加法群 $\mathbb{Q}_p$ の非自明なユニタリ指標を $\chi=\mathbf{e}_p$ とする．ここで

$$\mathbf{e}_p:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\tilde{\to}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ni\dot{t}\mapsto e^{-2\pi\sqrt{-1}t}\in\mathbb{C}^1$$

である．$\mathbb{Q}_p$-斜交空間 (V,D) の偏極 $V=W'\oplus W$ を一つ固定しておく．$\mathbb{Z}_p$-格子 $L\subset W$ をとり

$$L'=\{x\in W'\mid\langle x,L\rangle\subset\mathbb{Z}_p\}\qquad(\langle x,y\rangle=D(x,y)\text{ for }x\in W',y\in W)$$

とおいて $\mathbb{Z}_p$-格子 $\Lambda=L'\oplus L\subset V$ を定める．$p\neq 2$ だから $H[\Lambda]=\Lambda\times\mathbb{Z}_p$ は $H(V)$ の開コンパクト部分群である．

$$K=\{\sigma\in Sp(V)\mid\Lambda\sigma=\Lambda\}$$

は $Sp(V)$ の開コンパクト部分群であり，$H[\Lambda]$ に $(x,t)^\sigma=(x\sigma,t)$ により作用して，半直積 $K_J=K\ltimes H[\Lambda]$ は $Sp(V)_J$ の開コンパクト部分群となる．K_J の自明な 1 次元表現を $\mathbf{1}_{K_J}$ として，8.1 節の一般論に従って

$$\mathcal{H}_J=C_c(Sp(V)_J/Z(H(V)),\chi;\mathbf{1}_{K_J})$$

とおく．即ち，$\mathcal{H}_J$ は，$Sp(V)_J$ 上の複素数値連続関数 φ であって

1) 任意の $a\in Z(H(V))=\mathbb{Q}_p$ に対して $\varphi(ag)=\chi(a)^{-1}\varphi(g)$,

2) 任意の $k, k' \in K_J$ に対して $\varphi(kgk') = \varphi(g)$,

3) $Sp(V)_J/Z(H(V))$ 上の連続関数 $\dot{g} \mapsto |\varphi(g)|$ の台はコンパクト

なるもの全体のなす複素ベクトル空間を畳込み積

$$(\varphi * \psi)(g) = \int_{Sp(V)_J/Z(H(V))} \varphi(gx^{-1})\psi(x) d_{Sp(V)_J/Z(H(V))}(\dot{g})$$

により $\mathbb{C}$-代数としたものである．ここで L の $\mathbb{Z}_p$-基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を一つ固定して $v'_i \in L'$ を $\langle v'_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ により定める．このとき $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$p^\alpha \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W') \text{ s.t. } p^\alpha v'_i = p^{\alpha_i} v'_i, \quad p^\alpha \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W) \text{ s.t. } p^\alpha v_i = p^{\alpha_i} v_i$$

とおくと ${}^t p^\alpha = p^\alpha$ となる．そこで $\mathrm{d}(p^\alpha) = \begin{bmatrix} p^\alpha & 0 \\ 0 & p^{-\alpha} \end{bmatrix} \in Sp(V)$ とおくと

$$Sp(V) = \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} K\mathrm{d}(p^\alpha)K \quad (\Upsilon = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0\})$$

である．更に，任意の $\varphi \in \mathcal{H}_J$ に対して

$$\mathrm{supp}\varphi \subset \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} K_J \mathrm{d}(p^\alpha) K_J Z(H(V))$$

であることが示される．そこで任意の $\alpha \in \Upsilon$ に対して，$Sp(V)_J$ の開コンパクト部分集合 $K_J\mathrm{d}(p^\alpha)K_J$ の特性関数を φ_α とすると，$\varphi_\alpha \in C_c(Sp(V)_J; \mathbf{1}_{K_J})^o$ だから，7 頁の方法に従って $\varphi_{\alpha,\chi} \in \mathcal{H}_J$ とおくと，$\{\varphi_{\alpha,\chi}\}_{\alpha \in \Upsilon}$ が $\mathcal{H}_J$ の $\mathbb{C}$-上の基底となる．ここで $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix} \in GSp(n, \mathbb{Q}_p) = GSp(V)$ とおくと，$g \mapsto g' = \varepsilon g^{-1} \varepsilon^{-1}$ が $Sp(V)_J$ の反自己同型写像で $\varphi_{\alpha,\chi}(g') = \varphi_{\alpha,\chi}(g)$ $(\alpha \in \Upsilon)$ となるから，$\mathcal{H}_J$ は可換代数でることがわかる．更に Murase [13] により $\mathcal{H}_J$ の構造は詳しく調べられていて，我々に必要な部分を書けば

命題 8.2.1 $\mathcal{H}_J$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な可換整域である．

8.3 $p \neq 2$ から $k \in K$ に対して $\mathbf{r}'_\chi(k) = (k, \mathbf{r}_\chi(k)) \in \widetilde{Sp}(V)$ であることが示される．そこで $\widetilde{K} = \mathbf{r}'_\chi(K)$ とおくと，これは $\widetilde{Sp}(V)$ の開コンパクト部分群である．$p^\alpha \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$ $(\alpha \in \mathbb{Z}^n)$ に対して，(3) に従って $\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha) \in \widetilde{Sp}(V)$ を定めれば

$$\widetilde{Sp}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in \Upsilon} \widetilde{K}\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\widetilde{K}\mathrm{Ker}(\varpi_\chi)$$

となる．そこで $\alpha \in \Upsilon$ に対して，$\widetilde{Sp}(V)$ のコンパクト開部分集合 $\widetilde{K}\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\widetilde{K}$ の特性関数を ψ_α とおくと，$\psi_\alpha \in C_c(\widetilde{Sp}(V); \mathbf{1}_{\widetilde{K}})^o$ だから，7 頁の方式に従って $\psi_{\alpha,\nu} \in \mathcal{H} = C_c(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi_\chi), \nu; \mathbf{1}_{\widetilde{K}})^o$ を定義する．ここで ν は

$\mathrm{Ker}(\varpi_\chi)$ の唯一の非自明なユニタリ指標である．$\{\psi_{\alpha,\nu}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ は $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底である．

さて $(\omega_J, L^2(W'))$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ に既約ユニタリ表現で，$\widetilde{K}$-不変ベクトルは L' の特性関数 $\varphi_{L'}$ の定数倍に限るから，付随する $\widetilde{Sp}(V)_J$ の帯球関数を $\Phi(g) = (\omega_J(g)\varphi_{L'}, \varphi_{L'})$ $(g \in \widetilde{Sp}(V)_J)$ とおくと

1) $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\Phi(\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)) = (p^{1/2}\cdot\eta_p)^{-|\alpha|}$, 但し $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 及び $\eta_p = \gamma_\chi(Q_1)\gamma_\chi(-p\cdot Q_1)$ とおく，
2) $\mathrm{supp}(\Phi) = \bigsqcup_{\alpha\in\Upsilon} \widetilde{K}_J\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\widetilde{K}_J\cdot(\mathrm{Ker}(\varpi_\chi)\times Z(H(V)))$

である．次の命題は Shintani [17] による；

命題 8.3.1 $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\varphi_J(\sigma, h) = \varphi(\widetilde{\sigma})\cdot\overline{\Phi(\widetilde{\sigma}, h)} \quad ((\sigma,h)\in Sp(V)_J, \widetilde{\sigma}\in\widetilde{Sp}(V)\ \mathrm{s.t.}\ \varphi_\chi(\widetilde{\sigma}) = \sigma)$$

とおくと，$\varphi \mapsto \varphi_J$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_J$ への $\mathbb{C}$-代数の同型写像を与える．

8.4 二重被覆群 $\widetilde{Sp}(V)$ と Jacobi 群 $Sp(V)_J$ 上の帯球関数の関係を考えよう．まず

命題 8.4.1 $\theta \in \Theta(\widetilde{SP}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi_\chi), \nu, \widetilde{K})$ に対して，$Sp(V)_J$ 上の連続関数 θ_J を

$$\theta_J(\sigma, h) = \theta(\widetilde{\sigma})\Phi(\widetilde{\sigma}, h) \qquad (\varpi(\widetilde{\sigma}) = \sigma)$$

により定義すると，$\theta_J \in \Theta(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$ である．

そこで $\mathcal{H}_J$ と $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$-基底 $\{\varphi_{\alpha,\chi}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ と $\{\psi_{\alpha,\nu}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ を用いて，複素線形同型写像 $T : \mathcal{H}_J \tilde{\to} \mathcal{H}$ を $T\varphi_{\alpha,\chi} = (p^{1/2}\cdot\eta_p^{-1})^{|\alpha|}\psi_{\alpha,\nu}$ $(\alpha\in\Upsilon)$ により定義しよう．すると

定理 8.4.2 1) T は $\mathcal{H}_J$ から $\mathcal{H}$ への $\mathbb{C}$-代数の同型写像で，命題 8.3.1 で与えた同型写像の逆写像となる，
2) 任意の $\theta \in \Theta(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K})$ に対して $\widehat{\theta}\circ T = \widehat{\theta_J}$ となる．

ここから直ちに次の系が得られる；

系 8.4.3 $\theta \mapsto \theta_J$ は $\Theta(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi_\chi), \nu, \widetilde{K})$ から $\Theta(Sp(V)_J/Z(H(V))), \chi, K_J)$ への全単射を与える．

$\widetilde{Sp}(V)$ の既約ユニタリ表現 τ で，$\tau|_{\mathrm{Ker}(\varpi)} = \nu$ かつ自明でない $\widetilde{K}$-不変ベクトルをもつもの全体を $\mathcal{R}(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K})$ とおく．又，$Sp(V)_J$ の既約ユニタリ表現 π で，$\pi|_{Z(H(V))} = \chi$ かつ自明でない K_J-不変ベクトルをもつもの全体を $\mathcal{R}(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$ とかく．$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_J$ はともに可換だ

から，これらの既約表現の $\widetilde{K}$-不変ベクトル，或いは K_J-不変ベクトルは 1 次元となり，既約表現は対応する帯球関数によって定まるから（定理 2.3.3）．従って上で示したことから次の定理が示される；

定理 8.4.4 $\tau \mapsto \pi = \tau_J \otimes \omega_J$ は全単射

$$\mathcal{R}(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K}) \tilde{\to} \mathcal{R}(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$$

を与え，対応する帯球関数は $\theta_\pi = (\theta_\tau)_J$ となる．

参考文献

[1] W.L.Baily,Jr. and A.Borel : *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains* (Ann. of Math. 84 (1966), 442–528)

[2] J.Dixmier : C^*-algebras (North-Holland, 1982)

[3] M.Eichler and D.Zagier : Theory of Jacobi Forms (Progress in Math. 55 (1985))

[4] S.A.Gaal: Linear analysis and representation theory (Die Grund. math. Wiss. Einzel. 198, Springer-Verlag, 1973)

[5] S.Gelbart, I.Piatetski-Shapiro, S.Rallis : Explicit Constructions of Automorphic L-Functions (Lecture Notes in Math. 1254, Springer-Verlag, 1980)

[6] R.Godement : *Généralités sur les formes modulaires, I,II* (Séminaire H.Cartan, 1957/58)

[7] Harish-Chandra : *Invariant eigen distributions an a semisimple Lie group* (Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 457-508)

[8] Harish-Chandra (Notes by G. van Dijk) : Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups (Lecture Notes in Math. 162, Springer-Verlag, 1970)

[9] R.Howe : *Transcending classical invarinat theory* (J. of American Math. Soc. 2 (1989), 535–552)

[10] T.Ibukiyama : *On Jacobi forms and Siegelmodular forms of half integral weights* (Comment. Math. Univ. St. Pauli 41 (1992), 109–124

[11] J.-I.Igusa : Theta Functions (Die Grundlehren der math. Wiss. Einz. 194, Springer-Verlag, 1972)

[12] G.Lion, M.Vergne : The Weil representation, Maslov index and Theta series (Progress in Math. vol.6, Birkhäuser, 1980)

[13] A.Murase : *L-functions attached to Jacobi forms of degree n, Part I. The basic identity* (J. reine angew. Math. 401 (1989), 122–156)

[14] I.Satake : *Caractérisation de l'espace des Spitzenformen* (Séminaire H. Cartan 1957/58)

[15] I.Satake : *Factors of automorphy and Fock representations* (Advances in Math. 7 (1971), 83–110)

[16] I.Satake : Algebraic Structures of Symmetric Domains (Math. Soc. Japan, Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980)

[17] T.Shintani : unpublished nonte

[18] T.Tamagawa : *On Selberg's trace formula* (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8 (1960), 363–386)

[19] A.Weil :*Sur certauns groupes d'opérateurs unitaires* (Acta math. 111 (1964), 143–211)

SAITO KUROKAWA LIFTING FOR LEVEL N

伊吹山知義

1. Introduction

サマースクールのときに解説した、レベル N のヤコービ形式から、レベル N のジーゲル保型形式への Saito Kurokawa lifting (この部分については Maass lift と呼ぶ人もいる）について述べるのが目的であるが、すでにアクセプトされた論文 [9] で詳細に論じており、そこで述べたことを日本語で繰り返すのも無駄なように思う。そこで、アウトラインと若干の注意だけ述べることにしたい。一方で、特にレベルが 1 でないヤコービ形式については、[13] 以外に、あまり詳細に論じた文献がなく、[13] も日本ではあまり知られていないと思うし、また論文 [9] などでも初等的な部分については論文という性格上詳細に論ずることはできなかった。そこで、この部分を敢えて少し詳しく解説することにする。

なお、Saito Kurokawa lift について述べた論文はこれが初めてというわけではない。他の著者の結果については、論文 [9] の文献および [3], [4], [12], [19] などを参照されたい。[9] で得られている結論はおおざっぱに言って次のとおりである。H_n を n 次のジーゲル上半空間とする。

(1) レベル N の指標付（trivial でもよい）の 1 次の index 1 のヤコービ形式（つまり $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数）からレベル N の指標付 の 2 次ジーゲル保型形式へのリフトが具体的に構成される。この構成による写像は単射である。
(2) もとのヤコービ形式がカスプ形式ならば、リフトされたものもカスプ形式である。
(3) 以上のリフトの L 関数の間の関係は具体的に記述される。
(4) 実際の構成を目指すならば、もとのレベル N のヤコービ形式が具体的に必要になるが、index が何であっても、このようなヤコービ形式を具体的に与える、わかりやすい Kramer の方法が存在する。実際に index 1 のときは、レベル 5 まではこの方法で決定した (cf. [9])。（ちなみにヤコービ形式は、たとえレベルが付いていても、半整数保型形式との自然な同型対応が存在するが、この方向の話とは少し異なる。）

2. 1 次のヤコービ形式

n 次のジーゲル上半空間 H_n を通常通り

$$H_n = \{Z = {}^tZ \in M_n(\mathbb{C}); Z = X + iY, X, Y \in M_n(\mathbb{R}), Y > 0\}$$

と定義する。n 次のシンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ をつぎで定義する。

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \{g \in M_{2n}(\mathbb{R}); gJ_n\,{}^tg = J_n\},$$

ここで、$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ また 1_n は n 次の単位行列とした。また $GSp^+(n,\mathbb{R})$ を次で定義する。

$$GSp^+(2,\mathbb{R}) = \{g \in M_{2n}(\mathbb{R}); gJ_n\,{}^tg = n(g)J_n, 0 < n(g) \in \mathbb{R}\}.$$

ヘッケ作用素などを考えるときには GSp^+ が必要となる。整数 k を固定する。 H_n 上の関数 $F(Z)$ の空間への $GSp^+(n,\mathbb{R})$ の作用を、$g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in GSp^+(n,\mathbb{R})$ に対して

$$(F|_k[g]) = \det(CZ+D)^{-k}F(gZ), \quad gZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

で定義する。

次に１次のヤコービ形式を定義したい。ヤコービ形式を定義するのにふさわしい実代数群は、$Sp(2,\mathbb{R})$ の極大放物型部分群で１次元カスプに対応するものの一部をとるのが自然である。つまり、次の群 $J(\mathbb{R})$ を実ヤコービ群と呼ぶことにする。

$$J(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset P_1(\mathbb{R}),$$

ただしここで、 $ad - bc = 1$ $(a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R})$, $\lambda,\, \mu,\, \kappa \in \mathbb{R}$ で

$$P_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{R}) \right\}$$

と置いた。任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して、$e(x) = exp(2\pi ix)$ と書こう。また $Z \in H_2$ に対して、その成分を $Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)$ と書く。$H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f(\tau,z)$ と $\omega \in H_1$ と正の整数 m に対して、$F(Z) = f(\tau,z)e(m\omega)$ を考えると任意の $g \in J(\mathbb{R}) \subset Sp(2,\mathbb{R})$ の元に対して、$F|_k[g] = \tilde{f}(\tau,z)e(m\omega)$ となる ω によらない函数 $\tilde{f}(\tau,z)$ が存在することが容易にわかる。このときの $f \to \tilde{f}$ が $J(\mathbb{R})$ の $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数の空間への作用を与える。(具体的な $\tilde{f}$ の形は 2.1 に書く。)

$J(R)$ の元を簡単に、$(g,((\lambda,\mu),\kappa))$ $(g \in SL_2(\mathbb{R}))$ と書くことにする。ここで成分が全部整数の部分群を $J(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})^J$ と書くことにする。$H(\mathbb{R}) = \{(1,((\lambda,\mu),\kappa)); \lambda,\mu,\kappa \in \mathbb{R}\}$ からなる部分群を Heisenberg group と呼ぶことがある。この群の元を簡単のために $((\lambda,\mu),\kappa)$ と書く。また κ は作用に関係しないことも多いので、特に、$\lambda,\, \mu \in \mathbb{Z}$ のときなどには、しばしば $(\lambda,\mu) = ((\lambda,\mu),0)$ と省略して書く。

ヤコービ形式を定義するときに、実のヤコービ群 $J(\mathbb{R})$ の離散部分群として何を取るべきかは、目的による。たとえば $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散群

Γ のジーゲル保型形式との関係で考えるならば、$\Gamma \cap J(\mathbb{R})$ を考えるのが自然である。ここで今

$$H(\mathbb{Z}) = \{(1, ((\lambda, \mu), \kappa); \lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと、一般に $\Gamma \cap J(\mathbb{R})$ は $H(\mathbb{Z})$ を含まず、たとえば、$H(\mathbb{Z})$ の元に適当な合同条件などをつけた小さな群などしか含まないことも多い。しかし $J(\mathbb{R})$ の離散群として $H(\mathbb{Z})$ を含まないものをとると、理論がいろいろな意味で面倒になるのは間違いない。このせいか、$H(\mathbb{Z})$ を含まないような群について、正面切って論じた文献は、よく知らない。とりあえずの我々の目的 (Saito-Kurokawa lift) には必要ないので、我々は

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}); c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

とおき、$\Gamma_0(N)^J = \{(g,1); g \in \Gamma_0(N)\} \cdot H(\mathbb{Z})$ という半直積で定義される $J(\mathbb{Z})$ の部分群を考えて、これをレベル N のヤコービ群と呼ぶことにする。χ を modulo N の Dirichlet 指標として、これを $\chi(g) = \chi(d)$ として $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に拡張する。これは $\Gamma_0(N)^J$ にも自然に拡張される。以下一般論は述べずに $\Gamma_0(N)^J$ だけについて述べる。

2.1. **ヤコービ形式の定義.** 領域 $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f(\tau, z)$ に対して、次の作用を考える。$g \in GL_2(\mathbb{R})$ $(\det(g) = l > 0)$ と $((\lambda, \mu), \kappa) \in H(\mathbb{R})$ に対して、

$$(f|_{k,m}[g])(\tau, z) = (c\tau + d)^{-k} e^{ml} \left(-\frac{cz^2}{c\tau + d} \right) f \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{lz}{c\tau + d} \right),$$

$$(f|_m[((\lambda, \mu), \kappa)])(\tau, z) = e^m(\lambda^2 \tau + 2\lambda z + \lambda\mu + \kappa) f(\tau, z + \lambda\tau + \mu).$$

また $(\tau, z) \in H_1 \times \mathbb{C}$ に対して、$q = e(\tau)$, $\zeta = e(z)$ と書く。

$H_1 \times \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(\tau, z)$ は次の 3 つの条件を満たす時に、ウェイト k index m の $\Gamma_0(N)^J$ の指標 χ つきのヤコービ形式という。

(i) $f|_{k,m}[g] = \chi(g) f \quad (g \in \Gamma_0(N))$.

(ii) $f|_m[(\lambda, \mu)] = f \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{Z})$.

(iii) 任意の $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$f|_{k,m}[g] = \sum_{n, r \in \mathbb{Q}} c_g(n, r) q^n \zeta^r$$

とするとき、$4nm - r^2 \geq 0$ でないなら $c_g(n, r) = 0$ である。

以上のヤコービ形式の空間を $J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ と書く。更にヤコービ形式 ϕ が上の条件の (iii) を次の条件 (iii') に置き換えたものを満たす時、ヤコービカスプ形式という。

(iii') 任意の $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$4nm - r^2 > 0$ でないならば $c_g(n, r) = 0$.

ヤコービカスプ形式の空間を $J_{k,m}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ と書く。

さて、level 1 のときはよく知られている次の補題 ([5]) を level N のときのも確認しておく。

Lemma 2.1. $f \in J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ とする。f はフーリエ展開

$$f(\tau, z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}, 4nm-r^2\geq 0} c(n,r)q^n\zeta^r$$

を持つが、フーリエ係数 $c(n,r)$ は $4nm - r^2$ および $r \bmod 2m$ のみによって決まる。特に $m = 1$ のときは $4n - r^2$ のみで決まる。

証明：関係式 $f(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e(-m(\lambda^2\tau + 2\lambda z))f(\tau, z)$ より、

$$\sum_{n,r} c(n,r)q^{n+m\lambda^2+r\lambda}\zeta^{r+2m\lambda} = \sum_{n,r} c(n,r)q^n\zeta^r$$

であるから、フーリエ展開の一意性より、任意の整数 λ について、

$$c(n,r) = c(n + m\lambda^2 + r\lambda, r + 2m\lambda) \tag{1}$$

となる。ここで、$n_1 = n+m\lambda^2+r\lambda$, $r_1 = r+2m\lambda$ とおくと、$4n_1m-r_1^2 = 4nm - r^2$, $r \equiv r_1 \bmod 2m$ となっている。一方で、$c(n,r) \neq 0$ となる組 (n,r) に対し、任意の整数の組 (n_1, r_1) が、$r \equiv r_1 \bmod 2m$ かつ、$4n_1m - r_1^2 = 4nm - r^2$ を満たすと仮定する。ここで、 $r_1 = r + 2m\lambda$ と整数 $\lambda \in \mathbb{Z}$ を定めると

$$4n_1m = r_1^2 + 4nm - r^2 = (r + 2m\lambda)^2 + 4nm - r^2 = 4m\lambda^2 + 4mr\lambda + 4nm.$$

よって、$n_1 = n+mr\lambda+m\lambda^2$. ゆえに $c(n_1, r_1) = c(n+m\lambda^2+r\lambda, r+2\lambda) = c(n,r)$ である。特に $m = 1$ ならば $4n - r^2$ によって、 $r \bmod 2$ が確定するので、$c(n,r)$ は $4n - r^2$ のみによる。q.e.d.

2.2. **Theta expansion.** 自然数 m を固定する。任意の $\nu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ に対して、$H_1 \times \mathbb{C}$ 上のテータ関数を

$$\vartheta_{\nu,m}(\tau, z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e((p + \frac{\nu}{2m})^2 m\tau + (p + \frac{\nu}{2m})(2mz))$$

と定義する。テータ関数とかアーベル関数の理論でよく知られていることであるが、ヤコービ形式の定義の (ii) を満たすような $H_1 \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f(\tau, z)$ は、$\mathbb{C}$ 上の関数として、これらのテータ関数の線形結合で書ける。つまり H_1 上の正則関数 $c_\nu(\tau)$ があって、

$$f(\tau, z) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} c_\nu(\tau)\vartheta_\nu(\tau, z). \tag{2}$$

ここで、$c_\nu(\tau)$ は $f(\tau, z)$ により一意的に決まる。f が (ii) を満たすだけならばここまでで話は終わりであるが、(i) の条件から $-1_2 \in \Gamma_0(N)$ の作用によって、$f(\tau, -z) = (-1)^k\chi(-1)f(\tau, z)$ という条件がつく。もし $m = 1$ ならば、$\vartheta_{\nu,1}(\tau, z)$ は z の偶関数なので、

$$\chi(-1) = (-1)^k$$

でなければ、$f = 0$ となる。$m \neq 1$ ならば、それほど単純ではなく、$\chi(-1) = (-1)^k$ か否かに応じて、f は z について、偶関数または奇関数になる。$\vartheta_{\nu,m}(\tau, -z) = \vartheta_{-\nu,m}(\tau, z)$ であるから、偶関数も奇関数もテータの線形結合で表すことができる。たとえば、$\chi(-1) = (-1)^k$ な

らば、偶関数という条件と、(2) の表示の一意性から、$c_\nu(\tau) = c_{-\nu}(\tau)$ となる。言い換えると、

$$(3) \qquad f(\tau, z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} c_\nu(\tau) \times (\vartheta_\nu(\tau, z) + \vartheta_{-\nu}(\tau, z))/2$$

となるのである。$\nu \equiv -\nu \bmod 2m$ となるのは、$\nu \equiv 0 \bmod m$ のときのみだから、$\nu = 0, \nu = m$ のときだけ $\vartheta_\nu(\tau, z) = \vartheta_{-\nu}(\tau, z)$ となる。以下の都合上、$0 \le \nu \le m$ に対して、

$$\theta_\nu(\tau, z) = \frac{1}{2}(\vartheta_\nu(\tau, z) + \vartheta_{-\nu}(\tau, z))$$

と置き、あらためて

$$f(\tau, z) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(\tau)\theta_\nu(\tau, z)$$

と書くのが分かりやすいと思う。これをテータ展開と呼ぶことにする。($f(\tau, z)$ が奇関数のときは、テータの差をとることになるので、$m-1$ 個の線形結合になる。これは別扱いにしなければならないが、どうせ同様なので以下でも偶関数の時のみを考える。)

2.3. **Taylor expansion とヤコービ形式の求め方.** ヤコービ形式 $f(\tau, z)$ は $z \in \mathbb{C}$ について正則な関数なので、$z = 0$ の周りでテーラー展開できる。この時の展開係数は τ の関数であるが、これらは保型形式にかなり近い、というのが Eichler-Zagier の理論の一部で主張されている。同様のことは高次のヤコービ形式でも、形を変えて成り立っているが (cf. [10]) それはともかく、テーラー展開と前のテータ展開を組み合わせると、１変数保型形式の知識からヤコービ形式を構成することが可能になる。これは Saito-Kurokawa lift と直接的な関係は何もないが、意外に知られていないと思うので、あえて解説する。本質的には Eichler-Zagier に述べてあることだが、Kramer [13] はレベル N のときに丁寧に論じて、１変数保型形式の知識をどうヤコービ形式に反映させられるかを調べた。なぜか Kramer は「これを実際に適用して、ヤコービ形式を求める」という方向にはまったく行かなかったようなのは大変不思議である。

2.3.1. **１変数保型形式への写像.** ヤコービ形式 $f(\tau, z) \in J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ が z に関して偶関数か奇関数かによって、Taylor 展開の述べ方が異なるが、面倒なので以下では偶関数のときのみを扱う。$g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$f|_{k,m}[g](\tau, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \chi_{l,g}(\tau) z^{2l}$$

と書く。ここで $\chi_{l,g}(\tau)$ は H_1 上の正則関数である。面倒なので、$g = 1_2$ のときは $\chi_{l,1} = \chi_l$ と書くことにする。注意として、$f|_{k,m}[g]$ もヤコービ形式の定義の条件 (ii) を満たしている。これは $H(\mathbb{Z})$ の部分が $SL_2(\mathbb{Z})$ の積で不変であることによる。ここはなかなか微妙な仮定である。(ii)

を満たす以上、$f|_{k,m}[g]$ もテータ展開を持つ。また f が偶関数ならば、$f|_{k,m}[g]$ も偶関数である。(-1_2 は $SL_2(\mathbb{Z})$ と可換だから。）よって、

$$f|_{k,m}[g](\tau,z)=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

としてよい。ここで $\theta_\nu(\tau,z)$ は g とは関係ない量であることに注意する。1 と τ に関する基本平行四辺形内での $f(\tau,z)$ の z に関するゼロ点の個数は初等的な関数論とヤコービ形式の保型性より簡単に計算できて、重複度をこめて $2m$ である ([5])。よって、f は $\chi_l(\tau)$ $(l=0,\ldots,m)$ で決まっている。言い換えると $\chi_l(\tau)$ が $l=0,\ldots,m$ に対してすべてゼロならば $f=0$ である。これは $\chi_{l,g}(\tau)$ についても同様である。ここで、$\chi_l(\tau)$ の満たすべき性質をもう少し詳しく見る。$f(\tau,z)$ を一つ固定して、その Taylor 係数 $\chi_l(\tau)$ について、

$$\xi_{k,l}(\tau)=\sum_{\mu=0}^{l]}\frac{(k+2l-\mu-2)!}{\mu!(k+2l-2)!}(-2\pi im)^\mu\frac{d^\mu}{d\tau^\mu}\chi_{l-\mu}(\tau) \tag{4}$$

と定義すると、$\xi_{k,l}(\tau)\in A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ である。(Eichler-Zagier の記号では、これは $\xi_{2l}(\tau)$ と書かれている。）ここで、$A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ はウェイトが $k+2l$ の指標 χ, レベル N の１変数正則保型形式の空間である。以上により、

$$J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)\to A_k(\Gamma_0(N),\chi)\times A_{k+2}(\Gamma_0(N),\chi)\times\cdots\times A_{k+2m}(\Gamma_0(N),\chi)$$

なる単射線形写像が存在することになる。ここで一般にこの写像は全射ではない。たとえば $N=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ m=1,\ \chi=id$ ならば全射であるが、これは偶然であって、一般には全射でない方が普通である。$\xi_{k,2l}(\tau)$ の定義の式を逆に解いて、$\chi_l(\tau)$ で表すことができる。実際、Eichler-Zagier [5] p. 34 (12) にあるように

$$\chi_l(\tau)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(2\pi im)^\mu(k+2l-2\mu-1)!}{(k+2l-\mu-1)!\mu!}\xi_{k,l-\mu}^{(\mu)}(\tau)$$

となる。よって、ヤコービ形式から $(\xi_{k,2l}(\tau))_{0\le l\le m}$ への写像の像が分かれば、ヤコービ形式の空間は決定されていることになる。次節ではこれをもう少し詳しく、いつ $(\xi_{k+2l}(\tau))_{0\le l\le m}$ がヤコービ形式から来るかという問題意識で調べることにする。

2.3.2. **連立１次方程式.** 今、テーラー展開とテータ展開を組み合わせて、$c_\nu(\tau)$ と $\chi_l(\tau)$ の間の関係式を求めることにする。そこで、今、ヤコービ形式の定義の条件 (ii) を満たすような任意の正則関数 $f(\tau,z)$、および $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ についてテーラー展開

$$f(\tau,z)|_{k,m}[g]=\sum_{l=0}^{\infty}\chi_{l,g}(\tau)z^{2l}$$

とテータ展開

$$f(\tau,z)|_{k,m}[g]=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

の両方を考える。両辺を z で偶数回微分して、そののちに $z=0$ とおくという操作を考えると、$2m$ 階まで考えて、次の関係式を得る。

$$\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\partial_z^{2l}\theta_m(\tau,z)|_{z=0}=(2l)!\chi_{l,g}(\tau).\quad (0\le l\le m). \tag{5}$$

ここで、$\partial_z=\frac{\partial}{\partial z}$ としている。しかしテータ関数は heat equation を満たす、つまり

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta_m(\tau,z)=\frac{4m}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_m(\tau,z)$$

であるから、∂_z^{2l} は定数倍を除き、∂_τ^l に置き換えてよい。(ただし $\partial_\tau=\frac{\partial}{\partial\tau}$.) さて、我々は、今は $f(\tau,z)$ を未知として、これの情報を $\chi_{l,g}$ から得たいという立場なので、以上の関係式を、$c_{\nu,g}(\tau)$ を未知関数、$\chi_{l,g}(\tau)$ を既知関数とする連立１次方程式とみなす。連立１次方程式であるから、まず正方行列

$$A=(\partial_\tau^l\theta_\nu(\tau,z))_{0\le l\le m,0\le\nu\le m}$$

の行列式が何かは気になるところである。これは以下で必ずしも必要なわけではないが、一応求めておこう。結論は $\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^\infty(1-q^n)$ とおくとき、$\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ の 0 でない定数倍になる。この理由を下に説明する。今 τ_i $(0\le i\le m)$ を $m+1$ 個の H_1 を動く変数とする。$(\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_m)\in H_1^{m+1}$ 上の関数 $f(\tau_0,\ldots,\tau_m)$ に作用する微分作用素

$$\mathbb{D}=\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\ \partial_{\tau_0}&\cdots&\partial_{\tau_m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \partial_{\tau_0}^m&\cdots&\partial_{\tau_m}^m\end{vmatrix}$$

を考える。また H_1 上の関数 $h(\tau)$ と $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{R})$ に対して、$f|_k[g]=(c\tau+d)^{-k}f(g\tau)$ とかく。ここで k は整数または半整数として、半整数のときは分岐を一つ指定しておくことにする。この手の微分作用素の一般論 (cf. e.g. [8]) の簡単な応用問題として、任意の $g\in SL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}&Res_{\tau_l=\tau}(\mathbb{D}((\prod_{l=0}^{m}(c\tau_l+d)^{-k}f(g\tau_0,\ldots,g\tau_m))\\ &\qquad\qquad=(Res_{\tau_l=\tau}\mathbb{D}f(\tau_0,\ldots,\tau_m))|_{(m+1)k+m(m+1)}[g]\end{aligned}$$

となることがわかる。ここで $Res_{\tau_l=\tau}$ はすべての変数 τ_l を同じ τ 置き換える操作で、つまりは $H_1\to H_1\times\cdots\times H_1$ なる diagonal embedding の引き戻しとして定義している。またウェイトの変化は、もとのウェイトの作用が k のものが $m+1$ 個あるので、$(m+1)k$ がまずでて、それ以外

に微分一つにつきウェイトが 2 あがるので、$2+4+\cdots+2m=m(m+1)$ として求まる。今 $f(\tau_0,\ldots,\tau_m)=f_0(\tau_0)f_1(\tau_1)\cdots f(\tau_m)$ の場合を考えると、

$$Res_{\tau_l=\tau}\left(\mathbb{D}(f_0(\tau_0)\cdots f_m(\tau_m))\right)=\begin{vmatrix} f_0(\tau) & \cdots & f_m(\tau) \\ \partial_\tau f_0(\tau) & \cdots & \partial_\tau f_m(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_\tau^m f_0(\tau) & \cdots & \partial_\tau^m f_m(\tau) \end{vmatrix}.$$

さて、$f_\nu(\tau)=\theta_\nu(\tau,0)$ $(0\le\nu\le m)$ の場合を考えたい。

Lemma 2.2. $Res_{\tau_l=\tau}(\mathbb{D}(\theta_0(\tau)\cdots\theta_m(\tau))$ は $\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ の 0 でない定数倍である。

証明：保型性を見るために、$SL_2(\mathbb{Z})$ の作用を生成元について考えることにする。よく知られているように $SL_2(\mathbb{Z})$ は $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ と $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ で生成される。T については、$\theta_\nu(\tau+1)=e(\nu^2/4m)\theta_\nu(\tau)$ であるから、$\theta_0(\tau+1)\cdots\theta_m(\tau+1)=e((m+1)(2m+1)/24)\theta_0(\tau)\cdots\theta_m(\tau)$. 一方で J については、Igusa [11] II で非常に綺麗に解説されているテータ変換公式を応用すると、

$$\vartheta_\nu(-\tau^{-1})=\kappa(J)\sqrt{\tau/2m}\sum_{r\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}e(-r\mu/2m)\vartheta_r(\tau)$$

がわかる。ここで $\kappa(J)$ は $\sqrt{\tau}$ の分岐の取り方による定数であり、実際には 1 の 4 乗根である。ただし注意として、$\vartheta_\nu(\tau)$ はいわゆる第 2 種のテータ関数 (theta functions of the second kind) であり、Igusa に書いてあるテータ定数とはかなり違うので、その部分は、第 1 種のテータに帰着して変換の後にその意味を考えて、第 2 種の線形結合で表すなどして上手に書き換えなければならない。これにより、各 $\theta_\nu(-\tau^{-1})\tau^{-1/2}$ は $\theta_r(\tau)$ の $\mathbb{C}$ 係数線形結合であることがわかる。具体的には

$$\begin{aligned}
&\theta\nu(-\tau^{-1})(\tau)^{-1/2}\\
&=\kappa(J)\frac{1}{\sqrt{2m}}\sum_{r\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}\frac{e(-r\nu/2m)+e(r\nu/2m)}{2}\vartheta_r(\tau)\\
&=\kappa(J)\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\theta_0(\tau)+e(\nu/2)\theta_m(\tau)+\sum_{r=1}^{m-1}(e(-r\mu/2m)+e(r\mu/2m))\theta_r(\tau)\right)
\end{aligned}$$

と書けるが、具体的な表示はともかくとして、適当な定数行列があって、

$$(\theta_0(-\tau^{-1}),\ldots,\theta_m(-\tau^{-1}))\tau^{-1/2}=(\theta_0(\tau),\ldots,\theta_m(\tau))A$$

となるわけである。ここで $\tau^{1/2}$ の分岐は特に指定する必要もないのでしないが、この作用を 2 回繰り返すことにより、$A^2=\alpha 1_{m+1}$, $|\alpha|=1$ となるのは、何も計算しなくても明らかである。両辺を何回か微分して並べると、結局

$$Res(\mathbb{D}(\theta_0(\tau_0)\tau_0^{-1/2}\cdots\theta_m(\tau_m)\tau_m^{-1/2})=\det(A)Res(\mathbb{D}(\theta_0(\tau_0)\cdots\theta_m(\tau_m))$$

になるが、左辺は微分作用素の性質より

$$Res(\mathbb{D}(\theta_0(\tau_0)\cdots\theta_m(\tau_m))\big|_{(m+1)/2+m(m+1)}[J]$$

と等しいので、結局、$f(\tau) := \det(\frac{d^{2\nu}}{d\tau^{2\nu}}\theta_r)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する保型性がわかったことになる。ここでウェイトが半整数であるから、分岐が気になるので、より正確に言い換えると、任意の $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$f|_{(m+1)(2m+1)/2}[g] = c(g)f$ ($c(g)$ は定数）となるのである。しかし、$\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の multiplier つきの保型形式であって上半平面上ではどこでも消えないので、$f(\tau)/\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ はカスプ $i\infty$ のみで極を持つ可能性がある。一方で、$f(\tau)$ を定める行列式を見てみると、$\frac{d^{2l}}{d\tau^{2l}}\theta_\nu$ からは、$\nu \neq 0$ である限りは、$i\infty$ での展開は $q^{\nu^2/4m}$ から始まり、よって、$f(\tau)$ の位数も少なくとも $\sum_{\nu=1}^{m}(\nu^2/4m) = (m+1)(2m+1)/24$ である。これは $\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ の位数と等しい。よって $f(\tau)/\eta(\tau)^{(m+1)(2m+1)}$ は $i\infty$ でも正則であり、よって、定数に等しい。なお、この定数がいくつかは基本的に Vandermonde の行列式だから書けないこともないが、あまり意味がないので（それに書いても間違えそうなので）ここでは述べない。(ただしゼロでないことは $q^{(m+1)(2m+1)/24}$ の係数が消えないことがわかればよい。ここは見る必要があるが、 Vandermonde の行列式を見ればよい。)

さて、Lemma 2.2 の意味するところは、連立方程式 (5) は一意的に解けるということであり、この方程式により $c_\nu(\tau)$ が決まる、ということは $\chi_l(\tau)$ $(0 \le l \le m)$ で $f(\tau,z)$ が決まるということでもあり、前の関数論からの簡単な結果 ($2m$ 次まで消えていたら $f = 0$ になる）を最証明していることにもなっている。実は次数の高いヤコービ形式 ($H_n \times \mathbb{C}^n$ 上のヤコービ形式）では簡単な関数論の結果というのはないので、どの程度テーラー係数が消えていたらヤコービ形式が消えるかというのはもっと複雑になり、今述べてきたような手法でないと確定できない。(実例は [10] を参照).

2.3.3. **ヤコービ形式になるための十分条件 (一般の index).** 我々はヤコービ形式から出発して連立方程式 (5)（の特に $g = 1_2$ のとき）を得たのだが、逆に、$\chi_l(\tau)$ $(0 \le l \le m)$ を適当に与えて、連立１次方程式 (5) を $g = 1_2$ に対して解き、その解 $c_l(\tau)$ に対して

$$f(\tau,z) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

と定義したときに $f(\tau,z)$ がヤコービ形式になるかどうかを調べることにする。$\chi_l(\tau)$ の満たすべき十分条件については、後で述べることになるが、とりあえず $f(\tau,z)$ の変換に対する保型性とフーリエ係数の条件の２つにわけて調べよう。まず、保型性の定義の条件の (ii) であるが、これは、テータ展開で $f(\tau,z)$ を定義しているのだから明らかである。保型性の定義の条件 (i) は、まず $f|_{k,m}[g]$ も条件 (ii) は満たすことに注意する。これは、$g \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し $gH(\mathbb{Z}) = H(\mathbb{Z})g$ より明らかで

ある。よって、

$$f|_{k,m}[g]=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$$

となる H_1 上の正則関数 $c_{\nu,g}(\tau)$ が定まる。当然のことながら $c_{\nu,g}(\tau)$ と $c_\nu|_{k-1/2}[g]$ の間には直接の単純な関係はない（実際には複雑な線形結合ではあるが、今このことは使用しない。）しかし、$z=0$ での Taylor 展開の右辺と左辺に $|_{k,m}[g]$ を作用させてみれば、$c_{\nu,g}(\tau)$ を解に持つような連立１次方程式が得られる。Taylor 展開に対する作用 $\left(\sum_{l=0}^{\infty}\chi_l(\tau)z^{2l}\right)|_{k,m}[g]$ で Taylor 展開がどう変わるかは、結果的に言うと単純で、次のように記述される。前に述べた式 (4) で $\chi_l(\tau)$ から $\xi_{k,l}(\tau)$ を定義する。もとの $f(\tau,z)$ がヤコービ形式ならばこれは $A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ の元であるが、今はそうは仮定していなかった。そこで、逆に $\xi_{k,l}(\tau)\in A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ と仮定して、$\chi_l(\tau)$ を, (4) を逆に解いて、$\xi_{k,l}(\tau)$ を用いて定義することにする。また $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$\xi_{k,l,g}(\tau)=\xi_{k,l}(\tau)|_{k+2l}[g]$ と定義して、この $\xi_{k,l,g}(\tau)$ を用いて、同様の式で定義した関数を $\chi_{l,g}(\tau)$ と書くことにする。すると $f|_{k,m}[g]$ の Taylor 展開は $\sum_{l=0}^{\infty}\chi_{l,g}(\tau)z^{2l}$ になることがわかる。この事実の証明は、直接計算してしまうというのが一つのやり方であるが、そもそも $\xi_{k,l}$ を定義する微分作用素を $f(\tau,z)e(m\omega)$ なる H_2 上の関数への作用を対角 $H_1\times H_1\subset H_2$ に制限したものと解釈して、これが $(g,((0,0),0))\in J(\mathbb{R})\subset Sp(2,\mathbb{R})$ の作用と可換であることを用いるのが証明としては最もすっきりしている。これの詳しい説明は今は省略するが、いずれにしても、$f|_{k,m}[g]$ の Taylor 展開より、一般の $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対する連立１次方程式 (5) が得られる。この解 $c_{\nu,g}(\tau)$ は $\chi_l(\tau)$ により一意的に定まる。ということは $\xi_{k,l}(\tau)\in A_{k+2l}(\Gamma_0)$ であれば $g\in\Gamma_0(N)$ に対しては $\xi_{k,l}|_k[g]=\chi(g)\xi_{k,l}$ になるので、$c_{\nu,g}(\tau)=\chi(g)c_\nu(\tau)$ になり、$f|_{k,m}[g]=\chi(g)f$ となる。すなわち、f の $\Gamma_0(N)$ に対する保型性が証明されたことになる。よって、$\xi_{k,l}\in A_{k+2l}(\Gamma_0(N),\chi)$ と取る限りは、$f(\tau,z)$ はヤコービ形式の定義のうち、フーリエ係数の条件以外はすべて満たすことになる。フーリエ係数の条件はもっと複雑である。これの記述は節を改めて述べたい。念のために述べると、フーリエ係数の条件というのはあくまで１次のヤコービ形式 (つまり第１変数が H_1 に属するとき) に現れるものであって、高次の場合は Koecher 原理が成立するので (Ziegler [23])、条件は自動的に成立している。

2.3.4. **フーリエ係数の条件.** ヤコービ形式の定義の条件の (iii) (フーリエ係数の条件) というのは、任意の $g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$f|_{k,m}[g]$ のフーリエ係数 $c_g(n,r)$ は $4mn-r^2\geq 0$ でないと消えるというものであった。ここで実際には g は $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})/P_0$ (P_0 は $SL_2(\mathbb{Z})$ の上三角行列全体）だけ動くとしても良いのはすぐわかる。つまり $\Gamma_0(N)$ のカスプの代表を動くとしておけばよい。さて、$g\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$g^{-1}\Gamma_0(N)g\cap P_0=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & n_g\mathbb{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

となる $0 < n_g \in \mathbb{Z}$ が存在する。このときフーリエ展開は

$$f|_{k,m}[g] = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_g(n,r) q^{n/n_g} \zeta^r$$

となるが、$4nm - r^2 \geq 0$ でないなら $c_g(n,r) = 0$ という条件がどうなるかを見てみよう。$\theta_\nu(\tau,z)$ $(0 \leq \nu \leq m)$ のフーリエ展開に出てくる項は $q^{mp^2 \pm p\nu + \nu^2/4m} \zeta^{2mp\pm\nu}$ からなっているから、ここからは $c_g(n,r)$ のうちで $r \equiv \pm\nu \bmod 2m$ のものだけが出てくる。逆に $c_{\nu,g}(\tau)\theta_\nu(\tau,z)$ からはこのような係数しか出てこない。$f|_{k,m}[g]$ は $\tau \to \tau + n_g$ で不変であるから、$c_\nu(\tau) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} a_\alpha q^\alpha$ とすると $\alpha + \nu^2/4m \in n_g^{-1}\mathbb{Z}$ であり、よって、

$$\alpha = \frac{n}{n_g} - \frac{\nu^2}{4m}$$

と書ける。ここでフーリエ係数についての関係式 (1) は $c_g(n,r)$ についても成り立つので、

$$c_g(\alpha + mp^2 \pm p\nu + \nu^2/4m, 2mp \pm \nu) = c_g(n/n_g, \pm\nu)$$

が成立する。ここでフーリエ係数の条件は $4nm/n_g - \nu^2 \geq 0$ でなければゼロという条件ということになる。言い換えると

$$c_{\nu,g}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{\nu,g}(n) q^{n/n_g - \nu^2/4m}$$

とするとき、$4n/n_g \geq \nu^2/m$ でなければ $a_{\nu,g}(n) = 0$ となるという条件といってもよい。言い換えると $(c_{\nu,g}(\tau))_\nu$ が g に対応するカスプで正則という条件である。（正確に言えば $c_{\nu,g}(\tau)$ は $c_\nu|_{k-1/2}[g]$ ではないが、ベクトル $(c_\nu(\tau))$ を multiplier つきのベクトル値保型形式と思えるので、これがカスプで正則という言い方の方が正当であろう。）今は χ_l を与えたのちに $c_{\nu,g}(\tau)$ が決まるのだから、この条件を満たしてくれるように χ_l（あるいは $\chi_{l,g}$ あるいは $\xi_{k,l}$ ）を指定するにはどうすればよいかという話になる。まずとりあえず $n < 0$ ならば $a_{\nu,g}(n) = 0$ であることを見てみよう。その前に、 $\chi_{l,g}(\tau)$ は保型形式 $\xi_{k,\mu}|_k[g]$ を何回か微分したもの線形結合で書けているのであるから、フーリエ展開にあらわれる q のべきは、非負である。$c_{\nu,g}(\tau)$ は連立１次方程式の解で、方程式の左辺の行列式の逆数は q で高々 $(m+1)(2m+1)/24$ 位の極をもつ。よって $c_{\nu,g}(\tau)$ は $i\infty$ で高々極であり、フーリエ展開の負のべきの項は高々有限個しかない。よってこの連立１次方程式を用いて、フーリエ係数を冪の低い方から順に求めていくことができる。実際、今どこかの $0 \leq \nu \leq m$ について $a_{\nu,g}(n) \neq 0$ となる最小の n を n_0 と書くと連立１次方程式は

$$\sum_{\nu=0}^{m} \nu^{2l} a_{\nu,g}(n_0) \quad (0 \leq l \leq m)$$

が右辺から決まる既知の数という形になる。係数は Vandermonde の行列式の形だから、解は一意的に定まる。（これはもともと $c_{\nu,g}(\tau)$ は一意的に決まっていたのだから、当たり前であるが。）右辺は q の負べ

きは存在しないから、$n_0 < 0$ ならば矛盾であり、$a_{\nu,g}(n) = 0$ if $n < 0$ がわかる。

さて問題は $0 \le n/n_g < \nu^2/4m$ となる n である。これらは全部消えていてほしいのである。しかし条件は ν によるので、むしろ次のように言い換えた方がよい。まず $n = 0$ で方程式を考える。$a_{0,g}(0)$ は何でもよいが $0 < \nu$ に対しては $a_{\nu,g}(0) = 0$ であるべきだ。今まで右辺を既知、左辺の $a_{\nu,g}(n)$ を未知と考えてきたが、右辺に条件を付けようとしているのだから、これを逆に考えて、右辺のフーリエ展開の係数を未知数と考えよう。よって、今は右辺のフーリエ展開の定数項を未知数と考えて、連立１次方程式を逆行列をかけて、定数項に関する方程式を思うと、$a_{\nu,g}(0) = 0$ $(0 < \nu)$ という条件を課した方程式の解がパラメータ付で書ける。次に $n = 1$ に対するフーリエ係数の間の方程式を考える。この方程式は $n = 0$ のときの係数によっているかもしれないが、そこはすでに解が書けているのでそれを代入して置き換えておく。するとまた $1 < n_g\nu^2/4m$ となる ν についての $a_{\nu,g}(1) = 0$ という条件を方程式で書くことができる。このようにして、n/n_g が $\nu^2/4m$ を超えるまで続ければ条件がすべて得られることになる。以上はすっきりした closed formula を与えているわけではないが、少なくとも与えられたウェイトと index を持つヤコービ形式を有限回の操作で決定する方法は与えている。（逆行列の係数を用いれば、もう少し具体的に書くこともできる。）

2.3.5. **ヤコービ形式になるための条件 (index1).** 以上の説明は少々わかりにくいかもしれないが、$m = 1$ の場合はもう少しよくわかるので、この場合に詳しく状況を見てみよう。$m = 1$ ならば $\nu = 0$ または $\nu = 1$ である。また $\theta_\nu(\tau, z) = \vartheta_\nu(\tau, z)$ でもある。記号を単純にするために、$\xi_{k,0}(\tau)$, $\xi_{k,1}(\tau)$ の代わりに $f_0(\tau) \in A_k(\Gamma_0(N), \chi)$, $f_1(\tau) \in A_{k+2}(\Gamma_0(N), \chi)$ という記号を使おう。これは $f_l|_{k+2l}[g] = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu,g}(n) q^{n/n_g}$ というフーリエ展開を持つ。この場合、前に考えた連立１次方程式 (5) は

$$
\begin{aligned}
&c_{0,g}(\tau)\vartheta_0(\tau) + c_{1,g}(\tau)\vartheta_1(\tau) = (f_0|_k[g])(\tau),\\
&c_{0,g}(\tau)\vartheta_0'(\tau) + c_{1,g}(\tau)\vartheta_1'(\tau) = \frac{1}{2k}(f_0|_k[g])'(\tau) + \frac{\pi i}{4k}(f_1|_{k+2}[g])(\tau).
\end{aligned}
$$

となる。ここで $'$ は τ に関する微分を意味する。本質的に $\nu = 1$ での $a_{1,g}(n) = 0$ $(n < n_g/4)$ という条件だけが問題になる。ここで

$$
\begin{aligned}
\vartheta_0(\tau, z) &= 1 + q(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + q^4(\zeta^4 + \zeta^{-4}) + \cdots\\
\vartheta_1(\tau, z) &= q^{1/4}(\zeta + \zeta^{-1}) + q^{9/4}(\zeta^3 + \zeta^{-3}) + \cdots
\end{aligned}
$$

であるが、これより、$f|_{k,m}[g]$ の q^{n/n_g} $(0 \le n/n_g < 1/4)$ における係数は、$1/4 < 1$ なので、ϑ_ν の最初の係数と $a_{\nu,g}(n)$ にしか関係しない（つまり q^{n/n_g+1} などは $(0, 1/4)$ という範囲を超えてしまうので、考えなくて良い）ということがわかる。この範囲での関係式は

$$a_{0,g}(n) + 2a_{1,g}(n) = b_{0,g}(n)$$
$$(2\pi i)^2 a_{1,g}(n) = \frac{2\pi i n}{2kn_g} b_{0,g}(n) + \frac{\pi i}{4k} b_{1,g}(n)$$

であり、よって、$f(\tau, z)$ がヤコービ形式であるためには, $a_{1,n}(n) = 0$ $(0 \le n < n_g/4)$ が条件だから、$f_{0,g}$, $f_{1,g}$ の係数の条件は

$$b_{1,g}(n) = -\frac{4n}{n_g} b_{0,g}(n) \quad (0 \le n < n_g/4)$$

と書けることになる (cf. [13])。ここで $n = 0$ ならば、右辺はゼロだから、$b_{1,g}(0) = 0$ がすべての $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ について成り立つということになり、これは $f_1 \in S_{k+2}(\Gamma_0(N), \chi)$ ということを表している。もし $n_g \le 4$ ならば条件はこれだけであり、この場合 $J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ から $A_k(\Gamma_0(N), \chi) \times S_{k+2}(\Gamma_0(N), \chi)$ への写像 $\phi \to (f_0, f_1)$ は全単射ということになる。この場合に $J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ を１変数保型形式の情報から書くことは易しい。また $N = 1$ でこの写像が全単射であることは、すでに Eichler-Zagier [5] で注意されている。全単射にならない最小の N は $N = 5$ である。この場合の index 1 の構造は、[9] を参照されたい。

3. **Saito Kurokawa lift の定義**

前置きがかなり長くなったが、Saito Kurokawa lift の定義を述べる。前に述べたように χ は任意の (原始的とは仮定しない) $\mathrm{mod} N$ の Dirichlet character とする。

$$\Gamma_0^{(2)}(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}); C \equiv 0 \bmod N \right\}$$

とおき、$\chi(g) = \chi(\det(D))$ として χ を $\Gamma_0^{(2)}(N)$ の指標とみなす。

3.1. **Cusp forms.** ヤコービカスプ形式 $\phi(\tau, z) \in J_{k,1}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ を考える。Index 1 のヤコービ形式から、フーリエヤコービ展開を用いてジーゲル保型形式を作るには、Index が一般のヤコービ形式を構成しておくことが必要である。ヤコービ形式をヤコービカスプ形式に制限しておけば、index 0 のものを考えなくても済むという点が楽であり、この場合をまず解説する。まず index を変えるシフト作用素 V_l を定義する。普通の１変数のヘッケ作用素の理論を流用して

$$\Delta_{N,0}(l) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det(g) = l, (a, N) = 1 \right\},$$
$$\Delta_{N,0} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Delta_{N,0}(l).$$

とおくと $\Delta_{N,0}$ は半群になる。$\Delta_{N,0}$ の元 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対して、χ の値を $\chi(g) = \chi(a)^{-1}$ と定義すると、$g \in \Gamma_0(N)$ のときは $\chi(a)^{-1} = \chi(d)$

であるから、これは前の定義を一致している。次に $J_{k,m}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ 上の作用素 $V_{l,\chi}$ を

$$
\begin{aligned}
&(\phi|_{k,m}V_{l,\chi})(\tau,z)\\
&= l^{k-1}\sum_{g\in\Gamma_0(N)\backslash\Delta_{N,0}(l)}\chi(g)^{-1}\phi|_{k,m}[g]\\
&= l^{k-1}\sum_{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)\backslash\Delta_{N,0}(l)}\chi(a)(c\tau+d)^{-k}e^{lm}\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{lz}{c\tau+d}\right).
\end{aligned}
$$

と定義すると、これは $J_{k,ml}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ への写像になる。(ここの部分が B. Ramakrishnan の論文では間違っている。すべての論文で同じ間違いをしているのであまり偶然とは思えないが、そのあとの証明も明らかとしか書いていないので、よくわからない。)

これを用いて、$\phi(\tau,z)\in J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ に対して、

$$
(L_{N,\chi}\phi)(Z)=\sum_{l=1}^{\infty}(\phi|_{k,1}V_{l,\chi})(\tau,z)e^{l}(\omega).
$$

と定義する。念のために断っておくが、$\chi(-1)=(-1)^k$ でなければ、$\phi=0$ であるからこの写像はゼロになる。たとえば χ が trivial で k が奇数ならば、Saito-Kurokawa lift はそもそもゼロ以外にない。具体的にシフト作用素を半群の代表で表示して、フーリエ展開を書き下すと

$$
\phi(\tau,z)=\sum_{n,r,4n-r^2>0}c(4n-r^2)q^n\zeta^r
$$

とするとき、$Z=\begin{pmatrix}\tau&z\\z&\omega\end{pmatrix}\in H_2$ に対して、

$$
(L_{N,\chi}\phi)(Z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n,r\in\mathbb{Z},4mn-r^2>0}\sum_{a|(n,m,r),(a,N)=1}\chi(a)a^{k-1}c\left(\frac{4nm-r^2}{a^2}\right)q^n\zeta^r e(m\omega)
$$

となる。

Theorem 3.1. $L_{N,\chi}$ は $J_{k,1}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ から $S_k(\Gamma_0^{(2)}(N),\chi)$ への単射線形写像を与える。

証明のキーポイントは２つある。ひとつは離散群の生成元に関する補題である。次の記号を用意する。

$$
R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}
$$

また任意の $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $S = {}^tS \in M_2(\mathbb{R})$ に対して

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \iota(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u(S) = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}.$$

そこで $\Gamma_0^{(2)}(N)$ の生成元は次で与えられる。

Lemma 3.2 (Aoki-Ibukiyama [2] p. 265 Lemma 6.2)**.** 任意の自然数 N に対して、群 $\Gamma_0^{(2)}(N)$ は次で生成される。R, $u(x)$, $u(S)$ および $\iota(M)$. ここで x, S, M は $x \in \mathbb{Z}$, $S = {}^tS \in M_2(\mathbb{Z})$, $M \in \Gamma_0(N)$ を動く。

補題の証明は省略する。

フーリエ展開の形から $L_{N,\chi}(\phi)$ は R の作用で不変であり、フーリエヤコービ展開から他の生成元でも不変である。(χ の部分を付ければ不変という意味である。) よって群の作用で不変なのは明らかである。カスプ形式であるのは次の補題による。まず 1 次元カスプに対応する $Sp(2,\mathbb{Q})$ の極大放物部分群 P_1 を前と同様

$$P_1(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{Q}) \right\}$$

で定義する。

Lemma 3.3. ダブルコセット $\Gamma_0^{(2)}(N)\backslash Sp(2,\mathbb{Q})/P_1(\mathbb{Q})$ の代表は $P_1(\mathbb{Q})R$ の元にとることができる。ここで R は前に定義した通りである。

補題の証明は省略する。

この補題からわかることは、$A_k(\Gamma_0(N),\chi)$ の元 F をフーリエヤコービ展開したときに、index 0 の部分がゼロで、かつフーリエヤコービ係数がヤコービカスプ形式ならば、F はカスプ形式ということである。

注： サマースクールの講演中にはこのことを少し言い間違えて、$i1_2$ でのフーリエ展開 $F(Z) = \sum_T a(T)e(Tr(TZ))$ の係数 $a(T)$ が $T > 0$ 以外で消えたらカスプ形式、と主張してしまった。これは軍司君の指摘によれば正しくない。言い換えるとフーリエヤコービ係数がカスプ形式という主張はこれよりも強い。

3.2. **non-cusp forms.** 出発点の ϕ がカスプ形式でなかったら、前の論法はそのままでは通用しない。どこが正しくないかというと、次の点である。$c(0)$ はゼロとは限らないので、$4nm - r^2 = 0$ のとき、$q^n\zeta^r e(m\omega)$ の係数 $c(4nm - r^2) = c(0)$ はゼロではない。しかし、今の $L_{N,\chi}\phi$ の定義では index が 1 以上のところしか動いていないので、$m \geq 1$ となっている。ここで $n = r = 0$ のときの係数を考えると $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ の係数がゼロでなく、$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ がゼロになっているので R での不変性がなく

なっている。これを補うためには index 0 の関数、つまりは保型形式を補わなければならない。補い方は定数項を除けば、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ の係数から自動的に決まる。これが適当な定数項を加えれば 1 変数の保型形式、つまり $A_k(\Gamma_0(N),\chi)$ の元になることは証明が必要であるが、これは標準的な議論でできる（たとえば土井・三宅の本を見ればわかる。）よって、この場合にも適合するように $L_{N,\chi}\phi$ の定義を変更することができる。(詳しくは [9] を参照されたい。）よって、結局

Theorem 3.4. $J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ から $A_k(\Gamma_0^{(2)}(N),\chi)$ への単射線形写像 $L_{N,\chi}$ が存在して、フーリエ係数を用いて以上のように具体的に定義される。

注意 1: 以上の定義は関数 ϕ のみにではなく、N と χ の取り方にもよっている。つまり自然に $J_{k,1}(\Gamma_0(N_1)^J,\chi_1) \subset J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ となる場合を考えると、$\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(N_1)^J,\chi_1)$ に対して、$L_{N_1,\chi_1}\phi$ と $L_{N,\chi}\phi$ は一般に関数としては違うものなので、注意が必要である。(表現のレベルでは同じであるが。）たとえば Saito-Kurokawa lift を用いて、$A_k(\Gamma_0(N),\chi)$ の元を構成しようと思う時などには違う方がかえって都合がよいともいえるが、同じ表現空間に属しているものがすべてこれで構成できるわけでもないので、少し中途半端なところもあり、どのように考えるべきかは私はよく理解していない。

注意 2: Gritsenko によれば $J_{k,t}(SL_2(\mathbb{Z})^J)$ から paramodular form of level t への Saito-Kurokawa lift にあたるものが得られている。(類似のことをたぶん R. Schmidt が表現論的にやっている。）Skoruppa-Zagier [21] によれば、たとえば素数 p, k 偶数に対しては $J_{k,p}(SL_2(\mathbb{Z})^J)$ は $A_{2k-2}(\Gamma_0^*(p))$ ($\Gamma_0^*(p)$ は $\Gamma_0(p)$ の normalizer) と対応しているので、ここからは同時に $A_k(\Gamma_0^{(2)}(N))$ への Saito Kurokawar lift があるはずである。一方で、たとえば $J_{k,p}(SL_2(\mathbb{Z}))$ から $J_{k,1}(\Gamma_0(p)^J)$ への単射を直接構成することができる ([9])。よって、全体をスムーズに理解するためには、ヤコービ形式の方で、index の変更をこめた new form, old form 等の理論がもっと整備される方が好ましいと思うが、今のところ、たぶんきちんとした一般論は無いのではないかと思う。

4. Hecke theory と L 関数の比較

ヤコービ形式上の index を変えないヘッケ作用素と、ジーゲル保型形式上のヘッケ作用素を定義して、L 関数の関係についてみる。レベルを割る素数 p に対して、L 関数のヘッケ作用素をどう定義するかは、局所的な表現によるので、一般に一律に述べることはできないと思うが、とりあえずの定義を述べておく。ヤコービ形式 ϕ に作用するヘッケ作用素について、index を割る素数は bad prime であって、これは当然面倒であるので、$\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J,\chi)$ に限定して述べる。

$p \nmid N$ のとき

$$\phi|_{k,\chi}T_J(p) = p^{k-4}\sum_{g_\nu}\sum_{(\lambda,\mu)\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2}\chi(a_\nu)\phi|_{k,1}[g_\nu/p]|_1[\lambda,\mu] \tag{6}$$

と定義する。ここで a_ν は g_ν の $(1,1)$ 成分であり、また g_ν は

$$(7) \qquad \Gamma_0(N)\backslash\{g \in \Delta_{0,N}(p^2); gcd(g) = \square\}.$$

の代表を渉る。ただし、$\square$ は平方数、$gcd(g)$ は g の成分の最大公約数を表す。

$p|N$ のときは、ヘッケ作用素 $U_J(p)$ を (6) と同じ式だが、g_ν の動く範囲を

$$(8) \qquad \Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^2\end{pmatrix}\Gamma_0(N) = \bigcup_{b \bmod p^2}\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & p^2\end{pmatrix}.$$

としたもので定義する。ϕ が $T_J(p)$ と $U_J(p)$ の同時固有関数のときは、その固有値を $\lambda_J(p)$ と書く。

次にジーゲル保型形式 $F \in A_k(\Gamma_0^{(2)}(N),\chi)$ と、群の元 $g \in GSp^+(2,\mathbb{Q}) \cap M_4(\mathbb{Z})$ で決まるダブルコセット

$$T = \Gamma_0^{(2)}(N) g \Gamma_0^{(2)}(N) = \bigcup_\nu \Gamma_0^{(2)}(N)\begin{pmatrix}A_\nu & B_\nu\\ C_\nu & D_\nu\end{pmatrix}.$$

に対して、

$$F|_{k,\chi}T = n(g)^{2k-3}\sum_\nu \chi(\det(A_\nu))\det(C_\nu Z + D_\nu)^{-k}F((A_\nu Z+B_\nu)(C_\nu Z+D_\nu)^{-1}).$$

と定義する。さて、$p \nmid N$ なる素数 p について、$a+c=b+d$ のとき

$$T_S(p^a,p^b,p^c,p^d) = \Gamma_0^{(2)}(N)\begin{pmatrix}p^a & 0 & 0 & 0\\ 0 & p^b & 0 & 0\\ 0 & 0 & p^c & 0\\ 0 & 0 & 0 & p^d\end{pmatrix}\Gamma_0^{(2)}(N).$$

と書く。さらに $T_S(p) = T_S(1,1,p,p)$, $T_S(p^2) = T_S(1,p,p^2,p) + T(1,1,p^2,p^2) + T_S(p,p,p,p)$ と置く。一方で $p|N$ なる素数 p に対して

$$U_S(p) = \Gamma_0^{(2)}(N)\mathrm{diag}(1,1,p,p)\Gamma_0^{(2)}(N)$$

とおく。F が $T_S(p)$, $T_S(1,p,p^2,p)$, $U_S(p)$ の固有関数のときに、対応する固有値を $\lambda(p)$, $\omega(p^2)$, $\mu(p)$ と書き、F の L 関数（いわゆる Spinor L) を

$$L(s,F) = \prod_{p|N}(1-\mu(p)p^{-s})^{-1}\prod_{p\nmid N}Q_p(p^{-s})^{-1}$$

と定義する。ただしここで、

$$\begin{aligned} Q_p(p^{-s}) &= 1-\lambda(p)p^{-s} + (p\omega(p^2)+(p^2+1)\chi(p)^2p^{2k-5})p^{-2s}\\ &\quad -\lambda(p)\chi(p)^2p^{2k-3-3s}+\chi(p)^4p^{4k-6-4s}.\end{aligned}$$

と置いた。

Theorem 4.1. $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ が $T_J(p)$ $(p \nmid N)$, $U_J(p)$ $(p|N)$ の同時固有関数として、これらの固有値を $\lambda_J(p)$ と書くことにする。このとき $L_{N,\chi}\phi$ も $T_S(p)$, $T_S(p^2)$, $U_S(p)$ の同時固有関数であり、

$$\begin{aligned} L(s, L_{N,\chi}\phi) &= L(s-k+1,\chi)L(s-k+2,\chi) \\ &\quad \times \prod_{p|N}(1-\lambda_J(p)p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid N}(1-\lambda_J(p)p^{-s}+\chi(p)^2p^{2k-3-2s})^{-1} \end{aligned}$$

となる。ただし、$L(s,\chi)$ は *Dirichlet* の L 関数である。

とくに ϕ の定数項がゼロでないときは

$$L(s, L_{N,\chi}\phi) = \zeta(s)L(s-2k+3,\chi^2)L(s-k+1,\chi)L(s-k+2,\chi),$$

となる。ここで $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数である。

また、右辺の $p \nmid N$ でのオイラー因子は、$J_{k,1}(\Gamma_0(N)^J, \chi)$ の Kohnen plus space $A^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4N), \chi) \subset A_{k-1/2}(\Gamma_0(4n), \chi)$ との１対１を考え、更に Shimura 対応を通じて $A_{2k-2}(\Gamma_0(N), \chi^2)$ と対応させたときの、$A_{2k-2}(\Gamma_0(N), \chi^2)$ のオイラー因子の形をしており、もともとの Saito-Kurokawa lift の形と一致している。

証明は、ヘッケ作用素の定義と $L_{N,\chi}(\phi)|T_S(p)$ などのフーリエ係数の ϕ の係数による表示をもとに、定義通りに延々と場合分けして計算することにつきる。ヘッケ作用素を決めるコセットの代表元とそのフーリエ係数への作用の仕方などは、昔から Andrianov などによりよく知られている。この計算はかなり面倒であるが、証明の方針ははっきりしているので、結果を信じる限りは、計算を完遂しきることはそれほど困難ではない。Eichler-Zagier では、lift された空間がヘッケ作用素で不変であるということについて Andrianov [1] に依拠しているので、その分やさしくなっているが、レベル一般ではこの部分も補わねばならないのが証明が長くなる理由である。詳しくは [9] を参照されたい。

References

[1] A. N. Andrianov, Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture, Invent Math. **53** (1979), no.3, 267–280.

[2] H. Aoki and T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products, Internat. J. Math. 16(2005), 249–279.

[3] T. Arakawa, Saito-Kurokawa lifting for odd weights. Comment. Math. Univ. St. Paul. 49 (2000), no. 2, 159–176.

[4] W. Duke and Ö. Imamoḡlu, A converse theorem and the Saito-Kurokawa lift, Internat. Math. Res. Notices (1996), no.7, 347–355.

[5] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, Birkhäuser, 1985, Boston-Basel-Stuttgart.

[6] V. Gritsenko, Irrationality of the moduli spaces of polarized abelian surfaces, in *Abelian Varieties* ed. W. Barth, K. Hulek, H. Lange, de Gruyter(1995), 63–81.

[7] 伊吹山知義、A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoḡlu, 第５回整数論サマースクール「Siegel 保型形式入門」報告集、(1997), 134–176.

[8] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials, Commentarii Math. Univ. St. Pauli 48(1999), 103–118.
[9] T. Ibukiyama, Saito Kurokawa liftings of level N and practical construction of Jacobi forms, to appear in Kyoto J. Math. Vol. 52 No. 1(2012).
[10] T. Ibukiyama, Taylor expansions of Jacobi forms and applications to explicit structures of degree two. to appear in Publication RIMS.
[11] J. Igusa, On the graded ring of theta constants, Amer. J. Math. 86(1964), 219–246; (II) ibid. 86(1966), 221–236.
[12] H. Kojima, On construction of Siegel modular forms of degree two, J. Math. Soc. Japan **34**(1982), no. 3, 393–412.
[13] J. Kramer, Jacobiformen und Thetareihen, Manusctipta Math. **54** (1986), 279–322.
[14] N. Kurokawa, Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Invent. Math. **49**(1978), no.2, 129–165.
[15] H. Maaß, Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades, Math. Ann. **232**, (1978), 163–175.
[16] H. Maaß, Über eine Spezialshar von Modulformen zweiten Grades, Invent Math. **52**(1979) no.1 95–104; (II) ibid. **53**(1979), no.3 249–253; (III)ibid. **53** (1979), no.3, 255–265.
[17] H. Maaß, Über ein Analogon zure Vermutung von Saito-Kurokawa, Invent. Math. **60** (1980), 85–104.
[18] I. Makino, Dirichlet series corresponding to Siegel modular forms of degree 2, level N, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **28**(1978), no.1, 21–49. Correction: ibid.,**29** (1979), no.1, 29–30.
[19] C. Poor ande D. Yuen, A lift into Siegel modular forms over the theta group in degree two and the chiral superstring measure, MPI preprint series 2010(64).
[20] 清水英男、「保型関数」I, II, III. 岩波基礎数学講座、岩波書店
[21] N.-P. Skoruppa and D. Zagier, Jacobi forms and a certain space of modular forms. Invent. Math. 94 (1988), no. 1, 113–146.
[22] D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa(d'après H. Maass), Seminaire Delange Pisot-Poitou, Paris 1979-80, Progr. Math. 12, Birkhäuser, Boston, Mass. (1981), 371–394.
[23] C. Ziegler, Jacobi forms of higher degree, Abh. Math. Scm. Univ. Hamburg 59 (1989), 191–224.

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail address: `ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp`

テータ関数の変換公式

宮崎 直*

1 はじめに

1.1 序文

本稿の目的は，新谷氏の論文 [Shn] に沿って，テータ関数の変換公式 (一般化された Poisson 和公式) を解説する事である．§2 で Weil 表現からテータ関数の変換公式が導出される過程について説明し，§3 でテータ関数を $SL(2,\mathbf{R})\times SO(p,q)$ の被覆群に制限した場合についての具体的な計算を紹介する．§3 での計算は，保型形式のテータリフトの 1 種である織田リフトにおいて重要な役割を果たす．織田リフトについての詳細は，菅野氏による解説 [Su] を参照されたい．

本稿のおおまかな流れは [Shn] に従っているが，Heisenberg 群や Weil 表現の定義は現在よく使われているものに変更した．また，本稿を書くにあたっては，[Ta] を参考にさせて頂いた．

1.2 記号について

$z\in\mathbf{C}$ に対して，$\mathbf{e}[z]=\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ とおき，$\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}$ を $-\dfrac{\pi}{2}<\arg z^{\frac{1}{2}}\leq\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる．さらに，$k\in\mathbf{Z}$ に対して，$z^{\frac{k}{2}}=(z^{\frac{1}{2}})^k$ とおく．$t\in\mathbf{R}^\times$ に対して，$\operatorname{sgn}t=t/|t|$ とおく．絶対値 1 の複素数のなす乗法群を $\mathbf{C}^1=\{z\in\mathbf{C}^\times\mid |z|=1\}$ と表記する．

$\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に対して，V 上の急減少関数のなす空間を $\mathcal{S}(V)$，滑らかな関数のなす空間を $C^\infty(V)$，2 乗可積分な関数のなす空間を $L^2(V)$ と表記する．また，正の整数 m に対して，$\mathbf{R}^m$ の元は行ベクトルとして扱うものとする．

2 テータ関数の変換公式

2.1 Heisenberg 群

W を $\mathbf{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間とし，$\langle,\rangle$ を W 上の非退化交代形式とする．$W=X\oplus X^*$ を W の偏極 (つまり，X,X^* は $\langle X,X\rangle=\langle X^*,X^*\rangle=0$, $\dim_{\mathbf{R}}X=\dim_{\mathbf{R}}X^*=n$, $W=X\oplus X^*$

*Department of Mathematics, Rikkyo University, Nishi-Ikebukuro, Tokyo 171-8501, Japan
miyaza@ms.u-tokyo.ac.jp

をみたす W の部分空間) とし，固定しておく．以下，W の元 w が $w = x+x^*$ $(x \in X,\ x^* \in X^*)$ と分解されるとき，$w = x \oplus x^*$ と表記する事にする．

X の基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ と X^* の基底 $\{e_1^*, e_2^* \cdots, e_n^*\}$ を $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{i,j}$ となるようにとる．X 上の座標を $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ $(x_i \in \mathbf{R})$ で定めて，X 上の測度 dx を $dx = \prod_{i=1}^n dx_i$ で定義する．また，X^* 上の座標を $x^* = \sum_{i=1}^n x_i^* e_i^*$ $(x_i^* \in \mathbf{R})$ で定めて，X^* 上の測度 d^*x^* を $d^*x^* = \prod_{i=1}^n dx_i^*$ で定義する．ここで，dx_i, dx_i^* は $\mathbf{R}$ 上の通常の Lebesgue 測度であるとする．このとき，$f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，Fourier 変換を

$$\hat{f}(x^*) = \int_X f(x)\mathbf{e}[-\langle x, x^* \rangle]dx \qquad (x^* \in X^*)$$

で定義し，$f \in \mathcal{S}(X^*)$ に対して，逆 Fourier 変換を

$$\check{f}(x) = \int_{X^*} f(x^*)\mathbf{e}[\langle x, x^* \rangle]d^*x^* \qquad (x \in X)$$

で定義すると，Fourier 反転公式 $\check{\hat{f}} = f$ が任意の $f \in \mathcal{S}(X)$ で成立する．

集合 $H(W) = W \times \mathbf{R}$ に演算を

$$(w, t) \cdot (w', t') = \left(w + w',\ t + t' + \frac{1}{2}\langle w, w' \rangle \right) \qquad (w, w' \in W,\ t, t' \in \mathbf{R})$$

で定める事で定義される群を Heisenberg 群という．このとき，$H(W)$ の中心は $Z(H(W)) = \{(0, t) \in H(W) \mid t \in \mathbf{R}\} \simeq \mathbf{R}$ である．

任意の $r \in \mathbf{R}^\times$ に対して，$H(W)$ の $L^2(X)$ 上のユニタリ表現 U_r を

$$U_r(h)f(y) = \mathbf{e}\left[r\left(t + \frac{1}{2}\langle x, x^* \rangle + \langle y, x^* \rangle \right) \right] f(y + x)$$
$$(h = (x \oplus x^*, t) \in H(W),\ f \in L^2(X))$$

によって定義する．Heisenberg 群の表現を扱う上では，次の 3 つの定理は基本的である．

定理 2.1. 任意の $r \in \mathbf{R}^\times$ に対して，$(U_r, L^2(X))$ は $H(W)$ の既約ユニタリ表現である．

定理 2.2 (Stone-von Neumann の定理)**.** $r \in \mathbf{R}^\times$ とする．$H(W)$ の既約ユニタリ表現 (Π, V_Π) が $\Pi(0, t) = \mathbf{e}[rt]$ $(t \in \mathbf{R})$ をみたすとき，(Π, V_Π) は $(U_r, L^2(X))$ とユニタリ同値である．

定理 2.3 (Schur の補題)**.** $(\Pi, V_\Pi), (\Pi', V_{\Pi'})$ を $H(W)$ の既約ユニタリ表現とする．このとき，(Π, V_Π) から $(\Pi', V_{\Pi'})$ への連続 $H(W)$-準同型写像全体のなす空間は高々1 次元である．

今後，U_1 を U と略記する事にする．

2.2　R 上での Weil 表現

この節では，$\mathbf{R}$ 上での Weil 表現について復習する．詳しくは，松本氏による解説 [Ma] を参照されたい．

$Sp(W)$ を W 上の斜交群，すなわち，

$$Sp(W) = \{\sigma \in GL(W) \mid \langle w\sigma, w'\sigma\rangle = \langle w, w'\rangle\ (\forall w, w' \in W)\}$$

とする．ここで，$GL(W)$ は W に右から作用しているものとする．$Sp(W)$ の $H(W)$ への右作用を

$$h^\sigma = (w\sigma, t) \qquad\qquad (h = (w,t) \in H(W),\ \sigma \in Sp(W))$$

で定義しておく．

$L^2(X)$ のユニタリ自己同型写像 T 全体のなす群 $\mathrm{Aut}(L^2(X))$ は全ての $f \in L^2(X)$ に対して $T \mapsto Tf$ が連続となる最弱の位相に関して Hausdorff 位相群になる．$Mp(W)$ を

$$U(h^\sigma) = T^{-1} \circ U(h) \circ T \qquad\qquad (\forall h \in H(W)) \tag{2.1}$$

をみたす (σ, T) のなす $Sp(W) \times \mathrm{Aut}(L^2(X))$ の部分群とすると，$Mp(W)$ は部分位相によって局所 compact な Hausdorff 位相群となる．ここで，Stone-von Neumann の定理より，射影 $Mp(W) \ni (\sigma, T) \mapsto \sigma \in Sp(W)$ は全射である事に注意しておく．

$Mp(W)$ の部分群として，$Sp(W)$ の 2 重被覆群を構成しよう．そのために少し準備をする．$\sigma \in Sp(W)$ に対して，

$$w\sigma = (xa + x^*c) \oplus (xb + x^*d) \qquad\qquad (\forall w = x \oplus x^* \in W)$$

によって定まる $a \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X)$, $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X, X^*)$, $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X)$, $d \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X^*)$ をとり，$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と行列表示する．また，$c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X)$ に対して，$\det^* c = \det(\langle e_i^* c,\ e_j^*\rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$ と定義する．

$\det^* c \neq 0$ となる $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(W)$ に対して，$\mathrm{r}_0(\sigma) \in \mathrm{Aut}(L^2(X))$ を

$$(\mathrm{r}_0(\sigma)f)(x) = |\det^* c|^{\frac{1}{2}} \int_{X^*} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\langle xa + x^*c, xb + x^*d\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x^*\rangle\right] f(xa + x^*c)d^*x^* \qquad (f \in \mathcal{S}(X))$$

を連続に拡張したものとして定義する．このとき，$\mathrm{r}(\sigma) = (\sigma, \mathrm{r}_0(\sigma)) \in Mp(W)$ であり，次の (1),(2) をみたす連続群準同型写像 $\Psi\colon Mp(W) \to \mathbf{C}^1$ が唯 1 つ存在する:

(1) $\Psi(1, t) = t^2 \quad (\forall t \in \mathbf{C}^1)$,

(2) $\Psi(\mathrm{r}(\sigma)) = (\sqrt{-1})^n \dfrac{\det^* c}{|\det^* c|} \quad \left(\forall \sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(W) \ \text{ s.t. } \det^* c \neq 0\right)$.

ここで，$\widetilde{Sp}(W) = \operatorname{Ker}\Psi$ とおくと，連続群準同型写像

$$\varpi\colon \widetilde{Sp}(W) \ni (\sigma, T) \mapsto \sigma \in Sp(W)$$

は全射で $\operatorname{Ker}\varpi = \{(1, \pm 1)\}$ であり，$\widetilde{Sp}(W)$ は $Sp(W)$ の非自明な 2 重被覆群になっている．

このとき，$\widetilde{Sp}(W)$ の $L^2(X)$ 上のユニタリ表現が

$$\omega\colon \widetilde{Sp}(W) \ni (\sigma, T) \mapsto T \in \operatorname{Aut}(L^2(X))$$

により定義される．このユニタリ表現 $(\omega, L^2(X))$ を Weil 表現という．

Ψ の性質 (1),(2) と Schur の補題より，$\varpi(\tilde{\sigma}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(\det^* c \neq 0)$ となる $\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(W)$ に対して，ある複素数 $\epsilon_\omega(\tilde{\sigma})$ が存在して，$\{\epsilon_\omega(\tilde{\sigma})\}^2 = \left((\sqrt{-1})^n \dfrac{\det^* c}{|\det^* c|}\right)^{-1}$ かつ $\omega(\tilde{\sigma}) = \epsilon_\omega(\tilde{\sigma})\mathrm{r}_0(\varpi(\tilde{\sigma}))$ が成立する．

2.3 誘導表現

L と L' をそれぞれ X と X^* の $\mathbf{Z}$-格子とし，$\psi\colon \Lambda \to \mathbf{C}^\times$ を $H(W)$ の部分群 $\Lambda = (L \oplus L') \times \mathbf{R}$ のユニタリ指標とする．ここで，ψ から誘導される $H(W)$ のユニタリ表現 $(\rho_\psi, I_\Lambda(\psi))$ を定義しよう．表現空間 $I_\Lambda(\psi)$ を

$$I_\Lambda(\psi)^\infty = \{\theta \in C^\infty(H(W)) \mid \theta(\lambda h) = \psi(\lambda)\theta(h)\ (\forall \lambda \in \Lambda)\}$$

を内積

$$\begin{aligned} \langle \theta_1, \theta_2 \rangle_\Lambda &= \int_{\Lambda\backslash H(W)} \theta_1(h)\overline{\theta_2(h)}dh \\ &= \frac{1}{\operatorname{vol}(X^*/L')} \int_{(X/L)\times(X^*/L')} \theta_1(x \oplus x^*, 0)\overline{\theta_2(x \oplus x^*, 0)}dx d^*x^* \end{aligned} \tag{2.2}$$

について完備化した Hilbert 空間とし，$H(W)$ の作用を右移動

$$\rho_\psi(h)\theta(z) = \theta(zh) \qquad (h \in H(W),\ \theta \in I_\Lambda(\psi))$$

で定める．ここで，$\operatorname{vol}(X^*/L') = \displaystyle\int_{X^*/L'} d^*x^*$ とし，dh は (2.2) の 2 つめの等号が成立するような $\Lambda\backslash H(W)$ 上の右 $H(W)$ 不変測度とする．この dh の正規化の仕方は少し不自然だが，この後の議論をする上で都合が良い．

X の $\mathbf{Z}$-格子 L に対して，L の $\langle , \rangle$ に関する双対格子 $L^* = \{l^* \in X^* \mid \langle l, l^* \rangle \in \mathbf{Z}\ (\forall l \in L)\}$ をとる．M^* を L^* の部分格子とし，M^* の $\langle , \rangle$ に関する双対格子 $M = \{l \in X \mid \langle l, l^* \rangle \in \mathbf{Z}\ (\forall l^* \in M^*)\}$ をとる．つまり，

$$\begin{array}{ccccc} L & \subset & M & \cdots & X \text{ の } \mathbf{Z}\text{-格子} \\ \text{双対}\updownarrow & & \text{双対}\updownarrow & & \\ L^* & \supset & M^* & \cdots & X^* \text{の } \mathbf{Z}\text{-格子} \end{array}$$

とする．$\Lambda_0 = (L \oplus L^*) \times \mathbf{R}$, $\Lambda_1 = (L \oplus M^*) \times \mathbf{R} \subset H(W)$ とおく．Λ_1 のユニタリ指標 $\chi\colon \Lambda_1 \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\chi(\lambda) = \mathbf{e}\left[t + \frac{1}{2}\langle l, l^*\rangle\right] \qquad (\lambda = (l \oplus l^*, t) \in \Lambda_1)$$

で定義する．$\mu \in M/L$ に対して，Λ_0 のユニタリ指標 $\chi_\mu\colon \Lambda_0 \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\chi_\mu(\lambda) = \mathbf{e}\left[t + \frac{1}{2}\langle l, l^*\rangle + \langle \mu, l^*\rangle\right] \qquad (\lambda = (l \oplus l^*, t) \in \Lambda_0)$$

で定義する．このとき，$\chi_\mu|_{\Lambda_1} = \chi$ だから $I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ は $I_{\Lambda_1}(\chi)$ の $H(W)$-不変な閉部分空間であり，簡単な議論によって，

$$I_{\Lambda_1}(\chi) = \bigoplus_{\mu \in M/L} I_{\Lambda_0}(\chi_\mu) \tag{2.3}$$

と分解される事が分かる．実際，$\theta \in I_{\Lambda_1}(\chi)$ に対して，$\theta^\mu \in I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ を

$$\theta^\mu(h) = \frac{1}{\#(M/L)} \sum_{\lambda \in \Lambda_1 \backslash \Lambda_0} \chi_\mu(\lambda)^{-1}\theta(\lambda h)$$

で定義すると，$\theta = \sum_{\mu \in M/L} \theta^\mu$ が成立する．ここで，$\#(M/L)$ は M/L の位数を表す.

命題 2.4. 以下が成立する:

(1) $I_{\Lambda_1}(\chi)$ の分解 (2.3) は内積 $\langle , \rangle_{\Lambda_1}$ に関する直交分解である.

(2) $\mu \in M/L$ と $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，$\Theta_{\chi_\mu}(f) \in I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ を

$$\Theta_{\chi_\mu}(f)(h) = \sum_{l \in L} \mathbf{e}\left[t + \frac{1}{2}\langle x, x^*\rangle + \langle \mu + l, x^*\rangle\right] f(x + \mu + l) \quad (h = (x \oplus x^*, t) \in H(W))$$

で定義する．このとき，Θ_{χ_μ} を連続に拡張して $L^2(X)$ から $I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ へのユニタリ $H(W)$-同型写像が得られる.

(3) $\nu \in M/L$ と $\theta \in I_{\Lambda_1}(\chi)^\infty$ に対して，$F_{\chi_\nu}(\theta) \in L^2(X)$ を

$$F_{\chi_\nu}(\theta)(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(X^*/M^*)} \int_{X^*/M^*} \theta((x - \nu) \oplus x^*, 0)\mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\langle x + \nu, x^*\rangle\right] d^*x^* \quad (x \in X)$$

で定義する．このとき，F_{χ_ν} を連続に拡張して $(\rho_\chi, I_{\Lambda_1}(\chi))$ から $(U, L^2(X))$ への連続 $H(W)$-準同型写像が得られる.

(4) (2),(3) で定義した Θ_{χ_μ} と F_{χ_ν} に対して，

$$F_{\chi_\nu} \circ \Theta_{\chi_\nu} = \mathrm{id}_{L^2(X)}, \qquad F_{\chi_\nu} \circ \Theta_{\chi_\mu} = 0 \quad (\nu \neq \mu)$$

が成立する.

この命題は Fourier 級数展開の理論と指標の直交性を用いれば，直接計算によって確かめる事ができる．分解 (2.3) において，$\langle , \rangle_{\Lambda_1}$ を各 $I_{\Lambda_0}(\chi_\mu)$ に制限して得られる内積は，$\langle , \rangle_{\Lambda_0}$ と一致する．また，この命題と Schur の補題より，$(U, L^2(X))$ から $(\rho_\chi, I_{\Lambda_1}(\chi))$ への連続 $H(W)$-準同型写像は Θ_{χ_μ} 達の線型結合で表せる事に注意しておこう.

2.4　テータ関数の変換公式

$Sp(L \oplus M^*)$ を

$$(L \oplus M^*)\gamma = L \oplus M^*, \qquad \chi(\lambda^\gamma) = \chi(\lambda) \quad (\forall \lambda \in \Lambda_1)$$

をみたす $\gamma \in Sp(W)$ のなす $Sp(W)$ の部分群とし．$\widetilde{Sp}(L \oplus M^*) = \varpi^{-1}(Sp(L \oplus M^*))$ とおく．また，$\mu \in M/L$ と $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，$\widetilde{Sp}(W)$ 上のテータ関数 $\vartheta_f(\tilde{\sigma};\mu)$ を

$$\vartheta_f(\tilde{\sigma};\mu) = \Theta_{\chi_\mu}(\omega(\tilde{\sigma})f)(0,0) = \sum_{l \in L}(\omega(\tilde{\sigma})f)(x+\mu+l)$$

で定義する．

定理 2.5 (テータ関数の変換公式)**.** $\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*)$ と $\mu \in M/L$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\gamma}\tilde{\sigma};\mu) = \sum_{\nu \in M/L} C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\vartheta_f(\tilde{\sigma};\nu) \qquad (\forall f \in \mathcal{S}(X)) \tag{2.4}$$

が成立するような複素数 $C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)$ $(\nu \in M/L)$ が存在する．

$M/L = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ $(N = \#(M/L))$ とおくと，行列 $C_{\tilde{\gamma}} = (C_{\tilde{\gamma}}(\mu_i,\mu_j))_{i,j=1,\cdots,N}$ はユニタリ行列であり，$C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2} = C_{\tilde{\gamma}_1}C_{\tilde{\gamma}_2}$ $(\forall \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*))$ が成立する．

さらに，$\varpi(\tilde{\gamma}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と表すと $\det^* c \neq 0$ となるとき，$C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)$ は，

$$C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu) = \frac{\epsilon_\omega(\tilde{\gamma})|\det^* c|^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{vol}(X^*/M^*)} \sum_{l \in L/M^*c^*} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\langle \mu+l, (\mu+l)ac^{-1}\rangle - \langle \mu+l, \nu c^{-1}\rangle + \frac{1}{2}\langle \nu, \nu c^{-1}d\rangle\right] \tag{2.5}$$

で与えられる．ここで，c^* は $\langle x_1^*c, x_2^*\rangle = \langle x_2^*c^*, x_1^*\rangle$ $(\forall x_1^*, x_2^* \in X^*)$ で定まる $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X)$ の元とする．

証明. 群準同型写像 $Sp(L \oplus M^*) \ni \gamma \mapsto \Xi_\gamma \in \mathrm{Aut}(I_{\Lambda_1}(\chi))$ を $(\Xi_\gamma\theta)(h) = \theta(h^\gamma)$ $(\theta \in I_{\Lambda_1}(\chi))$ で定義すると，$\Xi_\gamma \circ \rho_\chi(h^\gamma) = \rho_\chi(h) \circ \Xi_\gamma$ $(\forall h \in H(W))$ が成立する．よって，$\tilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*)$ に対して，$\gamma = \varpi(\tilde{\gamma})$ とおくと，$\Xi_{\gamma^{-1}} \circ \Theta_{\chi_\mu} \circ \omega(\tilde{\gamma})$ は $(U, L^2(X))$ から $(\rho_\chi, I_{\Lambda_1}(\chi))$ へのユニタリ $H(W)$-準同型写像になる．よって，ある複素数 $C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)$ $(\nu \in M/L)$ が存在して，

$$\Xi_{\gamma^{-1}} \circ \Theta_{\chi_\mu} \circ \omega(\tilde{\gamma}) = \sum_{\nu \in M/L} C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\Theta_{\chi_\nu} \tag{2.6}$$

が成立する．この両辺による $\omega(\tilde{\sigma})f$ $(\tilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(W), f \in \mathcal{S}(X))$ の像を考え，$(0,0) \in H(W)$ での値をとると (2.4) が得られる．

また，$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \widetilde{Sp}(L \oplus M^*)$ に対して，$\gamma_1 = \varpi(\tilde{\gamma}_1)$，$\gamma_2 = \varpi(\tilde{\gamma}_2)$ とおくと，

$$\Xi_{(\gamma_1\gamma_2)^{-1}} \circ \Theta_{\chi_{\mu_i}} \circ \omega(\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2) = \Xi_{\gamma_2^{-1}} \circ (\Xi_{\gamma_1^{-1}} \circ \Theta_{\chi_{\mu_i}} \circ \omega(\tilde{\gamma}_1)) \circ \omega(\tilde{\gamma}_2) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

となる．この両辺に (2.6) を用いると，左辺は $\sum_{j=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2}(\mu_i,\mu_j)\Theta_{\chi_{\mu_j}}$ となり，右辺は

$$\Xi_{\gamma_2^{-1}} \circ \left(\sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)\Theta_{\chi_{\mu_k}}\right) \circ \omega(\tilde{\gamma}_2) = \sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)\left(\sum_{j=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_2}(\mu_k,\mu_j)\Theta_{\chi_{\mu_j}}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k) C_{\tilde{\gamma}_2}(\mu_k,\mu_j)\right)\Theta_{\chi_{\mu_j}}$$

となるから，$C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2}(\mu_i,\mu_j) = \sum_{k=1}^{N} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu_i,\mu_k)C_{\tilde{\gamma}_2}(\mu_k,\mu_j)$ を得る．これより，$C_{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2} = C_{\tilde{\gamma}_1}C_{\tilde{\gamma}_2}$ が得られる．

L^2-ノルムの値が 1 であるような $f \in \mathcal{S}(X)$ をとり，

$$\mathbf{V}_f = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbf{C}\Theta_{\chi_{\mu_i}}(f) \subset I_{\Lambda_1}(\chi)$$

とおくと，$C_{\tilde{\gamma}}$ は $\mathbf{V}_f$ 上の 2 種類の正規直交基底 $\{\Xi_{\gamma^{-1}}\Theta_{\chi_{\mu_i}}(\omega(\tilde{\gamma})f)\}_{i=1}^{N}$ と $\{\Theta_{\chi_{\mu_i}}(f)\}_{i=1}^{N}$ の変換行列であるから，ユニタリ行列である．

最後に (2.5) を示す．(2.6) の両辺による $\omega(\tilde{\gamma}^{-1})f$ $(f \in \mathcal{S}(X))$ の像を考えると，

$$\Xi_{\gamma^{-1}}\Theta_{\chi_\mu}(f) = \sum_{\nu \in M/L} C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\Theta_{\chi_\nu}(\omega(\tilde{\gamma}^{-1})f)$$

となる．さらに命題 2.4(4) より，

$$F_{\chi_\nu}(\Xi_{\gamma^{-1}}\Theta_{\chi_\mu}(f)) = C_{\tilde{\gamma}}(\mu,\nu)\omega(\tilde{\gamma}^{-1})f. \tag{2.7}$$

この両辺を定義に基づいて計算して比較する事で，(2.5) が得られる． □

3 $\widetilde{SL}(2,\mathbf{R}) \times SO(Q)$ 上でのテータ級数の変換公式

3.1 簡約双対ペア $(SL(2,\mathbf{R}), O(Q))$

まず，$J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R})$ とおき，$\mathbf{R}^2$ 上の非退化交代形式 $\langle , \rangle_J$ を $\langle r, r' \rangle_J = rJ\,{}^t r'$ $(r, r' \in \mathbf{R}^2)$ で定義する．このとき，$\sigma \in SL(2,\mathbf{R})$ に対して，

$$\langle r\sigma, r'\sigma \rangle_J = \langle r, r' \rangle_J \qquad\qquad (\sigma \in SL(2,\mathbf{R}))$$

が成立する．また，$Q \in M_n(\mathbf{Q})$ を符号 (p,q) の非退化な対称行列，つまり，ある $g_Q \in GL(n,\mathbf{Q})$ が存在して $Q = g_Q \begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix} {}^t g_Q$ が成立するものとし，$p > 0$ と仮定する．$\mathbf{R}^n$ 上に非退化対称形式 $(,)_Q$ を $(x, x')_Q = xQ\,{}^t x'$ $(x, x' \in \mathbf{R}^n)$ で定義し，$(,)_Q$ に関する直交群 $O(Q)$ を

$$O(Q) = \{g \in GL(n,\mathbf{R}) \mid (xg, x'g)_Q = (x,x')_Q \ (\forall x, x' \in \mathbf{R}^n)\}$$

$$= \{g \in GL(n, \mathbf{R}) \mid gQ{}^t g = Q\}$$

で定義する．

基本的に，この章では前章と同じ記号を用いるが，W, $\langle , \rangle$, X, X^*, e_i, e_i^* は次のように具体的にとる．$W = \mathbf{R}^n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^2$ とし，W 上の非退化交代形式 $\langle , \rangle$ を

$$\langle x \otimes r, x' \otimes r' \rangle = (x, x')_Q \langle r, r' \rangle_J \qquad (x \otimes r, x' \otimes r' \in W)$$

で定義する．W の偏極 $W = X \oplus X^*$ を

$$X = \mathbf{R}^n \otimes_{\mathbf{R}} (1, 0), \qquad X^* = \mathbf{R}^n \otimes_{\mathbf{R}} (0, 1).$$

として固定し，$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間としての同型写像

$$X \ni x \otimes (1, 0) \mapsto x \in \mathbf{R}^n, \qquad X^* \ni x \otimes (0, 1) \mapsto x \in \mathbf{R}^n$$

によって X, X^* を共に $\mathbf{R}^n$ と同一視する．この同一視の下で，X の基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底 (つまり，e_i は第 i 成分が 1 で他の成分が 0 である $\mathbf{R}^n$ の元) とし，X^* の基底 $\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ を $e_i^* = e_i Q^{-1}$ によって定める．このとき，dx は $\mathbf{R}^n$ 上の通常の Lebesgue 測度であり，$d^*x = |\det Q| dx$ となる．$L^2(X)$ 上の Weil 表現は Q のとり方に依存して決まるため，今後，$\omega(\tilde{\sigma})$，$r_0(\sigma)$ をそれぞれ $\omega(\tilde{\sigma}, Q)$，$r_0(\sigma, Q)$ と書く事にする．

$SL(2, \mathbf{R})$ と $O(Q)$ は，それぞれ

$$(x \otimes r)\sigma = x \otimes (r\sigma) \qquad (x \otimes r \in W,\ \sigma \in SL(2, \mathbf{R})),$$
$$(x \otimes r)g = (xg) \otimes r \qquad (x \otimes r \in W,\ g \in O(Q))$$

によって定まる W への作用によって $Sp(W)$ の部分群と見なせる．このとき，$(SL(2, \mathbf{R}), O(Q))$ は $Sp(W)$ に含まれる簡約双対ペア，すなわち，

$$SL(2, \mathbf{R}) = \{\sigma \in Sp(W) \mid \sigma g = g\sigma\ (\forall g \in O(Q))\},$$
$$O(Q) = \{g \in Sp(W) \mid \sigma g = g\sigma\ (\forall \sigma \in SL(2, \mathbf{R}))\}$$

をみたす．ここで，$SO(Q) = SL(n, \mathbf{R}) \cap O(Q)$ とおく．この章の目標は，$\varpi^{-1}(SL(2, \mathbf{R}))$ と $\varpi^{-1}(SO(Q))$ の構造を明らかにする事と，テータ関数 $\vartheta_f(\tilde{\sigma}; \mu)$ を $SL(2, \mathbf{R})SO(Q) (\subset Sp(W))$ の被覆群に制限した場合についてテータ関数の変換公式をより具体的な形に書き下す事である．

注意 3.1. 本稿では，簡単のためにテータ関数 $\vartheta_f(\tilde{\sigma}; \mu)$ を $SL(2, \mathbf{R})SO(Q)$ の被覆群に制限した場合について考えるが，テータリフトの一般論に従うならば $SL(2, \mathbf{R})O(Q)$ の被覆群に制限した場合について考えるべきである．

3.2 準備

X, X^* と $\mathbf{R}^n$ の同一視によって，$\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X), \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X, X^*), \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(X^*, X), \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(X^*)$ を全て $M_n(\mathbf{R})$ と同一視する．これにより，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $g \in O(Q)$ の $Sp(W)$ の元としての行列表示はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} a1_n & b1_n \\ c1_n & d1_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} g & O_n \\ O_n & g \end{bmatrix}$$

となる．また，$c \in M_n(\mathbf{R})$ に対して，$\det^* c = (\det Q)^{-1} \det c$ となる．これを踏まえると，$c \neq 0$ となる $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，

$$(\mathrm{r}_0(\sigma, Q)f)(x) = |c|^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|\det Q|} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{e}\left[\frac{a(x,x)_Q - 2(x,y)_Q + d(y,y)_Q}{2c}\right] f(y) dy$$

となる事が簡単な変数変換によって分かる．また，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $g \in O(Q)$ に対して，$\mathrm{r}_0(\sigma, Q)$ と $\mathrm{r}_0(g, Q)$ を

$$\mathrm{r}_0(\sigma, Q) = \mathrm{r}_0(\sigma J, Q)\, \mathrm{r}_0\left(J^{-1}, Q\right), \qquad \mathrm{r}_0(g, Q) = \mathrm{r}_0(gJ, Q)\, \mathrm{r}_0\left(J^{-1}, Q\right)$$

で定義すると，Fourier 反転公式より，$f \in \mathcal{S}(X)$ に対して，

$$(\mathrm{r}_0(\sigma, Q)f)(x) = |a|^{\frac{n}{2}} \mathbf{e}\left[\frac{ab}{2}(x,x)_Q\right] f(xa), \qquad (\mathrm{r}_0(g, Q)f)(x) = f(xg)$$

となる．

一般線型群 $GL(n, \mathbf{R})$ の $L^2(X)$ への作用 R を

$$(R(g)f)(x) = \sqrt{|\det g|} f(xg) \qquad (g \in GL(n, \mathbf{R}), f \in L^2(X))$$

で定義する．このとき，$\mathrm{r}_0(g, Q) = R(g)$ $(\forall g \in O(Q))$ が成立する．また，$\sigma \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，上記の $\mathrm{r}_0(\sigma, Q)$ の作用の式より，

$$\mathrm{r}_0(\sigma, gQ\,{}^t g)R(g) = R(g)\mathrm{r}_0(\sigma, Q) \qquad (g \in GL(n, \mathbf{R})) \tag{3.1}$$

が成立する事も分かる．

3.3 $\varpi^{-1}(SL(2, \mathbf{R}))$ と $\varpi^{-1}(SO(Q))$ の構造

まず，$\varpi^{-1}(SL(2, \mathbf{R}))$ の明示的な記述を与えよう．そのために，少し準備をする．複素上半平面を $\mathfrak{H} = \{z = u + \sqrt{-1}v \mid u, v \in \mathbf{R},\ v > 0\}$ と書く．$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ と $z \in \mathfrak{H}$

に対して,

$$j(\sigma,z)=cz+d,\qquad \sigma\langle z\rangle=\frac{az+b}{cz+d},\qquad \epsilon(\sigma)=\begin{cases}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} & (c>0\text{ のとき}),\\ (\sqrt{-1})^{\frac{1-\mathrm{sgn}(d)}{2}} & (c=0\text{ のとき}),\\ (\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} & (c<0\text{ のとき}).\end{cases}$$

と定義しておく．$Q=g_Q\begin{pmatrix}1_p & \\ & -1_q\end{pmatrix}{}^tg_Q$ となるような $g_Q\in GL(n,\mathbf{R})$ をとり，正定値対称行列 R を $R=g_Q{}^tg_Q$ で定義する．$z=u+\sqrt{-1}v\in\mathfrak{H}$ に対して，$Q_z=uQ+\sqrt{-1}vR$ とおく．0 以上の整数 k に対して，$P_k(x)$ を次のような表示を持つ X 上の k 次同次多項式とする:

$$\begin{cases}1 & & k=0\text{ のとき},\\ rQ{}^tx & (r\in\mathbf{C}^n\ \text{s.t.}\ r(Q-R)=0) & k=1\text{ のとき},\\ \sum_r c_r(rQ{}^tx)^k & (c_r\in\mathbf{C},\ r\in\mathbf{C}^n\ \text{s.t.}\ r(Q-R)=0,\ rQ{}^tr=0) & k\geq 2\text{ のとき}.\end{cases}\tag{3.2}$$

(ただし，$p=1$ のときは $k\leq 1$ と仮定する．)

補題 3.2. $F_z(x)=\mathbf{e}\left[\frac{1}{2}xQ_z{}^tx\right]P_k(x)\in\mathcal{S}(X)$ とおく．このとき,

$$\mathrm{r}_0(\sigma,Q)F_z(x)=\epsilon(\sigma)^{p-q}j(\sigma,z)^{\frac{q-p}{2}-k}|j(\sigma,z)|^{-q}F_{\sigma\langle z\rangle}(x)$$

が任意の $\sigma\in SL(2,\mathbf{R})$ に対して成立する．

証明. $g\in GL(n,\mathbf{R})$ に対して，$R(g)F_z(x)$ は (3.2) の形の表示を持つある k 次同次多項式 $P'_k(x)$ を用いて，$R(g)F_z(x)=\mathbf{e}\left[\frac{1}{2}x(gQ{}^tg)_z{}^tx\right]\sqrt{|\det g|}P'_k(x)$ と表せる．よって，(3.1) より，$Q=\begin{pmatrix}1_p & \\ & -1_q\end{pmatrix}$，$R=1_n$ と仮定して良い．

$\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおく．$c=0$ のときは，§3.2 の $\mathrm{r}_0(\sigma,Q)$ の作用の式より，直ちに主張が得られる．また，$c\neq 0$ のときは §3.2 の $\mathrm{r}_0(\sigma,Q)$ の作用の式より,

$$\begin{aligned}&|c|^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\mathbf{e}\left[\frac{a(x,x)_Q-2(x,y)_Q+d(y,y)_Q}{2c}\right]F_z(y)dy\\ &=|c|^{-\frac{n}{2}}(v-\sqrt{-1}u-\sqrt{-1}d/c)^{-\frac{p}{2}}(v+\sqrt{-1}u+\sqrt{-1}d/c)^{-\frac{q}{2}}j(\sigma,z)^{-k}F_{\sigma\langle z\rangle}(x)\end{aligned}\tag{3.3}$$

を示せば良い事が分かる．$k=0$ のときは (3.3) の左辺を変数変換し，さらに Cauchy の積分定理によって積分路を変える事により，(3.3) の証明はよく知られた公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}dt=1$$

に帰着される．$k>0$ での (3.3) は，$k=0$ での (3.3) の両辺に

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k(az+b)^k}P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\qquad (x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\text{ とする})$$

を作用させる事で得られる．(左辺の計算では，部分積分を用いる．) □

$c \neq 0$ である $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，$\{\epsilon(\sigma)^{p-q}\}^2 = (\sqrt{-1})^n \dfrac{\det^*(c1_n)}{|\det^*(c1_n)|}$ であるから，Ψ の性質 (1),(2) より，$(\sigma, \epsilon(\sigma)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma, Q)) \in \widetilde{Sp}(W) = \mathrm{Ker}\,\Psi$ となる事が分かる．

また，Schur の補題より，$\sigma, \tau \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，

$$(\epsilon(\sigma)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma, Q)) \circ (\epsilon(\tau)^{q-p}\mathrm{r}_0(\tau, Q)) = c(\sigma, \tau)\epsilon(\sigma\tau)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma\tau, Q)$$

となる定数 $c(\sigma, \tau)$ が存在する．このとき，上の補題より，

$$c(\sigma, \tau) = \left\{ \frac{j(\sigma\tau, \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}{j(\sigma, \tau\langle\sqrt{-1}\rangle)^{\frac{1}{2}} j(\tau, \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}} \right\}^{p-q}$$

となる事が分かる．

以上により，次の命題が得られた．

命題 3.3. 半直積 $SL(2, \mathbf{R}) \ltimes \{\pm 1\}$ に群演算を

$$(\sigma, t) \cdot (\sigma', t') = \left(\ \sigma\sigma',\ tt'c(\sigma, \sigma')\ \right) \qquad ((\sigma, t), (\sigma', t') \in SL(2, \mathbf{R}) \ltimes \{\pm 1\})$$

で定義する．(n が偶数のときは，普通の直積になる．) このとき，

$$\iota_1 \colon SL(2, \mathbf{R}) \ltimes \{\pm 1\} \ni (\sigma, t) \mapsto (\sigma,\ t\epsilon(\sigma)^{q-p}\mathrm{r}_0(\sigma, Q)) \in \widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$$

は群同型写像になる．

次に，$\varpi^{-1}(SO(Q))$ について考える．Ψ の性質 (2) より，$g \in O(Q)$ に対して，

$$\begin{aligned} \Psi(g, \mathrm{r}_0(g, Q)) &= \Psi(gJ, \mathrm{r}_0\,(gJ, Q))\Psi(J^{-1}, \mathrm{r}_0\left(J^{-1}, Q\right)) \\ &= \left\{ (\sqrt{-1})^n \frac{\det^*(-g)}{|\det^*(-g)|} \right\} \left\{ (\sqrt{-1})^n \frac{\det^* 1_n}{|\det^* 1_n|} \right\} = \det g \end{aligned}$$

が成立する．これより，次の命題が得られる．

命題 3.4. $g \in SO(Q)$ に対して，$(g, \mathrm{r}_0(g, Q)) \in \widetilde{Sp}(W) = \mathrm{Ker}\,\Psi$ が成立する．また，群準同型写像

$$\iota_2 \colon SO(Q) \ni g \mapsto (g, \mathrm{r}_0(g, Q)) \in \widetilde{Sp}(W)$$

は被覆写像 $\varpi \colon \widetilde{Sp}(W) \to Sp(W)$ の $SO(Q)$ 上での切断である．

注意 3.5. 上の計算から分かるように，被覆写像 ϖ は $SO(Q)$ 上では自明であるが，$O(Q)$ 上では自明でない．

3.4 テータ関数の変換公式

L を $\mathbf{R}^n$ の $\mathbf{Z}$-格子，$L^* = \{l' \in \mathbf{R}^n \mid (l,l')_Q \in \mathbf{Z}\ (\forall l \in L)\}$ をその双対格子とし．$L^* \supset L$ であると仮定する．今，X, X^* を共に $\mathbf{R}^n$ と同一視しているため，L は前章での L と M^*，L^* は前章での L^* と M にあたる $\mathbf{Z}$-格子であると解釈できる．$f \in \mathcal{S}(X)$ と $\mu \in L^*/L$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\sigma}, g; \mu) = \sum_{l \in L} \omega(\iota_1(\tilde{\sigma})\iota_2(g)) f(\mu + l) \qquad (\tilde{\sigma} \in \widetilde{SL}(2,\mathbf{R}),\ g \in SO(Q))$$

と定義する．このとき，定理 2.5 と若干の計算により次が得られる:

定理 3.6. (1) $\gamma_2 \in SO(Q) \cap GL(n,\mathbf{Z})$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\sigma}, \gamma_2 g; \mu) = \vartheta_f(\tilde{\sigma}, g; \mu\gamma_2).$$

(2) $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z})$ が $ab(l,l)_Q \equiv cd(l,l)_Q \equiv 0 \mod 2 \quad (\forall l \in L)$ をみたすとする．このとき，$\tilde{\gamma}_1 = (\gamma_1, \varepsilon) \in \widetilde{SL}(2,\mathbf{R})$ に対して，

$$\vartheta_f(\tilde{\gamma}_1\tilde{\sigma}, g; \mu) = \sum_{\nu \in L^*/L} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu)\vartheta_f(\tilde{\sigma}, g; \nu)$$

が $\forall f \in \mathcal{S}(X)$ で成立する．ここで，$C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu)$ は以下で与えられる定数である:

$$C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(\sqrt{-1})^{(q-p)\frac{\operatorname{sgn} c}{2}}}{|c|^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\det Q|}\operatorname{vol}(\mathbf{R}^n/L)} \displaystyle\sum_{l \in L/cL} \mathbf{e}\left[\frac{a(\mu+l,\mu+l)_Q - 2(\mu+l,\nu)_Q + d(\nu,\nu)_Q}{2c}\right] & (c \neq 0 \text{ のとき}), \\ \varepsilon\delta_{\mu,a\nu}(\sqrt{-1})^{(q-p)\frac{1-\operatorname{sgn} d}{2}}\mathbf{e}\left[\dfrac{ab}{2}(\mu,\mu)_Q\right] & (c = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで，$\delta_{\mu,\mu'} = \begin{cases} 1 & (\mu = \mu' \text{のとき}), \\ 0 & (\mu \neq \mu' \text{のとき}) \end{cases}$ とする．

さらに計算を行う事で，次のような $C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu)$ の表示が得られる:

系 3.7. L の $\mathbf{Z}$-基底 $\{l_1, l_2, \cdots, l_n\}$ をとり，$D = \det((l_i,l_j)_Q)$ とおく．定理 3.6(ii) で，さらに $c \in 2\mathbf{Z}$, $cL^* \subset L$, $cd \neq 0$, $c(l,l)_Q \equiv 0 \mod 2\ (\forall l \in L^*)$ と仮定すると，

$$\varepsilon(\sqrt{-1})^{(p-q)\frac{1-\operatorname{sgn} d}{2}\operatorname{sgn} c} C_{\tilde{\gamma}_1}(\mu,\nu) = \begin{cases} \delta_{\mu,d\nu}\mathbf{e}\left[\dfrac{ab}{2}(\mu,\nu)_Q\right]\varepsilon_d^{-n}(\sqrt{-1}\operatorname{sgn} c)^n \left(\dfrac{2c}{d}\right)^n \left(\dfrac{D}{-d}\right) & (d < 0 \text{ のとき}), \\ \delta_{\mu,d\nu}\mathbf{e}\left[\dfrac{ab}{2}(\mu,\nu)_Q\right]\varepsilon_d^{n} \left(\dfrac{-2c}{d}\right)^n \left(\dfrac{D}{d}\right) & (d > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成立する．ここで，$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき}), \\ \sqrt{-1} & (d \equiv 3 \mod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$ とし，$\left(\dfrac{\cdot}{\cdot}\right)$ は志村氏が定義した平方剰余記号 ([Shm] 参照) とする．

3.5 $\mathfrak{H}\times SO(Q)$ 上のテータ関数

最後に，§3.4 の結果を新谷氏の原論文 [Shn] にある形に書き直しておこう．
$\widetilde{SL}(2,\mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群 $\widetilde{SO}(2)$ を

$$\widetilde{SO}(2)=\{(\kappa_t,\varepsilon)\mid t\in\mathbf{R},\ \varepsilon\in\{\pm1\}\}$$

で定義する．ここで，$\kappa_t=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\in SO(2)$ とする．また，$z=u+\sqrt{-1}v\in\mathfrak{H}$ に対して，$\tilde{\sigma}_z=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{v} & u/\sqrt{v}\\ & 1/\sqrt{v}\end{pmatrix},1\right)$ とおく．

整数 m と $f\in\mathcal{S}(X)$ を

$$\omega(\iota_1(\kappa_t,\varepsilon))f=\varepsilon(e^{-\sqrt{-1}t})^{-\frac{m}{2}}f \qquad (\forall(\kappa_t,\varepsilon)\in\widetilde{SO}(2)) \tag{3.4}$$

をみたすをみたすようにとり，$\mu\in L^*/L$ をとる．(例えば，$m=p-q+2k$ と $f=F_z$ は (3.4) をみたす．) このとき，$\mathfrak{H}\times SO(Q)$ 上のテータ関数 $\theta_f^{\mathfrak{H}}(z,g;\mu)$ を

$$\theta_f^{\mathfrak{H}}(z,g;\mu)=v^{-\frac{m}{2}}\theta_f(\tilde{\sigma}_z,{}^tg^{-1};\mu)$$

で定義する．

系 3.8. $\gamma_2\in SO(Q)\cap GL(n,\mathbf{Z})$ と定理 3.6 (2) の仮定をみたす $\gamma_1\in SL(2,\mathbf{Z})$ に対して，

$$j(\gamma_1,z)^{-\frac{m}{2}}\theta_f^{\mathfrak{H}}(\gamma_1z,\gamma_2g;\mu)=\sum_{\nu\in L^*/L}C_{(\gamma_1,1)}(\mu,\nu)\theta_f^{\mathfrak{H}}(z,g;\nu^t\gamma_2^{-1})$$

が成立する．

参考文献

[Ma] 松本久義. Weil 表現と Howe duality. (本報告集)

[Shm] Goro Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math. 97*, pp. 440–481, 1973.

[Shn] Takuro Shintani. On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. *Nagoya Math. J.*, Vol. 58, pp. 83–126, 1975.

[Su] 菅野孝史. Oda lift. (本報告集)

[Ta] 高瀬幸一. Weil 表現と古典的 theta 級数. 第 4 回整数論サマースクール報告集, pp. 44–62, 1996.

Oda Lift

菅野孝史（金沢大学理工研究域）

織田孝幸氏は [5] において，（整数または半整数 weight の）楕円保型形式から直交群 $O(2, n-2)$ 上の正則保型形式への lifting を構成した．これは，Weil 表現を用いた志村対応の構成（Shintani [6], Niwa [4]）の一般化になっている（$O(2,1)^0 \sim SL_2(\boldsymbol{R})$ である）．また，$O(2,2)^0 \sim SL_2(\boldsymbol{R}) \times SL_2(\boldsymbol{R})$ ゆえ，$n=4$ の時には，Doi-Naganuma lift [1], [3] と結びつく．

一方，weight $2k-2$ の保型形式から，weight k の 2 次 Siegel 保型形式への lifting (Saito-Kurokawa lift) の証明（Zagier [9]）においては，Jacobi 形式からのリフトとみることが有効であった．このノートでは，主として [7] に基づき，Jacobi 形式から直交群へのリフトの形で Oda lift を定式化した．§1，2 で，直交群，ヤコビ群上の保型形式を導入した後，§3 で Oda lift を述べる．議論のほとんどは，Oda [5] を Jacobi 形式の言葉に逐語的に言い替えたものに過ぎない．§4 で Fourier 係数の言葉で定義される Maass 型 lift が，Oda lift と（本質的に）一致することを見る．後半の二つの節で，Hecke 理論との関係を述べた．

なお，Jacobi 形式を扱う関係上，初めから $\boldsymbol{Q}$ ランクが 2 という状況を考える．[5] では直交群の $\boldsymbol{Q}$ ランクが 1 のものも含む形で結果が得られているので，原論文を読まれることをお勧めする．

記号

Q が n 次対称行列のとき，$x, y \in M_{n,1}$ に対し，

$$Q(x,y) := {}^t x Q y, \quad Q[x] := Q(x,x)$$

とおく．$z \in \boldsymbol{C}$ に対し，$\boldsymbol{e}[z] = e^{2\pi i z}$ と書く．また，記述を簡単にするため，条件 P に対し

$$\delta(P) := \begin{cases} 1 & P \text{ が成立するとき} \\ 0 & P \text{ が不成立のとき} \end{cases}$$

とする．例えば，$\delta(a=b)$ は Kronecker delta $\delta_{a,b}$ に他ならない．

§1．直交群上の保型形式

1.1．群・領域

S を m 次正定値対称行列で，even integral（i.e. 対角成分が全て偶数であるような整数行列）とする．

$$Q_0 := -S, \quad Q_1 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad Q = Q_2 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

とおく．従って，Q は符号 $(2, m+2)$ の対称行列である．

$$V_0 := \boldsymbol{R}^m, \quad V_1 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ V_0 \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}^{m+2}, \quad V = V_2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ V_1 \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}^{m+4}$$

の整数点の全体のなす格子をそれぞれ L_0, L_1, $L = L_2$ とおき，L_i の Q_i に関するに関する双対格子を $L_i^* = Q_i^{-1} L_i$ $(i = 0, 1, 2)$ で表す.

$$G_i = O(Q_i)^0 := \left\{ g_i \in GL_{m+2i}(\boldsymbol{R}) \;\middle|\; {}^t g_i Q_i g_i = Q_i \right\}^0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

を G_i の単位元の連結成分とする（$G = G_2$ とおく）．自然に，$G_0 \subset G_1 \subset G$ とみなす.

$V_{1,\boldsymbol{C}} = V_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{m+2}$ 内の領域を

$$\mathcal{D} := \left\{ \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \tau \\ w \\ z \end{pmatrix} \in V_{1,\boldsymbol{C}} \;\middle|\; Q_1[\operatorname{Im} \mathcal{Z}] > 0,\ \operatorname{Im} \tau > 0 \right\} \ni \mathcal{Z}_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

で定める（$Q_1[\operatorname{Im} \mathcal{Z}] > 0$ なる $\mathcal{Z} \in V_{1,\boldsymbol{C}}$ の全体は $\mathcal{D}$ と $-\mathcal{D}$ の disjoint union となる）.

$g \in G$, $\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$ に対し，$\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$ に対し，

$$\mathcal{Z}^{\sim} := \begin{pmatrix} Q_1[\mathcal{Z}]/2 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \in V_{\boldsymbol{C}}, \qquad g \cdot \mathcal{Z}^{\sim} := (g\langle \mathcal{Z} \rangle)^{\sim} \cdot J_G(g, \mathcal{Z})$$

により，G の $\mathcal{D}$ への作用 $\mathcal{Z} \mapsto g\langle \mathcal{Z} \rangle$ と $G \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子 $J_G(g, \mathcal{Z})$ が定まる．この作用は推移的であり，$\mathcal{Z}_0 \in \mathcal{D}$ の G における固定化部分群を K とすると，

$$G/K \cong \mathcal{D}, \quad K \cong SO(2) \times SO(m+2)$$

が成立する.

$\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$ のとき，

$$d\mathcal{Z} := (Q_1[\operatorname{Im} \mathcal{Z}]/2)^{-(m+2)}\, d(\operatorname{Re}\mathcal{Z})\, d(\operatorname{Im}\mathcal{Z}), \qquad d(\operatorname{Re}\mathcal{Z}),\ d(\operatorname{Im}\mathcal{Z}) : \text{Lebesgue 測度}$$

は $\mathcal{D}$ の G 不変測度を定める.

$x \in V_1$, $y \in V_0$ に対し，

$$n(x) := \begin{pmatrix} 1 & -{}^t x Q_1 & -Q_1[x]/2 \\ & 1_{m+2} & x \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G, \quad n_1(y) := \begin{pmatrix} 1 & -{}^t y Q_0 & -Q_0[y]/2 \\ & 1_m & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G_1$$

とおき，G の岩澤分解

$$g = n(x) n_1(y) \operatorname{diag}(a, b, 1_m, b^{-1}, a^{-1})\, k \qquad (x \in V_1,\ y \in V_0,\ a, b > 0,\ k \in K)$$

を用いて，

$$dg := a^{-(m+3)} b^{-(m+1)}\, dx\, dy\, da\, db\, dk, \qquad \operatorname{vol}(K) = 1$$

とすると，これは G の Haar 測度であり，$\mathcal{D}$ 上の可積分関数 φ に対して，

$$\int_G \varphi(g\langle \mathcal{Z}_0 \rangle)\, dg = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \varphi(\mathcal{Z})\, d\mathcal{Z}$$

が成り立つ.

1.2. 保型形式

G の離散部分群 Γ, Γ^* を

$$\Gamma := G \cap GL_{m+4}(\boldsymbol{Z}) \supset \Gamma^* := \{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma - 1)L^* \subset L\}$$

で定める．Γ^* は Γ の指数有限正規部分群である．$k \in \boldsymbol{N}$ とし，$\mathcal{D}$ 上の正則関数 F で，

$$\begin{cases} \text{(i)} \qquad F(\gamma\langle\mathcal{Z}\rangle) = J_G(\gamma, \mathcal{Z})^k\, F(\mathcal{Z}) \quad \text{for } {}^\forall\gamma \in \Gamma^* \\ \text{(ii)} \qquad \mathrm{Sup}_{g\in G}|F^{\mathrm{gr}}(g)| < \infty \quad (F^{\mathrm{gr}}(g) := F(g\langle\mathcal{Z}_0\rangle)\, J_G(g, \mathcal{Z}_0)^{-k}) \end{cases}$$

を満たすものを Γ^* に関する weight k の正則尖点形式と言い，その全体を $S_k(\Gamma^*)$ で表す（Γ に関する尖点形式の空間 $S_k(\Gamma)$ も全く同様に定義される）．

命題 1.1 各 $F \in S_k(\Gamma^*)$ は

$$F(\mathcal{Z}) = \sum_{\substack{\eta\in L_1^* \\ i\eta\in\mathcal{D}}} a_F(\eta)\, \boldsymbol{e}[Q_1(\eta, \mathcal{Z})]$$

と Fourier 展開される．また，τ に関する部分 Fourier 展開は

$$F(\begin{pmatrix} \tau \\ w \\ z \end{pmatrix}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z, w)\, \boldsymbol{e}[n\tau], \qquad F_n(z, w) = \sum_{a\in\boldsymbol{Z},\ \alpha\in L_0^*} a_F(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ n \end{pmatrix})\, \boldsymbol{e}[az - S(\alpha, w)]$$

で与えられる．

F_1，$F_2 \in S_k(\Gamma^*)$ に対し，Petersson 内積を

$$\langle F_1, F_2\rangle_k := \int_{\Gamma^*\backslash\mathcal{D}} F_1(\mathcal{Z})\, \overline{F_2(\mathcal{Z})}\, (Q_1[\mathrm{Im}\mathcal{Z}]/2)^k\, d\mathcal{Z}$$

で定める．

§2. Jacobi 形式

2.1. 群・領域

S を前節同様，m 次正定値対称行列で even integral なものとする．
集合 $H_S := \left\{[\xi, \eta, \zeta] \;\middle|\; \xi, \eta \in V_0,\ \zeta \in \boldsymbol{R}\right\}$ は演算

$$[\xi, \eta, \zeta] \cdot [\xi', \eta', \zeta'] := [\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta' + S(\xi, \eta')]$$

により，群をなす（単位元は $[0, 0, 0]$，$[\xi, \eta, \zeta]^{-1} = [-\xi, -\eta, -\zeta + S(\xi, \eta)]$）．$H_S$ の中心は，$Z_S := \{[0, 0, \zeta] \mid \zeta \in \boldsymbol{R}\}$ である．$G' := SL_2(\boldsymbol{R})$ の H_S への作用を

$$g^{-1}[\xi, \eta, \zeta]g := [\xi', \eta', \zeta'], \quad (\xi', \eta') := (\xi, \eta)g, \quad \zeta' := \zeta - S(\xi, \eta)/2 + S(\xi', \eta')/2$$

で定義する．H_S と G' 半直積 $G_S := H_S \cdot G'$ を **Jacobi 群** と呼ぶ．Z_S は H_S の中心でもある．

Jacobi 群 G_S を G の部分群とみなそう．$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G' := SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し，

$$\iota(g) := \begin{pmatrix} g' & & \\ & 1_{n-2} & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g' := J^{-1}\,{}^t g^{-1}\,J = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，$\iota(g) \in G$ である．また，$\xi, \eta \in V_0$, $\zeta \in \boldsymbol{R}$ に対し，

$$\iota([\xi,\eta,\zeta]) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t\eta S & S(\xi,\eta)-\zeta & S[\eta]/2 \\ 0 & 1 & {}^t\xi S & S[\xi]/2 & \zeta \\ & & 1_m & \xi & \eta \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

も G の元である．$\iota([\xi,\eta,\zeta]g) := \iota([\xi,\eta,\zeta])\iota(g)$ は群準同型写像 $\iota : G_S \longrightarrow G$ となる．以下 ι を省略して，$G_S \subset G$ とみなす.

Jacobi 群 G_S は $\mathcal{D}_S := \mathfrak{H} \times \boldsymbol{C}^m$ に

$$\underline{g}\langle(z,w)\rangle := (g\langle z\rangle, wj(g,z)^{-1} + \xi g\langle z\rangle + \eta) \qquad (\underline{g}[\xi,\eta,\zeta]g)$$

と作用する．ここで，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'$ に対し，$g\langle z\rangle := (az+b)(cz+d)^{-1}$, $j(g,z) := cz+d$ である．この作用は推移的で，$Z_0 = (i,0)$ の固定化部分群は $Z_S \cdot SO(2)$ である．

$k, n \in \boldsymbol{N}$ とし，$G_S \times \mathcal{D}_S$ 上の関数を

$$J_{k,n}([\xi,\eta,\zeta]g,(z,w)) := j(g,z)^k\,\boldsymbol{e}\left[n\left\{-\zeta + \left(\frac{c}{2}S[w] - S(\xi,w)\right)j(g,z)^{-1} - \frac{g\langle z\rangle}{2}S[\xi]\right\}\right]$$

で定める．$J_{k,n}$ は $G_S \times \mathcal{D}_S$ 上の正則保型因子である，即ち

$$J_{k,n}(\underline{g}\,\underline{g}',Z) = J_{k,n}(\underline{g},\underline{g}'\langle Z\rangle)\,J_{k,n}(\underline{g}',Z) \qquad (\underline{g},\underline{g}' \in G_S,\ Z \in \mathcal{D}_S)$$

を満たす.

2.2. Jacobi 形式

$\Gamma' := SL_2(\boldsymbol{Z}) \subset G'$ とし，$\Gamma_S := \{[\xi,\eta,\zeta] \mid \xi,\eta \in L_0,\ \zeta \in \boldsymbol{Z}\} \cdot \Gamma'$ とする．$\mathcal{D}_S$ 上の正則関数 f で，次の 2 条件

$$\begin{cases} \text{(i)} & f(\underline{\gamma}\langle Z\rangle) = J_{k,n}(\underline{\gamma},Z)\,f(Z) \qquad {}^\forall\underline{\gamma} \in \Gamma_S,\ {}^\forall Z \in \mathcal{D}_S \\ \text{(ii)} & \mathrm{Sup}_{\underline{g}\in G_S}|f(\underline{g}\langle Z_0\rangle)J_{k,n}(\underline{g},Z_0)^{-1}| < \infty \end{cases}$$

を満たすものを，Γ_S に関する weight k, index n（または $n \cdot S$ ）の **Jacobi 尖点形式** と呼び，その全体を $\mathfrak{S}_{k,n}(\Gamma_S)$ で表す.

$\mathcal{D}_S = \mathfrak{H} \times \boldsymbol{C}^m$ の測度を

$$dZ := \frac{dx\,dy}{y^2}\,d\xi\,d\eta, \qquad Z = (z,w) = (x+iy, \xi z + \eta) \in \mathcal{H}$$

で定義する（$d\xi$, $d\eta$ は $V=\boldsymbol{R}^m$ の通常の Lebesgue 測度）．dZ は $G_S=H_S\cdot G$ 不変な測度である．

Jacobi 尖点形式の空間 $\mathfrak{S}_{k,n}(\Gamma_S)$ は Petersson 内積

$$\langle f_1,f_2\rangle_{k,n}:=\int_{\Gamma_S\backslash\mathcal{D}_S} f_1(Z)\,\overline{f_2(Z)}\,y^k e^{-2\pi nyS[\xi]}\,dZ$$

に関して，有限次元 Hilbert 空間をなす．

$f\in\mathfrak{S}_{k,n}(\Gamma_S)$ の $\Gamma_{S,\infty}:=\left\{[0,\eta,\zeta]\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,\eta\in L_0,\ \zeta,x\in\boldsymbol{Z}\right\}$ に関する不変性と，G_S 上での有界性から，次を得る．

命題 2.1 各 $f\in\mathfrak{S}_{k,n}(\Gamma_S)$ は

$$f(Z)=\sum_{\substack{a\in\boldsymbol{N},\alpha\in L_0^*\\ an-S[\alpha]/2>0}} a_f(a,\alpha)\,\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z),\qquad \boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z):=\boldsymbol{e}[az+S(\alpha,w)]$$

と Fourier 展開される．

注意 2.1 $\underline{g}=[\xi,\eta,\zeta]g\in G_S$，$\mathcal{Z}=\begin{pmatrix}\tau\\w\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{D}$ に対し，$\underline{g}\langle\mathcal{Z}\rangle:=\begin{pmatrix}\tau'\\w'\\z'\end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{cases}(z',w')=\underline{g}\langle(z,w)\rangle, \qquad J(\underline{g},\mathcal{Z})=j(g,z)\\ \tau'=\tau+\zeta-(\dfrac{c}{2}S[w]-S(\xi,w))j(g,z)^{-1}+\dfrac{g\langle z\rangle}{2}S[\xi]\end{cases}$$

が成り立つ．$\Gamma_S\subset\Gamma^*$ ゆえ，$F\in S_k(\Gamma^*)$ の n-th Fourier-Jacobi 係数 F_n は $\mathfrak{S}_{k,n}(\Gamma_S)$ の元となる．

2.3. テータ関数

$z\in\mathfrak{H}$ とし，$\boldsymbol{C}^m$ 上の正則関数 h で

$$h(w+\xi z+\eta)=\boldsymbol{e}[-\frac{z}{2}S[\xi]-S(\xi,w)]\cdot h(w)\qquad \forall\xi,\eta\in L_0$$

を満たすものの全体を $\Theta_{S,z}$ で表す．各 $\alpha\in L_0^*$ に対し

$$\theta_\alpha(z,w):=\sum_{l\in L_0}\boldsymbol{e}[\frac{z}{2}S[\alpha+l]+S(\alpha+l,w)]$$

とおく．右辺の級数は $\mathcal{H}$ で広義一様絶対収束し，$\Theta_{S,z}$ の元を定める．

命題 2.2 θ_α は $\alpha\in L_0^*/L_0$ にのみ依存し，$\{\theta_\alpha(z,w)\mid\alpha\in L_0^*/L_0\}$ は $\Theta_{S,z}$ の基底となる．

θ_α の $\Gamma'=SL_2(\boldsymbol{Z})$ に関する変換公式を思い出しておく（Shintani [6] Proposition 1.6, 宮崎 [2]）．

命題 2.3 $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma'$ のとき，

$$\theta_\alpha(\gamma\langle(z,w)\rangle)=\varepsilon(\gamma)^{-m}j(\gamma,z)^{m/2}J_{0,1}(\gamma,(z,w))\sum_{\beta\in L^*/L}c_{\alpha,\beta}(\gamma)\theta_\beta(z,w)$$

が成り立つ．ここで，

$$c_{\alpha,\beta}(\gamma) := \begin{cases} \delta_{\alpha,a\beta}\cdot \boldsymbol{e}[abS[\alpha]/2] & (c=0) \\ (\det S)^{-1/2}|c|^{-m/2} \displaystyle\sum_{l\in L_0/L_0c} \boldsymbol{e}\left[\frac{aS[\alpha+l]-2S(\alpha+l,\beta)+dS[\beta]}{2c}\right] & (c\neq 0) \end{cases}$$

$$\varepsilon(\gamma) := \begin{cases} \boldsymbol{e}[\mathrm{sgn}(c)/8] & (c\neq 0) \\ \boldsymbol{e}[(1-d)/8] & (c=0) \end{cases}$$

である．また，$U(\gamma) := \varepsilon(\gamma)^{-m}(c_{\alpha,\beta}(\gamma))$ は $\det S = |L^*/L|$ 次のユニタリ行列である．

注意 2.2 N を S のレベル，即ち，$N\cdot S^{-1}$ が even integral となる最小の自然数とする．このとき，$\Gamma_1(2N)$ 上で，$U(\gamma)$ は対角行列となる．

$f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ のとき，各 $z\in\mathfrak{H}$ について $f(z,*)\in\Theta_{S,z}$ であるから

$$(*)\qquad f(z,w) = \sum_{\alpha\in L_0^*/L_0} \varphi_\alpha(z)\cdot\theta_\alpha(z,w)$$

と展開される．対応 $f\longmapsto(\varphi_\alpha)_{\alpha\in L_0^*/L_0}$ により，

$$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)\cong S_{k-m/2}(\Gamma',\overline{U})$$

となる．ここで右辺は，

$$(\varphi_\alpha(\gamma\langle z\rangle))_{\alpha\in L_0^*/L_0} = j(\gamma,z)^{k-m/2}\overline{U(\gamma)}(\varphi_\alpha(z))_{\alpha\in L_0^*/L_0} \qquad {}^\forall\ \gamma\in\Gamma'$$

を満たす尖点形式の全体である．

2.4. Poincaré 級数

$(a,\alpha)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$ が $\Delta_{a,\alpha} := a - S[\alpha]/2 > 0$ を満たすとする．

$$f_{a,\alpha}(Z) := \sum_{\underline{\gamma}\in\Gamma_{S,\infty}\backslash\Gamma_S} J_{k,1}(\underline{\gamma},Z)^{-1}\,\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(\underline{\gamma}\langle Z\rangle) \qquad (Z\in\mathcal{D}_S)$$

により Poincaré 級数を定義する．

命題 2.4 $k>m+2$ のとき，$f_{a,\alpha}(Z)$ は，$\mathcal{D}_S$ 上で，広義一様絶対収束し，$f_{a,\alpha}\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ である．

(1) 任意の $f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し，

$$\langle f, f_{a,\alpha}\rangle_{k,1} = A_{S,k}\Delta_{a,\alpha}^{-(k-1-m/2)}\,a_f(a,\alpha)\ ,$$
$$A_{S,k} = (\det S)^{-1/2}2^{-(k-1)}(2\pi)^{-(k-1-m/2)}\,\Gamma(k-1-m/2)\ .$$

特に，$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ は Poincaré 級数 $f_{a,\alpha}$ 達で生成される．

(2) (a,α)，$(b,\beta)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$，$\Delta_{a,\alpha}$，$\Delta_{b,\beta}>0$ のとき，

$$\Delta_{a,\alpha}^{-(k-1-m/2)}\,a_{f_{b,\beta}}(a,\alpha) = \Delta_{b,\beta}^{-(k-1-m/2)}\overline{a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta)}\ .$$

注意 2.3 (a,α)，$(b,\beta)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$ について，

$$(a,\alpha)\sim(b,\beta)\Longleftrightarrow\alpha\equiv\beta\pmod{L_0}\ \text{かつ}\ \Delta_{a,\alpha}=\Delta_{b,\beta}$$

により同値関係を定める．$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ の Fourier 係数は，同値なパラメータ上では同じ値をとる．また，これらは同じ Poincaré 級数を定める．

Poincaré 級数の Fourier 係数を明示的に与える．

命題 2.5 $(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$, $\Delta_{a,\alpha} > 0$ とする．このとき，$f_{a,\alpha}$ の (b,β) $(\Delta_{b,\beta} > 0)$ での Fourier 係数は，次で与えられる．

$$a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta) = C^+((a,\alpha);(b,\beta)) + (-1)^k C^+((a,-\alpha);(b,\beta))$$

$$C^+((a,\alpha);(b,\beta)) = \delta((a,\alpha) \sim (b,\beta)) + 2\pi(-i)^k(\det S)^{-1/2}\Big(\frac{\Delta_{b,\beta}}{\Delta_{a,\alpha}}\Big)^{(k-1-m/2)/2}$$

$$\times \sum_{c=1}^{\infty} H_c((a,\alpha);(b,\beta))c^{-1-m/2} J_{k-1-m/2}\big(\frac{4\pi}{c}\sqrt{\Delta_{a,\alpha}\Delta_{b,\beta}}\big)$$

$$H_c((a,\alpha);(b,\beta)) = \sum_{\xi \in L_0/L_0 c} \sum_{\substack{d \in \boldsymbol{Z}/c\boldsymbol{Z} \\ (c,d)=1}} \boldsymbol{e}\Big[\frac{1}{c}\big\{\frac{a_0}{2}S[\xi] + a_0 S(\xi,\alpha) + a_0 a + db - S(\xi+\alpha,\beta)\big\}\Big]$$

ここで，$(c,d)=1$ のとき，$a_0 d - b_0 d = 1$ なるように $a_0, b_0 \in \boldsymbol{Z}$ を選んでおく．J は

$$J_\nu(z) := (z/2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

定義される Bessel 関数である．

§3. Oda lift

3.1. テータ核

$z = x + iy \in \mathfrak{H}$, $k \in \boldsymbol{N}$ に対し，$V = \boldsymbol{R}^{m+4}$ 上の急減少関数 $f_{z,k}$ を

$$f_{z,k}(v) := Q(\mathcal{Z}_0^\sim, v)^k \cdot \boldsymbol{e}[Q_z[v]/2], \quad Q_z := xQ + iyR, \quad R := \begin{pmatrix} 1_2 & & \\ & S & \\ & & 1_2 \end{pmatrix}$$

で定め，

$$\theta_k(z,g;\mu) := \sum_{l \in L} y^{(m+2)/2} f_{z,k}(g^{-1}(l+\mu))$$

とおく（$\mu \in L^*$）．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ に対し，変換公式

$$\theta_k(\gamma\langle z\rangle, g;\mu) = \varepsilon(\gamma)^m\, j(\gamma,z)^{k-m/2} \sum_{\nu \in L^*/L} c'_{\mu,\nu}(\gamma)\theta_k(z,g;\nu)$$

が成り立つ．ここで，$c'_{\mu,\nu}(\gamma)$ は

$$\begin{cases} \delta(\mu - \nu a \in L)\cdot \boldsymbol{e}[abQ[\mu]/2] & (c=0) \\ |\det Q|^{-1/2}|c|^{-(m+4)/2} \displaystyle\sum_{r \in L/Lc} \boldsymbol{e}\Big[\frac{aQ[\mu+r] - 2Q(\mu+r,\nu) + dQ[\nu]}{2c}\Big] & (c \neq 0) \end{cases}$$

で与えられる（[6] Proposition 1.6）．

$\pi : L^* \longrightarrow L_0^*$ を自然な写像とし，$Z=(z,w)\in\mathcal{D}_S$，$g\in G$ に対し，

$$\begin{aligned}\Theta_k(Z,g) &:= \sum_{\mu\in L^*/L}\theta_k(z,g;\mu)\cdot\theta_{-\pi(\mu)}(Z)\\ &= y^{(m+2)/2}\sum_{\mu\in L^*} f_{z,k}(g^{-1}\mu)\,\theta_{-\pi(\mu)}(Z)\end{aligned}$$

とおく．

命題 3.1　次が成り立つ．

(1) $\Theta_k(Z,\gamma g\kappa) = J_G(\kappa,\mathcal{Z}_0)^k\cdot\Theta_k(Z,g) \qquad \text{for } {}^\forall\gamma\in\Gamma^*,\ {}^\forall\kappa\in K$.

(2) $\Theta_k(\underline{\gamma}\langle Z\rangle,g) = J_{k,1}(\underline{\gamma},Z)\cdot\Theta_k(Z,g) \qquad \text{for } {}^\forall\underline{\gamma}\in\Gamma_S$.

3.2. Oda lift の定義

以下，$k>2m+4$ とする．$f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$，$F\in S_k(\Gamma^*)$ に対し，

$$(\iota f)(g) := \int_{\Gamma_S\backslash\mathcal{D}_S} f(Z)\,\overline{\Theta_k(Z,g)}\,y^k\,e^{-2\pi y S[\xi]}\,dZ$$

$$(\rho F)(Z) := \int_{\Gamma^*\backslash G} F(g)\,\Theta_k(Z,g)\,dg$$

で定義する．ここで，$F(g):=F(g\langle\mathcal{Z}_0\rangle)\,J_G(g,\mathcal{Z}_0)^{-k}$ により，F を G 上の保型形式と見ている．形式的には，$\iota(f)$，$\rho(F)$ がそれぞれ，Γ^*，Γ_S に関する保型性をもつこと，Petersson 内積に関して互いに adjoint

$$\langle\iota(f),F\rangle_k = \langle f,\rho(F)\rangle_{k,1} \qquad (f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S),\ F\in S_k(\Gamma^*))$$

となることがわかる．以下の小節で，像の Fourier 係数を求め，(k が大きいとき）$\iota(f)\in S_k(\Gamma^*)$，$\rho(F)\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ となることを見てゆく．

3.3. ρF の Fourier 係数

$F\in S_k(\Gamma^*)$ に対し，ρF の積分は絶対収束し，$(\rho F)(\underline{\gamma}\langle Z\rangle) = J_{k,1}(\underline{\gamma},Z)\,(\rho F)(Z)$ $(\underline{\gamma}\in\Gamma_S)$ が成り立つ．$v\in V$ に対し，$G_v:=\{h\in G\mid hv=v\}$，$K_v:=K\cap G_v$，$\Gamma_v^*:=\Gamma^*\cap G_v$ とおく．また，G_v の Haar 測度 d_vh と $G_v\backslash G$ 上の準不変測度 $d'_v\dot{g}$ を

$$\int_G \Phi(g)\,dg = \int_{G_v\backslash G} d'_v\dot{g}\int_{G_v}\Phi(hg)\,d_vh$$

となるように選んでおく．定義より，

$$(\rho F)(Z) = \sum_{\{\mu\}_{\Gamma^*}}\theta_{-\pi(\mu)}(Z)\int_{\Gamma_\mu^*\backslash G} y^{(m+2)/2} f_{z,k}(g^{-1}\mu)\,F(g)\,dg$$

である．ここで，$\{\mu\}_{\Gamma^*}$ は $\mu\in L^*$ の Γ^* 軌道を意味する．

$$Q[\mu]\le 0 \implies \int_{\Gamma_\mu^*\backslash G_\mu}\Phi(hg)\,d_\mu h = 0$$

となること，及び，$\mu \in L^*$ が原始的（i.e. $n \geq 2$ に対して $\mu \notin L^* n$）ならば，適当な $\gamma \in \Gamma^*$ により，

$$\gamma\mu = \eta_{a,\alpha}^{\sim} := \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{a,\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{a,\alpha} = \begin{pmatrix} a \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$$

と書かれることより，

$$\rho F(Z) = \sum_{\substack{a \in \boldsymbol{Z},\ \alpha \in L_0^*/L_0 \\ \Delta_{a,\alpha} > 0}} \sum_{n \in \boldsymbol{N}} \theta_{n\alpha}(Z)\, n^{k-(m+2)}\, \mathcal{A}((a,\alpha); n^2 z)$$

$$\mathcal{A}((a,\alpha); z) = \int_{\Gamma^*_{\eta_{a,\alpha}^{\sim}} \backslash G} y^{(m+2)/2}\, f_{z,k}(g^{-1}\eta_{a,\alpha}^{\sim})\, F(g)\, dg$$

を得る．$G_{a,\alpha} := G_{\eta_{a,\alpha}^{\sim}}$ は 符号 $(1, m+2)$ の直交群

$$O(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -T & \\ 1 & & \end{pmatrix})^0, \qquad T = \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a \end{pmatrix}$$

と同型であり，岩澤分解

$$h = \begin{pmatrix} 1 & {}^t yT & T[y]/2 \\ & 1_{m+1} & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & & \\ & 1_{m+1} & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} k \qquad (k \in K_{a,\alpha})$$

を用いて $G_{a,\alpha}$ の Haar 測度

$$d_{a,\alpha}h := t^{-(m+2)} dt\, dx\, dk \qquad \left(\int_{K_{a,\alpha}} dk = 1 \right)$$

を正規化しておく．このとき，次が成立する．

定理 3.2 $k > 2m+4$, $F \in S_k(\Gamma^*)$ とする．
(1) $\rho F \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$.
(2) $(a_0, \alpha_0) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$, $\Delta_{a_0,\alpha_0} > 0$ のとき，

$$a_{\rho F}(a_0, \alpha_0) = c(\rho) \sum_{\substack{a,n \in \boldsymbol{N},\ \alpha \in L_0^*/L_0 \\ \Delta_{a_0,\alpha_0} = n^2 \Delta_{a,\alpha},\ \alpha_0 - n\alpha \in L_0}} n^{k-m-2} \Delta_{a,\alpha}^{(k-m-1)/2}\, I_{a,\alpha}$$

$$I_{a,\alpha} := \int_{\Gamma^*_{a,\alpha} \backslash G_{a,\alpha}} F(hg_{a,\alpha})\, d_{a,\alpha}h, \quad c(\rho) := i^k (\det S)^{-1/2}\, 2^{k-1-m/2} .$$

3.4. ιF の Fourier 係数

$(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$, $\Delta_{a,\alpha} > 0$ に対し，

$$\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) := \sum_{\substack{l \in L^* \\ \pi(l) + \alpha \in L_0 \\ Q[l]/2 = \Delta_{a,\alpha}}} Q(\mathcal{Z}^{\sim}, l)^{-k} = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} \Omega_{a,\alpha}^{(n)}(\mathcal{Z})$$

$$\Omega^{(n)}_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) := \sum_{\substack{b\in\boldsymbol{Z},\ \beta\in L_1^*\\ \pi(\beta)+\alpha\in L_0\\ bn+Q_1[\beta]/2=\Delta_{a,\alpha}}} \left(-\frac{n}{2}Q_1[\mathcal{Z}]+Q_1(\mathcal{Z},\beta)+b\right)^{-k}$$

$$\Omega^{(0)+}_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) := \sum_{\substack{b\in\boldsymbol{Z},\ \beta\in L_1^*\\ \pi(\beta)+\alpha\in L_0\\ Q_1[\beta]/2=\Delta_{a,\alpha},\ i\beta\in\mathcal{D}}} \left(Q_1(\mathcal{Z},\beta)+b\right)^{-k}$$

とおく．$\Omega^{+}_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) := \Omega^{(0)+}_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) + \sum_{n\geq 1}\Omega^{(n)}_{a,\alpha}(\mathcal{Z})$ とおくと，

$$\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) = \Omega^{+}_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) + (-1)^k\Omega^{+}_{a,-\alpha}(\mathcal{Z})$$

となる．

定理 3.3 $(a,\alpha)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*$，$\Delta_{a,\alpha}>0$ のとき，以下が成り立つ．

(1) Poincare 級数 $f_{a,\alpha}$ の ι による像（を領域上の関数とみたもの）は．$\Omega_{a,\alpha}$ の定数倍となる：

$$(\iota f_{a,\alpha})^{\mathrm{dm}}(\mathcal{Z}) := (\iota f_{a,\alpha})(g)\ J_G(g,\mathcal{Z}_0)^k = c(\iota)\cdot\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) \quad (\mathcal{Z}=g\langle\mathcal{Z}_0\rangle)\ .$$

ここで，$c(\iota) := 2^{-m/2}(\det S)^{-1/2}\pi^{-k}\Gamma(k)$.

(2) $\Omega_{a,\alpha}\in S_k(\Gamma^*)$ であり，$\Omega^{+}_{a,\alpha}$ の $\nu\in L_1^*$ $(i\nu\in\mathcal{D})$ での Fourier 係数 $C^{+}_{a,\alpha}(\nu)$ は以下のように Bessel 関数を用いて表示される．

$$\begin{aligned}C^{+}_{a,\alpha}(\nu) = C^{(0)+}_{a,\alpha}(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{k+1}}{n^{1+m/2}\Gamma(k)(\det S)^{1/2}}\cdot\Big(\frac{Q_1[\nu]}{2\Delta_{a,\alpha}}\Big)^{(k-1-m/2)/2}\\ \times J_{k-1-m/2}\big(\frac{4\pi}{n}\sqrt{\Delta_{a,\alpha}Q_1[\nu]/2}\big) \sum_{\substack{\lambda\in L_1^*/L_1 n\\ Q_1[\lambda]/2-\Delta_{a,\alpha}\in n\boldsymbol{Z}\\ \pi(\lambda)+\alpha\in L_0}} \boldsymbol{e}[-Q_1(\nu,\lambda)/n]\end{aligned}$$

$$C^{(0)+}_{a,\alpha}(\nu) := \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{r\in\boldsymbol{N},\nu\in L_1^* r\\ Q_1[\nu r^{-1}]/2=\Delta_{a,\alpha}\\ \pi(\nu r^{-1})+\alpha\in L_0}} r^{k-1}$$

3.5. Zagier identity

次節で，Fourier 係数を用いた Maass 型のリフトを考える．次の定理は，両者の一致を示すために用いられる（Zagier [8] Theorem 3，Oda [5] Theorem 5）．

定理 3.4 $Z\in\mathcal{D}_S$，$\mathcal{Z}\in\mathcal{D}$ について，

$$\sum_{\substack{(a,\alpha)\in\boldsymbol{Z}\times L_0^*\\ \Delta_{a,\alpha}>0}} \Delta_{a,\alpha}^{k-1-m/2}\overline{\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z})}\,\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z) = \sum_{(b,\beta):/\sim} \Delta_{b,\beta}^{k-1-m/2}\ \overline{\Omega^{(0)+}_{b,\beta}(\mathcal{Z})}\,f_{b,\beta}(Z)$$

が成立する．ここで，右辺の (b,β) は注意 2.3 で述べた同値類の代表を動く．

まず，$f_{b,\beta}$ の Fourier 展開を利用して，両辺の $\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z)$ の係数を比較する．その後，前定理を用いて $\overline{\boldsymbol{e}[Q_1(\nu,\mathcal{Z})]}$ の係数を比較する．両辺とも $J_{k-1-m/2}(*)$ の言葉で記述され，その係数が一致することをみることで，定理 3.4 の証明が完了する．

§4. Maass type lift

4.1. シフト作用素と Maass 型リフト

$N \in \boldsymbol{N}$, $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\varGamma_S)$ に対し，$\mathcal{D}_S$ 上の関数 $V_N f$ を

$$(V_N f)(z,w) := N^{k-1} \sum_{B \in \varGamma' \backslash T(N)} j(B,z)^{-k} \boldsymbol{e}\left[-\frac{cN}{2} S[w] j(B,z)^{-1}\right] f(B\langle z\rangle, wNj(B,z)^{-1})$$

とおく．ここで，

$$T(N) = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\boldsymbol{Z}) \;\middle|\; \det B = N \right\}$$

$$B\langle z\rangle := \frac{az+b}{cz+d}, \quad j(B,z) = cz+d \qquad \text{for } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T(N)$$

とおいた．$V_N f \in \mathfrak{S}_{k,N}(\varGamma_S)$ であることは容易に確かめれらる．

定理 4.1 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\varGamma_S)$ に対し，$\mathcal{D}$ 上の関数 $I(f)$ を

$$\begin{aligned} I(f)\left(\begin{pmatrix} \tau \\ w \\ z \end{pmatrix}\right) &= \sum_{N=1}^{\infty} (V_N f)(z,w)\, \boldsymbol{e}[N\tau] \\ &= \sum_{a,b \in \boldsymbol{N}, \alpha \in L_0^*} \left\{ \sum_{\substack{r \in \boldsymbol{N} \\ a,b \in r\boldsymbol{Z} \\ \alpha \in L_0^* r}} r^{k-1} a_f(abr^{-2}, \alpha r^{-1}) \right\} \boldsymbol{e}[az + S(\alpha,w) + b\tau] \end{aligned}$$

で定める．

(1) $I(f) \in S_k(\varGamma^*)$ である（I を **Maass type lift** と呼ぶ）．

(2) I は $\mathfrak{S}_{k,1}(\varGamma_S)$ から $S_k(\varGamma^*)$ への単射で，I の像は Maass space

$$\left\{ F \in S_k(\varGamma^*) \;\middle|\; a_F\left(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{pmatrix}\right) = \sum_{\substack{r \in \boldsymbol{N} \\ a,b \in r\boldsymbol{Z},\ \alpha \in L_0^* r}} r^{k-1} a_F\left(\begin{pmatrix} abr^{-2} \\ \alpha r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{for }^{\forall} \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{pmatrix} \in L_1^* \right\}$$

に一致する．

証明のポイントは，$\varGamma^*$ が $\varGamma_S$，$\varGamma_1^*$ および

$$M := \begin{pmatrix} & & -J \\ & 1_m & \\ -J & & \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成されることである．シフト作用素 V_N の性質から $\varGamma_S$ に関する保型性が，Fourier 展開の形から $\varGamma_1^*$ に関する保型性が得られる．M に関する保型性は，τ と z の対称性から導かれる．

4.2. Oda リフトとの一致

定理 4.2 $k > 2m+4$ のとき，任意の $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\varGamma_S)$ に対し， 次が成り立つ．

$$(\iota f)^{\mathrm{dm}}(\mathcal{Z}) := (\iota f)(g)\, J_G(g,\mathcal{Z})^k = 2\overline{c(\rho)} \cdot I(f)(\mathcal{Z}) \quad (\mathcal{Z} = g\langle \mathcal{Z}_0\rangle)\ .$$

［証明］ Zagier Identity（定理 3.4）で $\boldsymbol{e}_{a,\alpha}(Z)$ の係数を比較する．$(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$，$\Delta_{a,\alpha} > 0$ のとき，

$$\Delta_{a,\alpha}^{k-1-m/2}\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) = \sum_{(b,\beta)/\sim} \Omega_{b,\beta}^{(0)+}(\mathcal{Z})\, \Delta_{b,\beta}^{k-1-m/2}\overline{a_{f_{b,\beta}}(a,\alpha)}\ .$$

命題 2.4 を考慮して

$$\begin{aligned}
\Omega_{a,\alpha}(\mathcal{Z}) &= \sum_{(b,\beta):/\sim} \Omega_{b,\beta}^{(0)+}(\mathcal{Z})\, a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta) \\
&= \sum_{(b,\beta):/\sim} \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\nu\in L_1^*,\ i\nu\in\mathcal{D}} \sum_{\substack{r\in\boldsymbol{N},\ \nu\in L_1^* r \\ Q_1[\nu r^{-1}]=b-S[\beta]/2 \\ \pi(\nu r^{-1})+\beta\in L_0}} r^{k-1}\boldsymbol{e}[Q_1(\nu,\mathcal{Z})]\cdot a_{f_{a,\alpha}}(b,\beta) \\
&= \frac{(-2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{\nu\in L_1^*,\ i\nu\in\mathcal{D} \\ {}^t\nu=(a,{}^t\alpha,b)}} \sum_{r\in\boldsymbol{N}\nu r^{-1}\in L_1^*} r^{k-1}a_{f_{a,\alpha}}(abr^{-2},-\alpha r^{-1})\,\boldsymbol{e}[Q_1(\nu,\mathcal{Z})]
\end{aligned}$$

より，主張を得る． ∎

§5. Hecke 作用素

以下，m 次正定値 even integral 対称行列 S が <u>maximal</u> であると仮定する．即ち，$g \in M_m(\boldsymbol{Z}) \cap GL_m(\boldsymbol{Q})$ で $S[g^{-1}] := {}^tg^{-1}Sg^{-1}$ が even integral となるものは $g \in GL_m(\boldsymbol{Z})$ に限るとする．また，直交群や Jacobi 群 をそれぞれ $\boldsymbol{Q}$ 上の代数群とみることにする．例えば，G はその $\boldsymbol{Q}$ 有理点が

$$G_{\boldsymbol{Q}} := \left\{ g \in GL_{m+4}(\boldsymbol{Q}) \;\middle|\; {}^tgQg = Q \right\}$$

となる代数群を表す．素点 v に対し，$\boldsymbol{Q}_v$ 有理点を G_v と，adele 化群を G_A と書く．従って，前節まで用いていた $\boldsymbol{R}$ 有理点の単位元の連結成分は G_∞^0 と表される．

<u>5.1. Jacobi Hecke 環・L 関数</u>

p を素数とし，$G_{S,p} = G_S(\boldsymbol{Q}_p)$ の開 compact 部分群 $K_{S,p}$ を

$$K_{S,p} := \left\{ [\xi,\eta,\zeta]g \;\middle|\; \xi,\eta \in L_{0,p} := L_0 \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Z}_p,\ \zeta \in \boldsymbol{Z}_p,\ g \in SL_2(\boldsymbol{Z}_p) \right\}$$

で定める．$G_{S,p}$ の中心は，$Z_{S,p} := \{[0,0,\zeta] \mid \zeta \in \boldsymbol{Q}_p\}$ である．$\boldsymbol{Q}_A/\boldsymbol{Q}$ の basic character $\chi = \prod_v \chi_v$ を $\chi_\infty(x) = \boldsymbol{e}[x]$ により定める．

$G_{S,p}$ 上の両側 $K_{S,p}$ 不変な $\boldsymbol{C}$ 値関数 ϕ で

$$\phi([0,0,\zeta]\underline{g}) = \chi_p(\zeta)\phi(\underline{g}) \qquad \text{for } {}^\forall\zeta \in \boldsymbol{Q}_p,\ {}^\forall\underline{g} \in G_{S,p}$$

を満たし，$Z_{S,p}\backslash\operatorname{supp}\phi$ が compact となるものの全体 $\mathcal{H}_{S,p}$ は，convolution

$$(\phi_1 * \phi_2)(\underline{g}) := \int_{Z_{S,p}\backslash G_{S,p}} \phi(\underline{g}\,\underline{g_1}^{-1})\,\phi_2(\underline{g_1})\,d\underline{g_1} \qquad \operatorname{vol}(Z_{S,p}\backslash Z_{S,p}K_{S,p}) = 1$$

により $\boldsymbol{C}$-algebra となる．単位元 $\phi_{0,p}$ は，$G_{S.p}$ の単位元で値 1 をとる support が $Z_{S,p}K_{S,p}$ の関数である．

S の $\boldsymbol{Q}_p$ 上の Witt 指数を ν_p とし，$m=2\nu_p+n_{0,p}$ により $n_{0,p}$ を定める（$0 \le n_{0,p} \le 4$）．S が maximal という仮定より，

$$L'_{0,p} := \{x \in L^*_{0.p} \mid S[x]/2 \in \boldsymbol{Z}_p\}$$

は $L_{0,p}$ を含む $\boldsymbol{Z}_p$ lattice で，$L'_{0,p}/L_{0,p}$ は $\boldsymbol{F}_p=\boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p$ 上のベクトル空間となる．その次元を ∂_p とであらわす（$0 \le \partial_p \le 2$）．ϕ_p，$\phi'_{0,p} \in \mathcal{H}_{S,p}$ を

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\phi_p &= Z_{S,p}K_{S,p}\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}K_{S,p}, \quad \phi_p(\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix})=1\\ \operatorname{supp}\phi'_{0,p} &= Z_{S,p}K_{S,p}\{[0,\eta,0] \mid \eta \in L'_{0,p}\}K_{S,p}, \quad \phi'_{0,p}([0,\eta,0])=p^{-\partial_p}\ (\eta \in L'_{0,p})\end{aligned}$$

で定め，この 2 元で生成される $\mathcal{H}_{S,p}$ の部分環を $\mathcal{H}'_{S,p}$ で表す．$\mathcal{H}'_{S,p}$ は可換で，$\partial_p=0,1$ のときは $\mathcal{H}_{S,p}$ に一致する．

$$\phi'_{0,p} * \phi'_{0,p} = \begin{cases} \phi_{0,p} & \partial_p = 0,1 \\ (1-p^{-1})\phi'_{0,p}+p^{-1}\phi_{0,p} & \partial_p=2\end{cases}$$

は容易に確かめられる．

$\boldsymbol{C}$-algebra 準同型 $\lambda_p : \mathcal{H}'_{S,p} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ に対し，その L 関数 $L_p(\lambda_p;s)$ を

$$\begin{aligned}L_p(\lambda_p;s) &:= \left\{1-(\lambda_p(\phi_p)p^{-(1+m/2)}-p^{\partial_p-n_{0,p}/2}+p^{-1+n_{0,p}/2})p^{-s}+\lambda_p(\phi'_{0,p})^{-1}p^{-2s}\right\}^{-1}\\ &\qquad \times \left\{\begin{array}{ll}(1-\chi_S(p)p^{-s})^{-1} & m:\mathrm{even}\\ 1 & m:\mathrm{odd}\end{array}\right\} \times B_{S,p}(p^{-s})\ ,\\ B_{S,p}(T) &= \begin{cases} 1 & \partial_p=0 \text{ or } (n_{0,p},\partial_p)=(2,1)\\ 1+p^{1/2}T & (n_{0,p},\partial_p)=(1,1)\\ (1+pT)(1+T) & (n_{0,p},\partial_p)=(2,2)\\ 1-p^{1/2}T & (n_{0,p},\partial_p)=(3,1)\\ (1+p^{1/2}T)(1-p^{1/2}T) & (n_{0,p},\partial_p)=(3,2)\\ (1-pT)(1-T) & (n_{0,p},\partial_p)=(4,2)\end{cases}\end{aligned}$$

で定める．ここで，m が偶数のとき，χ_S は $\boldsymbol{Q}_p(\sqrt{(-1)^{m/2}\det S})/\boldsymbol{Q}_p$ に対応する指標である．

$\otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$ は convolution により Jacobi 尖点形式の空間 $\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に可換正規に作用し，$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ は同時固有関数からなる基底をもつ．

$$f*\phi=\lambda_f(\phi)f \qquad \text{for } {}^\forall\phi \in \otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$$

のとき，$L(f;s) := \prod_p L_p(\lambda_p;s)$ により，f の L 関数を定める．

命題 5.1 (1)　$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ を Hecke 同時固有関数とする．$(a,\alpha) \in \boldsymbol{Z} \times L_0^*$ に対し，$T := \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a\end{pmatrix}$ とおく．T が正定値 maximal even integral のとき，次が成立する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_f(an^2,\alpha n)n^{-(s+k-1-m/2)}$$

$$= a_f(a,\alpha)\cdot L(f;s)\left\{\begin{array}{cc} \zeta(2s)^{-1} & m:\text{evem} \\ L(\chi_T;s+1/2)^{-1} & m:\text{odd}\end{array}\right\}\times\prod_{p<\infty}B_{T,p}(p^{-(s+1/2)})^{-1}\ .$$

(2)　$L(f;s)$ のガンマ因子を

$$L_\infty(f;s):=\left\{\begin{array}{ll} 2^{-s}\pi^{-3s/2}(\det S)^{s/2}\Gamma(s+k-1-m/2)\Gamma((s+a)/2) & m:\text{even} \\ (2\pi)^{-s}(2^{-1}\det S)^{s/2}\Gamma(s+k-1-m/2) & m:\text{odd}\end{array}\right.$$

で定める（a は $m\equiv 0,\ 2 \pmod 4$ に応じて 1, 0 を表す）. $\xi(f;s):=L_\infty(f;s)\cdot L(f;s)$ は全 s 平面に有理型関数として解析接続され，関数等式

$$\xi(f;s)=\left\{\begin{array}{ll} -1 & m\equiv 1,3 \pmod 8 \\ 1 & \text{otherwise}\end{array}\right\}\xi(f;1-s)$$

を満たす.

5.2. 直交群の Hecke 環・L 関数

符号 $(2,m+2)$ の対称行列 Q の直交群 $G=O(Q)$ の $\boldsymbol{Q}_p$ 有理点 G_p の開 compact 部分群 K_p とその指数有限正規部分群 K_p^* を

$$K_p:=G_p\cap GL_{m+4}(\boldsymbol{Z}_p)\supset K_p^*:=\{u\in K_p \mid (u-1)L_p^*\subset L_p\}$$

で定める. G_p 上の両側 K_p 不変な compact support 関数の全体 $\mathcal{H}(G_p,K_p)$ は convolution により可換な $\boldsymbol{C}$-algebra をなし，

$$\mathcal{H}(G_p,K_p)\cong\boldsymbol{C}[X_1^{\pm},\dots,X_{\nu_p+2}^{\pm}]^{W_{\nu_p+2}}$$

となることは良く知られている. ここで，W_{ν_p+2} は $X_1,\dots,X_{\nu_p+2}$ の置換と $X_i\longmapsto X_i^{-1}$ で生成される群（Weyl 群）である.

Λ_p を $\mathcal{H}(G_p,K_p)$ の指標とするとき，その局所 L 関数 $L_p(\Lambda_p;s)$ を

$$L_p(\Lambda_p;s)\cdot\Lambda_p\Big(\prod_{i=1}^{\nu_p+2}(1-X_ip^{-s})(1-X_i^{-1}p^{-s})\Big)$$
$$=\left\{\begin{array}{ll} 1 & (n_{0,p},\partial_p)=(0,0)\text{ or }(1,0) \\ 1+p^{-s+1/2} & (n_{0,p},\partial_p)=(1,1) \\ (1-p^{-2s})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(2,0) \\ (1-p^{-s})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(2,1) \\ (1-p^{-s})^{-1}(1+p^{1-s}) & (n_{0,p},\partial_p)=(2,2) \\ (1-p^{-s-1/2})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(3,1) \\ (1-p^{-s-1/2})^{-1}(1+p^{-s+1/2}) & (n_{0,p},\partial_p)=(3,2) \\ (1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s-1})^{-1} & (n_{0,p},\partial_p)=(4,2)\end{array}\right.$$

で定義する.

S が maximal という仮定の下で，

$$G_{1,A}=G_{1,\boldsymbol{Q}}G_{1,\infty}^0\prod_{p<\infty}K_{1,p}^*$$

が成り立つから，$F \in S_k(\Gamma^*)$ を G_A 上の保型形式とみなすことができる．

$\otimes'_p \mathcal{H}(G_p, K_p)$ は convolution により $S_k(\Gamma)$ に正規可換に作用し，同時固有関数からなる基底を持つ．

$$F * \Phi = \Lambda_F(\Phi) \cdot F \qquad \text{for } {}^\forall \Phi \in \otimes'_p \mathcal{H}(G_p, K_p)$$

のとき，$L(F; s) := \prod_p L_p(\Lambda_F; s)$ により，F の L 関数を定める．

5.3 Hecke 環の作用の compatibility

定理 5.2 Jacobi 尖点形式 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\otimes'_p \mathcal{H}'_{S,p}$ の同時固有関数とする．

(1) $\lambda_f(\phi'_{0,p}) = 1$ ならば，$I(f)$ は 右 K_p 不変である．また，$\lambda_f(\phi'_{0,p}) \neq 1$ ならば，$\lambda_f(\phi'_{0,p}) = -p^{\partial_p - 1}$ であり，

$$\int_{K_p} I(f)(gu)\, du = 0$$

となる．

(2) $\lambda_f(\phi'_{0,p}) = 1$ (for ${}^\forall p$) のとき，$I(f) \in S_k(\Gamma)$ で，$\otimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_p(G_p, K_p)$ の同時固有関数となり，

$$L(I(f); s) = L(f; s) \prod_{j=0}^{m} \zeta(s + j - m/2)$$

が成り立つ．

注意 5.1 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\mathcal{H}_{S,p}$ の中心の同時固有関数であるとき，$I(f)$ は $\mathcal{H}(G_p, K_p^*)$ の中心の固有関数となる．また，上の (2) の関係式は，このような状況においても成立する．

§6. $I^* \circ I$

前節と同様に，S を maximal とする．Maass 型リフト $I : \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S) \longrightarrow S_k(\Gamma^*)$ の Petersson 内関に関する adjoint を I^* で表す：

$$\langle f, I^*(F) \rangle_{k,1} = \langle I(f), F \rangle_k \qquad f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S),\ F \in S_k(\Gamma^*)\ .$$

定理 6.1 $k > 2m + 4$ とする．$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が Hecke 同時固有関数のとき，

$$\begin{aligned} I^* \circ I(f) &= C_{S,k} \cdot L(f; 1 + m/2) \cdot f \\ C_{S,k} &= (\det S)^{(m+1)/2} \prod_{j=1}^{[(m+1)/2]} |B_{2j}| \cdot (4\pi)^{-k} \Gamma(k) \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} 2^{-m/2} \pi^{-1-m/2} & m : \text{even} \\ 2^{-(m+1)/2} \Gamma((m+3)/2)^{-1} & m : \text{odd} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 4 & -1 \in \Gamma^* \\ 2 & -1 \notin \Gamma^* \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

が成立する．

$I(f)$ を G_A 上の保型形式とみる．$\eta \in V_{1,\boldsymbol{Q}}$ に対し，(adelic) Fourier 係数を

$$F_\eta(g) := \int_{V_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash V_{1,A}} F(n(x)g)\, \chi(-Q(\eta, x))\, dx$$

で定義する．$\eta = \begin{pmatrix} a \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1^*$，$i\eta \in \mathcal{D}$ で，$T := \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a \end{pmatrix}$ が maximal とする．H を T の直交群，H_1 を $T_1 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -T & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ の直交群とし，各 p について，H_p，$H_{1,p}$ の開 compact 部分群 U_p^*，$U_{1,p}^*$ を

$$
\begin{aligned}
U_p^* &= \{h \in H_p \cap GL_{m+1}(\boldsymbol{Z}_p) \mid (h-1)T^{-1} \in M_{m+1}(\boldsymbol{Z}_p)\} \\
U_{1,p}^* &= \{h \in H_{1,p} \cap GL_{m+3}(\boldsymbol{Z}_p) \mid (h-1)T_1^{-1} \in M_{m+3}(\boldsymbol{Z}_p)\}
\end{aligned}
$$

で定める．$H_{1,\infty}^0$ は $\mathcal{X} := \{(x,r) \in \boldsymbol{R}^{m+1} \times \boldsymbol{R} \mid r > 0\}$ に

$$
h_1 \begin{pmatrix} r + T[x]/2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' + T[x'] \\ x' \\ 1 \end{pmatrix} \cdot J_{H_1}(h_1, (x,r))
$$

により，$(x,r) \longmapsto h_1\langle (x,r) \rangle := (x', r')$ と推移的に作用する．$(1,0) \in \mathcal{X}$ の固定化部分群を $U_{1,\infty}^*$ とおく（$SO(m+1)$ に同型）．

H_A 上の右 $U_A^* := H_\infty^0 \prod_p U_p^*$ 不変な保型形式の空間を $S(U_A^*)$ で表す．$\varphi \in S(U_A^*)$ にから H_1 上の Eisenstein 級数を

$$
E(h_1, \varphi; s) = \sum_{\gamma \in P_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash H_{1,\boldsymbol{Q}}} \varphi(\beta(\gamma h_1)) \, |\alpha(\gamma h_1)|_A^{s+(m+1)/2}
$$

$$
h_1 = \begin{pmatrix} \alpha(h_1) & * & * \\ & \beta(h_1) & * \\ & & \alpha(h_1)^{-1} \end{pmatrix} u(h_1) \in P_{1,A} U_{1,\infty}^* \prod_p U_{1,p}^*
$$

と定める．

命題 6.2 $F \in S_k(\prod_p K_p^*)$，$\varphi \in S(U_A^*)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\int_{H_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash H_{1,A}} F(h_1 g_\eta) \, E(h_1, \varphi; s - 1/2) \, dh_1 \\
&= \int_{\boldsymbol{Q}_A^\times} \left\{ \int_{H_{\boldsymbol{Q}} \backslash H_A} F_\eta(\begin{pmatrix} t & & \\ & h & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta) \, \varphi(h) \, dh \right\} |t|^{s-(m+2)/2} \, d^\times t
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$g_\eta \in G_{1,\infty}^0$ を $g_\eta \cdot \mathcal{Z}_0 = i\eta(Q_1[\eta]/2)^{-1/2}$ となるようにとった．

命題 6.3 $\mathbf{1}$ で H_A 上恒等的に 1 をとる関数を表す．$E(h_1, \mathbf{1}; s)$ は $s = (m+1)/2$ で 1 位の極をもち，その留数は

$$
\operatorname*{Res}_{s=1+m/2} E(h_1, \mathbf{1}; s) = \frac{(2\pi)^{(m+1)/2}}{(\det T)^{1/2}} \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m+1)} \frac{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s)}{\zeta(m+1)} \prod_{p<\infty} \frac{B_{T,p}(p^{-(m+1)/2})}{B_{T,p}(p^{-(m+3)/2})}
$$

$$
\begin{cases} \dfrac{\zeta(m+1)}{\zeta(m+2)} & m : \text{even} \\ \dfrac{L(\chi_T; (m+1)/2)}{L(\chi_T; (m+3)/2)} & m : \text{odd} \end{cases}
$$

である（h_1 に依存しないことに注意）.

命題 6.4 $H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A$ の基本領域の体積は,

$$\mathrm{vol}(H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A) = \mathrm{vol}(H_A^*)\, 2^{1-m}\pi^{-(m+1)(m+2)/2}\prod_{j=1}^{m+1}\Gamma(j/2)(\det T)^{m/2}\prod_{j=1}^{[m/2]}\zeta(2j)$$
$$\times\prod_{p<\infty}B_{T,p}(p^{-(m+1)/2})\begin{cases}1 & m:\text{even}\\ L(\chi_T;(m+1)/2) & m:\text{odd}\end{cases}$$

である.

定理 6.1 の主張は，$F = I(f)$ のとき，F_η が左 H_A 不変であることに注意すれば，上記 3 つの命題から従う.

参考文献

[**1**] K. Doi and H. Naganuma : On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. math. **9** (1969), 1 – 14.

[**2**] 宮崎直：theta 関数の変換公式，第 19 回整数論サマースクール，2011.

[**3**] H, Naganuma : On the coincidence of two Dirichlet series associated with cusp forms of Hecke's "Neben"-type and Hilbert modular forms over a real quadratic field, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 547 – 555.

[**4**] S. Niwa : Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions, Nagoya Math. J. **56** (1974), 147 – 161.

[**5**] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977), 97 – 144.

[**6**] T. Shintani : On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagoya Math. J. **58** (1975), 83 – 126.

[**7**] S. Sugano : Jacobi forms and the theta lifting, Comment. Math. Univ. St. Pauli **44** (1995), 1 – 58.

[**8**] D. Zagier : Modular forms associated to real quadratic fields, Invent. math. **30** (1975), 1 – 46.

[**9**] D. Zagier : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H Maass), Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980, Progr. Math. Vol. 5 (1980), 371 – 394, Birkhauser.

Borcherds product

青木 宏樹 (東京理科大学)

2011 年 9 月 7 日

1 はじめに

本稿は、サマースクールにおいて同一のタイトルで行った講演の内容を元に、若干の加筆修正を行ったものです。講演と同様、ボーチャーズによって発見された無限積を用いて保型形式を構成する方法について、煩雑な部分を避けてなるべく簡単に、しかしアイデアが伝わる形で概説することが、本稿の目標です。

と、最初から偉そうに書きましたが、本稿以外にもボーチャーズ無限積について解説が行われている日本語の文献は、少なくありません。総合的な解説としては [3, 6, 25] などがあり、また、とりあえずボーチャーズ無限積がどんなものか知りたいときには [22, 26] などが読み易いと思います。これらの文献と共に、本稿が、読者のみなさま、特に若い学生の人たちがボーチャーズ無限積を知る助けになればと思います。

2 保型形式

まず最初に、今後使う記号の準備を兼ねて、保型形式についての基本事項をまとめておく。

2.1 楕円モジュラー形式

複素上半平面を

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

２次の実特殊線形群を

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}$$

と書くことにする。群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への（左からの）作用

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{H}\ni(M,\tau)\longmapsto M\langle\tau\rangle\in\mathbb{H}$$

を

$$M\langle\tau\rangle:=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\qquad\left(M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\right)$$

で定める。すなわち、この写像（１次分数変換）は、２条件

- $\forall\tau\in\mathbb{H},\ E_2\langle\tau\rangle=\tau$
- $\forall M,M'\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ \forall\tau\in\mathbb{H},\ M\langle M'\langle\tau\rangle\rangle=(MM')\langle\tau\rangle$

をみたす。ここで、 E_2 は２次の単位行列である。この作用は忠実ではない、すなわち $(-E_2)\langle\tau\rangle=\tau$ であることを注意しておく。

複素上半平面で定義された正則関数全体のなす集合を $\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ と書くことにする。整数 $k\in\mathbb{Z}$ に応じて定まる、群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ への（右からの）作用

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{H})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ni(f,M)\longmapsto f|_kM\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$$

を

$$(f|_kM)(\tau):=(c\tau+d)^{-k}f(M\langle\tau\rangle)\qquad\left(M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\right)$$

で定める。すなわち、この写像は、２条件

- $\forall f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}),\ f|_kE_2=f$
- $\forall M,M'\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ \forall f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}),\ (f|_kM)|_kM'=f|_k(MM')$

をみたす。この作用は k が奇数のときに限って忠実である。

本稿では、楕円モジュラー形式として、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散部分群が $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\cap\mathrm{M}(2,\mathbb{Z})$ のときだけを扱う。複素上半平面上の正則関数 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ が重み k の保型性を持つとは条件

$$\forall M\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ f|_kM=f$$

が成り立つことである。このとき、 f は τ について周期 1 を持つので、フーリエ展開により

$$f(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_f(n)q^n$$

という形に書ける。ただし、ここでは $q:=\mathbf{e}(\tau):=\exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおいた。関数 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$ が重み k の楕円モジュラー形式であるとは、 f が次の２条件を満たすことである。

- f は重み k の保型性を持つ
- $n < 0$ なら $a_f(n) = 0$ （ f はカスプ付近で有界）

最後の条件のかわりに、より強い条件

- $n \leq 0$ なら $a_f(n) = 0$ （ f はカスプで消える）

を満たすとき、 f はカスプ形式であるという。また、最後の条件のかわりに、少し弱い条件

- ある定数 N が存在して $n < N$ であれば $a_f(n) = 0$

を満たすとき、 f はカスプを除いて正則な楕円モジュラー形式であるという。重み k の楕円モジュラー形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を M_k、そのなかでカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathrm{M}_k^{\mathrm{cusp}}$ と書くことにする。$-E_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ を考えることにより、 k が奇数であれば $\mathrm{M}_k = \mathrm{M}_k^{\mathrm{cusp}} = \{0\}$ であることがすぐにわかる。

ここで、楕円モジュラー形式の例をいくつかあげておく。アイゼンシュタイン級数

$$e_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

は、 k が 2 より大きい偶数のとき、収束して重み k の楕円モジュラー形式になる。(k が奇数でも収束するが、 (c,d) と $(-c,-d)$ が相殺して 0 になるのでつまらない。）そのフーリエ展開は

$$e_k(\tau) = 1 + C_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \in \mathrm{M}_k$$

で与えられる。ここで、 $\sigma_{k-1}(n)$ は n の約数の $k-1$ 乗和、すなわち

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{0<d|n} d^{k-1}$$

であり、また、 C_k はベルヌーイ数 B_k をもちいて

$$C_k := -\frac{2k}{B_k}$$

とあらわされる定数である。具体的な数値は、たとえば

$$C_4 = 240, \quad C_6 = -504, \quad C_8 = 480, \quad C_{10} = -264, \quad C_{12} = \frac{65520}{691}, \quad \ldots$$

である。

また、別の例として、ラマヌジャンのデルタ関数

$$\Delta(\tau) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \in \mathrm{M}_{12}^{\mathrm{cusp}}$$

がある。この保型形式は、（カスプでは消えているが）上半平面 $\mathbb{H}$ 上に零点を持たない。実際、この $\Delta(\tau)$ が重み 12 の保型性を持つことの証明は、たとえば [5] などを参考にされたい。

ここで、後に利用するため、楕円モジュラー形式に関する次の命題を証明しておく。

命題 1. f を、重み 2 のカスプを除いて正則な楕円モジュラー形式とする。このとき、 f のフーリエ展開

$$f(\tau) = \sum_{n=N}^{\infty} a_f(n) q^n$$

の定数項 $a_f(0)$ は 0 である。

Proof. $\rho := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $i := \sqrt{-1}$ とすると、f のフーリエ展開の定数項は

$$a_f(0) = \int_{\rho}^{1+\rho} f(\tau) d\tau$$

と書ける。ただし、積分路は、原点を中心とする単位円周上 ρ から始まり i を経由して $1+\rho$ で終わるものとする。この積分路を i を境に 2 つにわけると、 f は重み 2 であったので、変数変換 $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ によって前半と後半は打ち消しあい、$a_f(0) = 0$ が得られる。 □

なお、この証明は離散部分群が $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ （フルモジュラー）であることを用いている。そのため、離散部分群がフルモジュラーでない場合に本稿と同じことを試みた場合、この命題は、障害となりうる部分のひとつである。

さて、楕円モジュラー形式がどの程度あるかについては、次の結果がよく知られている。

定理 2. 重み k が負あるいは奇数の楕円モジュラー形式は 0 しかない。また、重み 0 の楕円モジュラー形式は定数である。重み k が非負の偶数のとき、任意の楕円モジュラー形式 $f \in \mathrm{M}_k$ は、2 つの代数的に独立な楕円モジュラー形式 e_4, e_6 をもちいて

$$f(\tau) = \sum_{4a+6b=k} c_{a,b}\, e_4(\tau)^a e_6(\tau)^b \qquad (c_{a,b} \in \mathbb{C})$$

と一意的に書き表すことができる。すなわち、楕円モジュラー形式のなす次数付き環 $\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}$ の構造は次のとおりである。

$$\mathrm{M}_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{M}_k = \mathbb{C}[e_4, e_6]$$

実際、

$$\Delta(\tau) = \frac{e_4(\tau)^3 - e_6(\tau)^2}{1728}$$

が成り立つ。また、

$$\mathrm{M}_k \ni f \overset{\sim}{\longmapsto} \Delta \cdot f \in \mathrm{M}_{k+12}^{\mathrm{cusp}}$$

はベクトル空間の同型写像である。

楕円モジュラー形式は、保型形式のなかで最も基本的なものであり、また、数論と密接に関係している。ここで述べたことの詳細や、より進んだ内容については、保型形式の教科書、たとえば [13, 31] などを参考にされたい。

2.2 ジーゲル保型形式

自然数 g に対して定義される集合

$$\mathbb{H}_g := \{Z \in \mathrm{M}(g, \mathbb{C}) \mid Z = {}^tZ,\ \mathrm{Im}\, Z > 0\}$$

を g 次のジーゲル上半空間という。ここで、 $\mathrm{Im}\, Z > 0$ は、行列 Z の虚部が正定値であるという意味である。

$$\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2g, \mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tMJ_gM = J_g := \begin{pmatrix} O_g & -E_g \\ E_g & O_g \end{pmatrix} \right\}$$

を g 次のシンプレクティック群という。ただし、 O_g は g 次の零行列、 E_g は g 次の単位行列をあらわすものとする。群 $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R})$ の $\mathbb{H}_g$ への（左からの）作用

$$\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}_g \ni (M, Z) \longmapsto M\langle Z\rangle \in \mathbb{H}_g$$

を

$$M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \qquad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \right)$$

で定める。この作用は忠実ではない、すなわち $(-E_{2g})\langle Z\rangle = Z$ であることを注意しておく。

ジーゲル上半空間 $\mathbb{H}_g$ で定義された正則関数全体のなす集合を $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$ と書くことにする。整数 $k \in \mathbb{Z}$ に応じて定まる、群 $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{R})$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$ への（右からの）作用

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g) \times \mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \ni (F, M) \longmapsto F|_k M \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$$

を

$$(F|_kM)(Z) := \det(CZ+D)^{-k} F(M\langle Z\rangle) \qquad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{R}) \right)$$

で定める。この作用は kg が奇数のときに限って忠実である。なお、 $g=1$ のとき、 $\mathbb{H}_1=\mathbb{H}$ かつ $\mathrm{Sp}(1,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ であるので、この節の内容は、前節の内容をより一般化したものである。

本稿では、ジーゲル保型形式として、$\mathrm{Sp}(g,\mathbb{R})$ の離散部分群が $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}) := \mathrm{Sp}(g,\mathbb{R})\cap \mathrm{M}(2g,\mathbb{Z})$ のときだけ（さらに、 $g=2$ の場合だけ）を扱う。正則関数 $F\in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}_g)$ が（g 次の）重み k のジーゲル保型形式であるとは、

$$\forall M\in \mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}),\ F|_k M = F$$

が成り立つことである。ただし、 $g=1$ のときには、この条件に加え、前節で述べたフーリエ展開についての条件も成り立つこととする。いずれにせよ、F がジーゲル保型形式であれば、 F は Z の各成分について周期 1 を持つので、フーリエ展開により

$$F(Z)=\sum_{T={}^tT} a_F(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ))$$

という形に書ける。ここで、 T は g 次の対称行列で、各成分が半整数、さらに対角成分は整数のもの全体をわたる。楕円モジュラー形式のときとは違って、 $g\geq 2$ では、カスプ付近で有界であるという条件は、保型性から導かれる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 3. （ケヒャーの主張） g を 2 以上の自然数とし、 F を重み k のジーゲル保型形式であるとする。このとき、 F はカスプ付近で有界である。すなわち、 F のフーリエ展開

$$F(Z)=\sum_{T={}^tT} a_F(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ))$$

において、 $T\geq 0$ でなければ $a_F(T)=0$ である。ただし、 $T\geq 0$ は T が半正値であるという意味である。

ケヒャーの主張よりより強く、

- $T>0$ でなければ $a_F(T)=0$ （ F はカスプで消える）

を満たすとき、 F はカスプ形式であるという。$-E_{2g}\in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ を考えることにより、 kg が奇数のときには、ジーゲル保型形式は 0 しかないことがすぐにわかる。

本稿で扱う Borcherds 無限積は、 $g=2$ での話題である。そこで、これ以降、本稿では $g=2$ に限定して話を進めることにする。そこで、 $g=2$ のとき、重み k のジーゲル保型形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{M}_k$、そのなか

でカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{M}_k^{\mathrm{cusp}}$ と書くことにする。また、定義においては $\mathbb{H}_2$ の元 Z は 2 次の行列であるが、便宜上、

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}$$

とおき、必要に応じて $F(Z)$ のかわりに $F(\tau, z, \omega)$ と書くことにする。この表記では、ケヒャーの主張は次のように書ける。

定理 4. （ケヒャーの主張） $F \in \mathbb{M}_k$ とする。このとき、 F はカスプ付近で有界である。すなわち、 F のフーリエ展開

$$F(Z) = \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} c(n,l,m)\,\mathbf{e}(n\tau + lz + m\omega)$$

において、「 $4nm - l^2 \geq 0$ かつ $n \geq 0$ 」でなければ $c(n,l,m) = 0$ である。

2 次のジーゲル保型形式がどの程度あるかという問題は、1960 年代に解決されている。([24])

定理 5. （井草の定理）重み k が負のジーゲル保型形式は 0 しかない。また、重み 0 のジーゲル保型形式は定数である。重み k が非負の偶数のとき、任意のジーゲル保型形式 $F \in \mathbb{M}_k$ は、4 つの代数的に独立なジーゲル保型形式 $E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}$ （それぞれの重みは順に $4, 6, 10, 12$ ）をもちいて

$$F(Z) = \sum_{4a+6b+10c+12d=k} c_{a,b,c,d} E_4(Z)^a E_6(Z)^b \Delta_{10}(Z)^c \Delta_{12}(Z)^d \qquad (c_{a,b,c,d} \in \mathbb{C})$$

と一意的に書き表すことができる。また、重み 35 の 0 ではないジーゲル保型形式 Δ_{35} が存在し、重み k が奇数のジーゲル保型形式は、重み $k-35$ のジーゲル保型形式と Δ_{35} との積になっている。すなわち、ジーゲル保型形式のなす次数付き環 $\mathbb{M}_{\mathbb{Z}}$ の構造は次のとおりである。

$$\mathbb{M}_{2\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} \mathbb{M}_k = \mathbb{C}[E_4, E_6, \Delta_{10}, \Delta_{12}]$$

$$\mathbb{M}_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{M}_k = \mathbb{M}_{2\mathbb{Z}} \oplus \Delta_{35}\mathbb{M}_{2\mathbb{Z}}$$

ここで述べたことの詳細や、より進んだ内容については、たとえば [13, 16, 27] などを参考にされたい。

2.3 ヤコビ形式

大雑把にいえば、ヤコビ形式というのは、ジーゲル保型形式（やその他の多変数の保型形式）をある特定の変数でフーリエ展開したとき、その係数にあらわれる残りの変数についての関数、あるいは、それと同等の変換規則をみたす関数で、後述するような保型性と周期性を持っているものである。最も基本的な例は、 2 次のジーゲル保型形式をフーリエ・ヤコビ展開したときにあらわれるものである。すなわち、 $F \in \mathbb{M}_k$ を

$$F(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$$

と展開すると、各 φ_m は指数 m のヤコビ形式になっている。本稿では、この最も基本的なタイプのヤコビ形式、すなわち、 2 変数のヤコビ形式に限って話を進めることにする。

整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対し、写像 $i_m : \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}) \to \mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ を $(i_m\varphi)(Z) := \varphi(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$ で定め、

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J := \{M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}) \mid \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_1\varphi)|_0 M = i_1\psi\}$$

とおく。この $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ を $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ のヤコビ部分群という。このとき、 $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ は、性質

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_m\varphi)|_k M = i_m\psi$$

をみたす。この ψ を $\varphi|_{k,m}M$ と書くことにする。この対応は、整数 $k, m \in \mathbb{Z}$ を固定するごとに、群 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C})$ への（右からの）作用を定めている。

ヤコビ形式を定義する前に、ヤコビ部分群 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})^J$ について少々述べておく。まず最初に、ヤコビ部分群の元をいくつかあげておく。

$$T(u) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ u \in \mathbb{R}\ )$$

$$C(a, b, c, d) := \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\ )$$

$$U(x, y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ x & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ x, y \in \mathbb{R}\ )$$

これら3種類の元の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ への作用は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}(\varphi|_{k,m}T(u))(\tau,z) =& \mathbf{e}(mu)\varphi(\tau,z)\\ (\varphi|_{k,m}C(a,b,c,d))(\tau,z) =& (c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\left(\frac{-mcz^2}{c\tau+d}\right)\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\\ (\varphi|_{k,m}U(x,y))(\tau,z) =& \mathbf{e}\left(m(x^2\tau+2xz+xy)\right)\varphi(\tau,z+x\tau+y)\end{aligned}$$

このとき、次の命題が成り立つ。

命題 6. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J$ の任意の元は、実数 $a,b,c,x,y,u\in\mathbb{R}$ をもちいて $C(a,b,c)U(x,y)T(u)$ の形に一意的に書ける。

また、

$$S := \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

とおくと（ S は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J$ の元ではない）、次の命題が成り立つ。

命題 7. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J$ と S で生成される。

この S の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ への作用は

$$(F|_kS)(\tau,z,\omega)=(-1)^{-k}F(\omega,z,\tau)$$

である。

本稿では、ヤコビ形式として、離散部分群が $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J := \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^J\cap \mathrm{M}(4,\mathbb{Z})$ のときだけを扱う。この離散部分群に対しても、先の2つの命題と類似の命題が成り立つ。

命題 8. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J$ の任意の元は、整数 $a,b,c,x,y,u\in\mathbb{Z}$ をもちいて $C(a,b,c)U(x,y)T(u)$ の形に一意的に書ける。

命題 9. $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J$ と S で生成される。

正則関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ が重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとは条件

$$\forall M\in\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J,\ \varphi|_{k,m}M=\varphi$$

が成り立つことである。いいかえれば、次の 2 条件が成り立つことである。

$$\varphi(\tau,z)=(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\left(\frac{-mcz^2}{c\tau+d}\right)\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\right)$$

$$\varphi(\tau,z)=\mathbf{e}\left(m(x^2\tau+2xz)\right)\varphi(\tau,z+x\tau+y)\quad(\ x,y\in\mathbb{Z}\ )$$

（ヤコビ形式の）保型性を持つ正則関数については、次の命題が成り立つので、実質的には $m\geq 0$ のときだけを考えればよい。

命題 10. 正則関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $m<0$ であれば、 $\varphi=0$ である。
- $m=0$ であれば、 φ は τ だけの関数とみなせる。（ z については定数関数である。）

Proof. 変数 τ を固定し、 φ を z の関数と考えて、周期平行四辺形内の零点の個数を勘定すると、上記の変換規則から

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz=2m$$

となるので、 $m\geq 0$ である。とくに $m=0$ なら φ は z について零点をもたないか恒等的に 0 であるかのどちらかであり、いずれにせよ z について定数関数である。 □

そこで、 $m\geq 0$ とし、正則関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとする。このとき、 φ は τ,z の両変数について周期 1 を持つので、フーリエ展開により

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{n,l\in\mathbb{Z}}c(n,l)q^n\zeta^l$$

という形に書ける。ただし、ここでは $q:=\mathbf{e}(\tau),\ \zeta:=\mathbf{e}(z)$ とおいた。なお、$m>0$ のときには $c(n,l)$ は $4nm-l^2$ と $l \mod 2m$ の値のみで定まり、さらに $c(n,l)=(-1)^kc(n,-l)$ である。また、 $m=0$ のときには $l=0$ のときを除いて $c(n,l)=0$ である。

さて、関数 $\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times\mathbb{C})$ が重み k 指数 m のヤコビ形式であるとは、φ が次の 2 条件を満たすことである。

- φ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。
- $4nm-l^2<0$ なら $c(n,l)=0$

最後の条件のかわりに、より強い条件

- $4nm - l^2 \leq 0$ なら $c(n,l) = 0$

を満たすとき、 φ はカスプ形式であるという。また、最後の条件のかわりに、少し弱い条件

- $n < 0$ なら $c(n,l) = 0$

を満たすとき、 φ は弱ヤコビ形式であるといい、さらに弱い条件

- ある定数 N が存在して $n < N$ であれば $c(n,l) = 0$

を満たすとき、 φ は弱正則ヤコビ形式であるという。

なお、 $m = 0$ のときには、重み k 指数 0 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ $\varphi(\tau, z)$ は z について定数関数であり、 τ の関数として重み k の保型性を持つ。したがって、重み k 指数 0 のヤコビ形式とは、重み k の楕円モジュラー形式のことである。しかし、定義より、重み k 指数 0 のカスプ形式は 0 しかなく、楕円モジュラー形式の重み k のカスプ形式とは違うことに注意されたい。また、 $m = 0$ では、ヤコビ形式と弱ヤコビ形式はまったく同じものになる。

重み k 指数 m のヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}$、そのなかでカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$ と書くことにする。また、重み k 指数 m の弱ヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{weak}}$ 、弱正則ヤコビ形式全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{wh}}$ と書くことにする。定義より明らかに $\mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{cusp}} \subset \mathbb{J}_{k,m} \subset \mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{weak}} \subset \mathbb{J}_{k,m}^{\mathrm{wh}}$ である。

ここで、ヤコビ形式の例をいくつかあげておく。

$$\varphi_{-2,1}(\tau, z) := \left(\zeta - 2 + \zeta^{-1}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n \zeta)^2 (1 - q^n)^{-4} \left(1 - q^n \zeta^{-1}\right)^2 \in \mathbb{J}_{-2,1}^{\mathrm{weak}}$$

$$\varphi_{-1,2}(\tau, z) := \left(\zeta - \zeta^{-1}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^n \zeta^2\right) (1 - q^n)^{-2} \left(1 - q^n \zeta^{-2}\right) \in \mathbb{J}_{-1,2}^{\mathrm{weak}}$$

は、それぞれ、重み -2 指数 1 および重み -1 指数 2 の弱ヤコビ形式である。特に

$$\varphi_{10,1} := \Delta(\tau) \varphi_{-2,1}(\tau, z) \in \mathbb{J}_{10,1}^{\mathrm{cusp}}$$

は、重み 10 指数 1 のカスプ形式である。

また、ワイエルシュトラスのペー関数

$$\begin{aligned} \wp(\tau, z) :=& \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(z - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} \\ =& \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (2k - 1) e_{2k}(\tau) z^{2k-2} \end{aligned}$$

は、 $z=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ に 2 位の極を持つ有理型関数であるが、重み 2 指数 0 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。さらに

$$\frac{12\wp(\tau,z)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^2}=\frac{\zeta+10+\zeta^{-1}}{\zeta-2+\zeta^{-1}}+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a|n}a\left(\zeta^{a}-2+\zeta^{-a}\right)\right)q^n$$

であることから、

$$\varphi_{0,1}:=\frac{12\wp(\tau,z)\varphi_{-2,1}(\tau,z)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^2}\in\mathbb{J}_{0,1}^{\mathrm{weak}}$$

は、重み 0 指数 1 の弱ヤコビ形式である。

ヤコビ形式がどの程度あるかという問題は、弱ヤコビ形式については、次に述べるような定理がある。しかし、ヤコビ形式全体のなす次数付き環は、楕円モジュラー形式全体のなす次数付き環に対して有限生成ではないことが知られており、記述するのは少々面倒である。

定理 11. 指数 m が負の弱ヤコビ形式は 0 しかない。また、指数 m で重みが $-2m$ 以下の弱ヤコビ形式も 0 しかない。重み k が偶数のとき、弱ヤコビ形式 $\varphi\in\mathbb{J}_{k,m}^{weak}$ は、4 つの代数的に独立な弱ヤコビ形式 $e_4,e_6,\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}$ （それぞれの重みは順に $4,6,-2,0$、指数は順に $0,0,1,1$ ）をもちいて

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{4a+6b-2c=k,\ c+d=m}c_{a,b,c,d}e_4(\tau)^a e_6(\tau)^b\varphi_{-2,1}(\tau,z)^c\varphi_{0,1}(\tau,z)^d\qquad(c_{a,b,c,d}\in\mathbb{C})$$

と一意的に書き表すことができる。また、重み k が奇数の弱ヤコビ形式は、重み $k+1$ のヤコビ形式と $\varphi_{-1,2}$ との積になっている。すなわち、弱ヤコビ形式の環の構造は次のとおりである。

$$\mathbb{J}_{2\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}:=\bigoplus_{k\in2\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}}\mathbb{J}_{k,m}^{weak}=\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}[\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}]=\mathbb{C}[e_4,e_6,\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}]$$

$$\mathbb{J}_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}}\mathbb{J}_{k}^{weak}=\mathbb{J}_{2\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}\oplus\varphi_{-1,2}\mathbb{J}_{2\mathbb{Z},\mathbb{Z}}^{weak}$$

ここで述べたことの詳細や、より進んだ内容については、ヤコビ形式の教科書（[15]）などを参考にされたい。

3　ボーチャーズのアイデア

1990 年代半ば、ボーチャーズの一連の仕事により、ムーンシャイン予想が解決された。このなかで、彼は、無限積による保型形式の構成法（ボーチャー

ズ無限積）を与えている。ここでは、証明の細部には立ち入らずに、彼のアイデアを紹介したい。

3.1 マースリフト

まず最初に、マースリフト（齋藤・黒川リフト）について復習しておく。マースリフトは、指数 1 のヤコビ形式から、2 次のジーゲル保型形式を作る方法であった。

命題 12. $t \in \mathbb{N}$ とする。 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}$ のとき

$$(\varphi|_{k,m}V(t))(\tau, z) := t^{k-1} \sum_{ad=t,\ a>0} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \varphi\left(\frac{a\tau+b}{d}, az\right) \in \mathbb{J}_{k,mt}$$

である。特に $\varphi \in \mathbb{J}_{k,m}^{cusp}$ なら $\varphi|_{k,m}V(t) \in \mathbb{J}_{k,mt}^{cusp}$ である。

定理 13. （マースリフト） k を偶数とする。$\varphi \in \mathbb{J}_{k,1}^{cusp}$ のとき

$$(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) := \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi|_{k,1}V(m))(\tau, z)p^m \in \mathbb{M}_k^{cusp}$$

である。ただし、ここでは $p := \mathbf{e}(\omega)$ とおいた。

たとえば、

$$\begin{aligned} \mathrm{ML}(\varphi_{10,1}) =& \Delta_{10} \qquad (\varphi_{10,1}(\tau, z) := \Delta(\tau)\varphi_{-2,1}(\tau, z) \in \mathbb{J}_{10,1}^{\mathrm{cusp}}) \\ \mathrm{ML}(\varphi_{12,1}) =& \Delta_{12} \qquad (\varphi_{12,1}(\tau, z) := \Delta(\tau)\varphi_{0,1}(\tau, z) \in \mathbb{J}_{12,1}^{\mathrm{cusp}}) \end{aligned}$$

である。 E_4, E_6 も、カスプ形式ではないが、後述する修正をおこなえば、ヤコビ形式

$$\varphi_{4,1} := \frac{e_4(\tau)\varphi_{0,1}(\tau, z) - e_6(\tau)\varphi_{-2,1}(\tau, z)}{12} \in \mathbb{J}_{4,1}$$

および

$$\varphi_{6,1} := \frac{e_6(\tau)\varphi_{0,1}(\tau, z) - e_4(\tau)^2\varphi_{-2,1}(\tau, z)}{12} \in \mathbb{J}_{6,1}$$

からマースリストで構成できる。

さて、ここでは、命題 12 は認めて、定理 13 の保型性がどのようにして証明されたのかを復習しておく。 φ のフーリエ展開を

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n,l \in \mathbb{Z}} c(n,l)q^n\zeta^l \in \mathbb{J}_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) &:= \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi|_{k,1}V(m))(\tau,z)\mathbf{e}(m\omega) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \sum_{ad=m} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \varphi\left(\frac{a\tau+b}{d}, az\right)\mathbf{e}(m\omega) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \sum_{ad=m} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)\mathbf{e}\left(n\frac{a\tau+b}{d} + alz + m\omega\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \sum_{ad=m} d^{-k+1} \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(dn,l)\mathbf{e}\left(na\tau + alz + m\omega\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{ad=m} a^{k-1} \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c\left(\frac{nm}{a}, l\right)\mathbf{e}\left(na\tau + alz + m\omega\right) \\
&= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} a^{k-1} c(nm,l)\mathbf{e}\left(na\tau + alz + am\omega\right) \\
&= \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} \sum_{a|(n,l,m)} a^{k-1} c\left(\frac{nm}{a^2}, \frac{l}{a}\right)\mathbf{e}\left(n\tau + lz + m\omega\right)
\end{aligned}
$$

となるので、 $\mathrm{ML}(\varphi)$ は S で不変である。よって、命題 9 より $\mathrm{ML}(\varphi)$ は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ の作用で不変であり、重み k の保型形式であることが示される。

ここでは、カスプ形式についてのマースリフトを説明したが、カスプ形式でないヤコビ形式に対しては、$\varphi|_{k,1}V(0)$ として適当なアイゼンシュタイン級数を補うことによってマースリフトが定まる。では、弱ヤコビ形式や弱正則ヤコビ形式については、マースリフトはどうなるのであろうか。実際、ケヒャーの主張があるので、形式的な計算は同じようにできても、結果は正則関数にはならないはずである。ボーチャーズは、論文 [9] においてこの問題を考察し、弱正則ヤコビ形式 $\varphi \in \mathbb{J}_{k,1}^{\mathrm{wh}}$ に対してマースリフトがどのようになるかを調べた。そして、ある状況下では、$\varphi|_{k,1}V(0)$ としてワイエルシュトラスのペー関数を補うことによりマースリフトが定まり、保型形式の変換規則を満たす有理型関数が得られることを示している。

3.2 ボーチャーズのアイデア

彼のアイデアは、知ってしまえば、とても単純なものである。さきほどのマースリフトの計算において、 $k=0$ のときを考えよう。もちろん実際には $\mathbb{J}_{0,1}=\{0\}$ であるからマースリフトそのものは $\mathrm{ML}(0)=0$ という当たり前の結果しか与えない。が、とりあえずそのことには目をつぶって、形式的にフーリエ展開の計算をしてみることにする。

$$
\varphi(\tau,z) = \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n\zeta^l \in \mathbb{J}_{0,1}^{\mathrm{cusp}}
$$

とおくと、さきほどの計算により

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) = & \quad \cdots\cdots\cdots \\
= & \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} a^{-1} c(nm,l)\mathbf{e}\left(na\tau + alz + am\omega\right) \\
= & \sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} c(nm,l) \sum_{a=1}^{\infty} a^{-1}\mathbf{e}\left(n\tau + lz + m\omega\right)^{a} \\
= & -\sum_{n,l,m\in\mathbb{Z}} c(nm,l)\log\left(1-\mathbf{e}\left(n\tau + lz + m\omega\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。すなわち

$$
\exp(-\mathrm{ML}(\varphi)) = \prod_{n,l,m\in\mathbb{Z}} \left(1 - q^{n}\zeta^{l}p^{m}\right)^{c(nm,l)}
$$

が得られる。もちろんこれは S で不変であるから、無限積

$$
\prod_{n,l,m\in\mathbb{Z}} \left(1 - q^{n}\zeta^{l}p^{m}\right)^{c(nm,l)}
$$

は重み 0 のジーゲル保型形式である。

もっとも、冷静に考えれば、 $\mathbb{J}_{0,1}^{\mathrm{cusp}} = \{0\}$ であるから、これは $\exp(0) = 1$ という自明なことしか言っていない。が、元の φ が弱ヤコビ形式、あるいは弱正則ヤコビ形式であれば、 φ は 0 とは限らないので、この無限積は結構複雑なものになるであろう。そのとき、この無限積は、何を意味しているのだろうか。ボーチャーズによる解答を述べる前に、まず、元の φ が弱ヤコビ形式、あるいは弱正則ヤコビ形式のときに、この計算がどこで破綻しているかをはっきりとさせておこう。

マースリフトにおいては、 φ はカスプ形式であるとしているので、そのフーリエ展開の係数 $c(n,l)$ は、 $n>0$ のところにしか現れない。これが、マースリフトにおける和のとりかた $\sum_{m=1}^{\infty}$ とちょうどマッチして、 τ と ω の対称性、すなわち S-不変性がいえたのであった。これが、もし φ がカスプ形式でないヤコビ形式であれば、 $n=0$ にもフーリエ展開の係数があらわれるので、 $\varphi|_{k,1}V(0)$ を補わねばならない。さらに、 φ がヤコビ形式ではなく弱正則ヤコビ形式であれば、 $n<0$ にもフーリエ係数があらわれるので、もし S-不変性を得たいのであれば、さらなる修正が必要となってくる。

では、ボーチャーズのアイデア、すなわち、無限積 $\exp(-\mathrm{ML}(\varphi))$ における修正の様子を、具体例を通してみてみよう。

$$
\varphi(\tau,z) := 2\varphi_{0,1}(\tau,z) \in \mathbb{J}_{0,-1}^{\mathrm{weak}}
$$

のときを考える。そのフーリエ展開を

$$\begin{aligned}\varphi(\tau,z)=&\sum_{n,l\in\mathbb{Z}}c(n,l)q^n\zeta^l\\ =&\left(2\zeta+20+2\zeta^{-1}\right)\\ &+\left(20\zeta^2-128\zeta+216-128\zeta^{-1}+20\zeta^{-2}\right)q\\ &+\cdots\end{aligned}$$

とおき、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z):=q\zeta^{-1}p\prod_{(n,l,m)>0}\left(1-q^n\zeta^lp^m\right)^{c(nm,l)}$$

と定める。ここで、無限積部分の $(n,l,m)>0$ は

「$m\in\mathbb{N},\ n,l\in\mathbb{Z}$」または「$m=0,\ n\in\mathbb{N},\ l\in\mathbb{Z}$」または「$m=n=0,\ l\in\mathbb{N}$」

を意味するものとする。この無限積のうち、 $m\geq 1$ の部分は $\exp(-\mathrm{ML}(\varphi))$ であるから、修正として追加された部分は

$$\begin{aligned}&q\zeta^{-1}p\prod_{n,l}\left(1-q^n\zeta^l\right)^{c(0,l)}\\ =&q\left(\zeta-2+\zeta^{-1}\right)p\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\zeta\right)^2\left(1-q^n\right)^{20}\left(1-q^n\zeta^{-1}\right)^2\\ =&\Delta(\tau)\varphi_{-2,1}(\tau,z)p\end{aligned}$$

である。これは、追加部分が、重さ 10 指数 1 のヤコビ形式に対応していることを示している。さらに、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z):=q\left(\zeta-2+\zeta^{-1}\right)p\prod_{n,m\geq 0}\prod_{l\in\mathbb{Z}}\left(1-q^n\zeta^lp^m\right)^{c(nm,l)}$$

であるから、 $\mathrm{BP}(\varphi)$ は S-不変である。以上より、(何らかの方法で $\mathrm{BP}(\varphi)$ が $\mathbb{H}_2$ 上の正則関数であることがいえれば) $\mathrm{BP}(\varphi)$ は重さ 10 のジーゲル保型形式、すなわち Δ_{10} であることがわかる。これで、「無限積=無限和」の形をした等式

$$\mathrm{ML}(\varphi_{10,1})=\mathrm{BP}(2\varphi_{0,1})\quad(=\Delta_{10})$$

が示された。これは、ボーチャーズがムーンシャイン予想を解決する過程で使われた(ものを一般化して定式化した)BKMリー環の分母公式の一例である。また、 Δ_{35} も Δ_{10} と同様の方法で無限積表示を持つことがわかる。

3.3 無限積によるジーゲル保型形式の構成

前節では $\varphi=2\varphi_{0,1}$ とおいたが、本節では、一般の $\varphi\in\mathbb{J}_{k,0}^{\mathrm{wh}}$ について前節と同様のことを考察する。すなわち、

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{n,l\in\mathbb{Z}}c(n,l)q^n\zeta^l\in\mathbb{J}_{k,0}^{\mathrm{wh}}$$

とおき、

$$\mathrm{BP}(\varphi)(Z) := q^a\zeta^{-b}p^c \prod_{(n,l,m)>0} \left(1-q^n\zeta^l p^m\right)^{c(nm,l)}$$

と定める。ここで、 $(n,l,m)>0$ の意味は前節と同じであり、また、

$$a := \frac{1}{24}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c(0,l), \qquad b := \frac{1}{2}\sum_{l>0} c(0,l)l, \qquad c := \frac{1}{2}\sum_{l>0} c(0,l)l^2$$

とおいた。前節と同様の計算により、この無限積のうち $m \geq 1$ の部分は $\exp(-\mathrm{ML}(\varphi))$ であるから、修正として追加された部分は

$$q^a\zeta^{-b}p^c \prod_{(n,l)>0} \left(1-q^n\zeta^l\right)^{c(0,l)}$$

である。なお、 $(n,l)>0$ は

「$n\in\mathbb{N},\ l\in\mathbb{Z}$」または「$n=0,\ l\in\mathbb{N}$」

を意味するものとする。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 14. $a,b\in\mathbb{Z}$ かつ $\frac{1}{2}c(0,0)\in\mathbb{Z}$ のとき

$$q^a\zeta^{-b} \prod_{(n,l)>0} \left(1-q^n\zeta^l\right)^{c(0,l)}$$

は、重み $\frac{1}{2}c(0,0)$ 指数 c の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。

Proof. 頑張って計算すればよい。 □

これで $\mathrm{BP}(\varphi)$ が $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})^J$ についての保型性を持つことがわかった。次に $\mathrm{BP}(\varphi)$ が S-不変であることを示したいのだが、そのためには、ひとつ補題を準備しておく必要がある。

補題 15. 次の等式が成り立つ。

$$a-c-\sum_{n>0,\ m<0,\ l\in\mathbb{Z}} nc(nm,l) = 0$$

Proof. まず、

$$\sum_{n>0,\ m<0,\ l\in\mathbb{Z}} nc(nm,l) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \sigma_1(n)c(-n,l)$$

と

$$\frac{\Delta'(\tau)}{24(2\pi\sqrt{-1})\Delta(\tau)} = \frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$$

より、 $a - \sum_{n>0,\, m<0,\, l\in\mathbb{Z}} nc(nm,l)$ は

$$\frac{\Delta'(\tau)\varphi(\tau,0)}{24(2\pi\sqrt{-1})\Delta(\tau)}$$

の（ τ での）フーリエ展開の定数項であることがわかる。一方、 c は

$$\frac{\varphi_{zz}(\tau,0)}{4(2\pi\sqrt{-1})^2}$$

のフーリエ展開の定数項である。したがって、示すべきことは

$$\frac{\Delta'(\tau)\varphi(\tau,0)}{24(2\pi\sqrt{-1})\Delta(\tau)} - \frac{\varphi_{zz}(\tau,0)}{4(2\pi\sqrt{-1})^2}$$

のフーリエ展開の定数項が 0 になることである。実際、計算により、この関数は重み 2 のカスプを除いて正則な保型形式であることがわかるので、命題 1 により、フーリエ展開の定数項は 0 である。 □

これで、次の定理を示すことができる。

命題 16. 条件

$$\frac{1}{2}\sum_{n>0,\, m<0,\, l\in\mathbb{Z}} c(nm,l) \in \mathbb{Z}$$

が成り立てば、 $\mathrm{BP}(\varphi)$ は S-不変である。

Proof. 頑張って計算すればよい。 □

以上より、（何らかの方法で $\mathrm{BP}(\varphi)$ が $\mathbb{H}_2$ 上の正則関数であることがいえれば） $\mathrm{BP}(\varphi)$ は重さ $\frac{1}{2}c(0,0)$ のジーゲル保型形式であることがわかる。なお、命題 14 および 命題 16 における整数条件は、保型性を示す上で 1 の冪根が出てこないようにするためのものである。したがって、指標付きの保型形式で考えれば、これらの条件はほぼ無視できる。一方で、補題 15 は S-不変性を示すうえで本質的であることを注意しておく。

以上が、無限積を用いて保型形式を構成するという Borcherds のアイデアの核心部分である。このアイデアについては、離散部分群を $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ 以外のものにしたり、あるいは領域を一般の IV 型領域上としたりしても、それに応じて適当な修正を行えば、ほぼ同様の議論が可能である。しかし、実際に難しいのは、得られた無限積表示の収束性（あるいは、より小さい収束域から全体への解析接続の可能性）を示すことである。

4　ボーチャーズの結果

4.1　IV 型領域上の保型形式

s を自然数とし、符号 $(2, s+2)$ の対称行列 S は、正定値かつ偶値（各成分が整数かつ対角成分が偶数）である対称行列 $S_0 \in \mathrm{M}(s, \mathbb{Z})$ をもちいて次のようにあらわせるものとする。

$$S = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

このとき、 S の直交群

$$O(S, \mathbb{R}) := \left\{ M \in \mathrm{M}(s+4, \mathbb{R}) \mid {}^t M S M = S \right\}$$

は、集合

$$H_S := \left\{ w \in \mathbb{C}^{s+4} \mid S[w] := {}^t w S w = 0,\ S\{w\} := {}^t \overline{w} S w > 0 \right\}$$

に、通常の行列演算 $w \mapsto Mw$ で作用している。なお、通常の位相で $O(S, \mathbb{R})$ は4つの連結成分をもち、H_S は2つの連結成分を持っている。$O(S, \mathbb{R})$ のなかで単位元を含む連結成分を G とし、 H_S のなかで ${}^t(1, \sqrt{-1}, 0, \ldots, 0, \sqrt{-1}, 1)$ を含む連結成分を H_S^0 とする。また、 $O(S, \mathbb{R})$ の元のうち H_S^0 を H_S^0 へうつすもの全体のなす群を $\widetilde{G}$ とする。 $\widetilde{G}$ は $O(S, \mathbb{R})$ の4つの連結成分のうちの2つである。

S によって定まる IV 型領域

$$\mathcal{H}_S := \left\{ Z = \begin{pmatrix} \omega \\ z \\ \tau \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s+2} \;\middle|\; \begin{array}{c} \omega, \tau \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}^s, \\ S_1[\operatorname{Im} Z] > 0,\ \operatorname{Im} \tau > 0 \end{array} \right\}$$

は、ちょうど H_S^0 を射影化したものになっている。すなわち、 $P_{\mathbb{C}} H_S^0$ と $\mathcal{H}_S$ は、全単射

$$\mathcal{H}_S \ni Z \mapsto \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} S_1[Z] \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in P_{\mathbb{C}} H_S^0$$

で対応している。この対応により、群 $\widetilde{G}$ の領域 $\mathcal{H}_S$ への作用が定まる。具体的には、

$$M = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,s+3} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{0,s+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s+3,0} & g_{s+3,1} & \cdots & g_{s+3,s+3} \end{pmatrix} \in \widetilde{G}$$

および

$$
Z = \begin{pmatrix} \omega \\ \\ z \\ \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{s+1} \\ z_{s+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_S \qquad \left(\quad z = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_{s+1} \end{pmatrix} \quad \right)
$$

に対し、

$$
J_i(M,Z) := -\frac{1}{2} g_{i,0} S_1[Z] + \sum_{j=1}^{s+2} g_{i,j} z_j + g_{i,s+3}
$$

とおけば、 $\widetilde{G}$ の $\mathcal{H}_S$ への作用は

$$
\widetilde{G} \times \mathcal{H}_S \ni (M,Z) \mapsto M\langle Z \rangle := \left(\frac{J_i(M,Z)}{J_{s+3}(M,Z)} \right)_{i=1}^{s+2} \in \mathcal{H}_S
$$

とあらわせる。ここで、分母にあらわる $J(M,Z) := J_{s+3}(M,Z)$ は保型因子になっている。すなわち、２条件

- $\forall Z \in \mathcal{H}_S,\ J(E_{s+4}, Z) = 1$
- $\forall M, M' \in \widetilde{G},\ \forall Z \in \mathcal{H}_S,\ J(MM', Z) = J(M, M'\langle Z \rangle) J(M', Z)$

をみたす。

IV 型領域 $\mathcal{H}_S$ で定義された正則関数全体のなす集合を $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$ と書くことにする。整数 $k \in \mathbb{Z}$ に応じて定まる、群 $\widetilde{G}$ の $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}_s)$ への（右からの）作用

$$
\mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S) \times \widetilde{G} \ni (F, M) \longmapsto F|_k M \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)
$$

を

$$
(F|_k M)(Z) := J(M,Z)^{-k} F(M\langle Z \rangle)
$$

で定める。

簡単のため、ここでは S がユニモジュラーであると仮定し（このとき $8|s$ ）、離散部分群が $\Gamma := G \cap O(S, \mathbb{Z})$ のときだけを扱う。正則関数 $F \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$ が重み k の保型形式であるとは、

$$
\forall M \in \Gamma,\ F|_k M = F
$$

が成り立つことである。IV 型領域上の保型形式については、カスプ付近で有界であるという条件は、保型性から導かれる。すなわち、ケヒャーの主張が成り立つ。

定理 17. F を重み k の保型形式であるとする。このとき、 F はカスプ付近で有界である。すなわち、 F のフーリエ展開

$$F(Z) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}^s} a(n,l,m)\mathbf{e}(n\tau + {}^t lS_0 z + m\omega)$$

において、「 $2nm - S_0[l] \geq 0$ かつ $n \geq 0$ 」でなければ $a(n,l,m) = 0$ である。

なお、ケヒャーの主張よりより強く、

- 「 $2nm - S_0[l] > 0$ かつ $n > 0$ 」でなければ $a(n,l,m) = 0$

を満たすとき、 F はカスプ形式であるという。

なお、先に述べた 2 次のジーゲル保型形式は、IV 型領域上の保型形式において、特に $S_0 = (2)$ のときに相当している。この場合、 S はユニモジュラーではないが、（ $s = 1$ という特殊事情も一部で好都合に働き）ほぼ以下の議論と同様のことが成り立っている。

4.2 多変数ヤコビ形式

IV 型領域上の保型形式に対しても、2 次のジーゲル保型形式のときと同様に、対応するヤコビ形式が定義される。すなわち、重み k の保型形式 F を

$$F(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$$

とフーリエ・ヤコビ展開すると、各 φ_m は指数 m のヤコビ形式になっている。

整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対し、写像 $i_m : \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s) \to \mathrm{Hol}(\mathcal{H}_S)$ を $(i_m\varphi)(Z) := \varphi(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$ で定め、

$$\widetilde{G}^J := \{M \in \widetilde{G} \mid \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_1\varphi)|_0 M = i_1\psi\}$$

とおく。この $\widetilde{G}^J$ （あるいは $G^J := \widetilde{G}^J \cap G$ ）を $\widetilde{G}$ （あるいは G ）のヤコビ部分群という。このとき、 $M \in \widetilde{G}^J$ は、性質

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall\varphi,\ \exists\psi \text{ s.t. } (i_m\varphi)|_k M = i_m\psi$$

をみたす。この ψ を $\varphi|_{k,m}M$ と書くことにする。この対応は、整数 $k, m \in \mathbb{Z}$ を固定するごとに、群 $\widetilde{G}^J$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s)$ への（右からの）作用を定めている。

2次のジーゲル保型形式に対応するヤコビ形式について成り立つ諸性質は、IV 型領域上の保型形式に対応するヤコビ形式についても、ほぼ同様に成り立つ。まず

$$\widetilde{G}^F := \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & M_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{G} \;\middle|\; {}^tM_1 S_1 M_1 = S_1 \right\}$$

とおくと、次の命題が成り立つ。

命題 18. $\widetilde{G}$ は $\widetilde{G}^J$ と $\widetilde{G}^F$ で生成される。

次に、

$$S(s) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{G}^F$$

とおく。$S(s)$ は $\widetilde{G}^J$ にも G にも属さない。また、$S(s)$ の $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}_2)$ への作用は

$$(F|_k S(s))(\tau, z, \omega) = F(\omega, z, \tau)$$

である。

さきほど、離散部分群を $\Gamma = G \cap O(S, \mathbb{Z})$ とおいた。この Γ に対し、$\Gamma^J := \Gamma \cap G$ および $\Gamma^F := \Gamma \cap \widetilde{G}^F$ と定める。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 19. $\widetilde{\Gamma}$ を Γ^J と Γ^F で生成される群とするとき、次のことが成り立つ。

- $\widetilde{\Gamma} \cap G = \Gamma$ である。
- Γ は $\widetilde{\Gamma}$ の正規部分群で、その指数は 2 である。
- $\widetilde{\Gamma}/\Gamma$ の完全代表系は $\{E_{s+4}, S(s)\}$ である。

正則関数 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s)$ が重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとは条件

$$\forall M \in \Gamma^J,\ \varphi|_{k,m} M = \varphi$$

が成り立つことである。2次のジーゲル保型形式に対応するヤコビ形式のときと同様に、（ヤコビ形式の）保型性を持つ正則関数については、次の命題が成り立つので、実質的には $m \geq 0$ のときだけを考えればよいことが、すぐにわかる。

命題 20. 正則関数 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^s)$ は重み k 指数 m の（ヤコビ形式の）保型性を持つとする。このとき、次のことが成り立つ。

- $m < 0$ であれば、 $\varphi = 0$ である。
- $m = 0$ であれば、 φ は τ だけの関数とみなせる。（ z については定数関数である。）

特に S_0 がユニモジュラーであることから、

$$\theta_S(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}S_0[l] + {}^t l S_0 z\right)$$

は、重み $\dfrac{s}{2}$ 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ。さらに、次の定理が成り立つ。

命題 21. 重み k 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数と、重み $k-\dfrac{s}{2}$ の保型性を持つ $\mathbb{H}$ 上の関数とは、次のように 1 対 1 対応している。

$$\varphi(\tau, z) = f(\tau)\theta_S(\tau, z) \leftrightarrow f(\tau)$$

したがって、重み k 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数 φ のフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}^s} c(n, l)\mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z)$$

の係数 $c(n, l)$ は $n - \dfrac{1}{2}S_0[l]$ の値だけで決り、これを $c\left(n - \dfrac{1}{2}S_0[l]\right)$ と書けば、

$$f(\tau) := \sum_{n'} c(n')q^n$$

は、重み $k - \dfrac{s}{2}$ の保型性を持つ $\mathbb{H}$ 上の関数である。

4.3 ボーチャーズの定理

IV 型領域上の保型形式に対応する指数 1 のヤコビ形式からは、2 次のジーゲル保型形式に対応するヤコビ形式と場合とほぼ同様にして、IV 型領域上の保型形式が作れること、すなわちマースリフトが知られている。

定理 22. （マースリフト）重み k 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数 φ のフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}^s} c\left(n - \frac{1}{2}S_0[l]\right)\mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z)$$

の係数 $c(n')$ は、 $n' \leq 0$ のとき $c(n') = 0$ であるとする。このとき、

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ML}(\varphi))(Z) := \\ &\sum_{n,m\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}^s} \sum_{a|(n,l,m)} a^{k-1} c\left(\frac{1}{a^2}\left(nm - \frac{1}{2}S_0[l]\right)\right)\mathbf{e}\left(n\tau + {}^t l S_0 z + m\omega\right)\end{aligned}$$

は $\mathcal{H}_S$ 上収束し、重み k の保型形式になる。

マースリフトの形から明らかなように、IV 型領域上の保型形式についても、２次のジーゲル保型形式のときと同様に、ボーチャーズのアイデアをたどることができ、保型形式の無限積表示が得られる。重み 0 指数 1 の（ヤコビ形式の）保型性を持つ関数 φ のフーリエ展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}^s} c\left(n - \frac{1}{2}S_0[l]\right)\mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z)$$

の係数 $c(n')$ は、n' がじゅうぶん小さければ $c(n') = 0$ であり、さらに $n' < 0$ のとき $c(n') \in \mathbb{Z}$ であるとする。さらに、

$$\begin{aligned}a &:= \frac{1}{24}\sum_{l\in\mathbb{Z}^s} c\left(-\frac{1}{2}S_0[l]\right), \qquad b := \frac{1}{2}\sum_{l>0} c\left(-\frac{1}{2}S_0[l]\right) l, \\ c &:= \frac{1}{4}\sum_{l>0} c\left(-\frac{1}{2}S_0[l]\right) S_0[l]\end{aligned}$$

としたときに、 $a, c \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^s$ がみたされているとする。ただし、 $l > 0$ は、 l が $\mathbb{Z}^s$ から原点を除いた集合のちょうど半分に入っていることを意味するものとする。この「ちょうど半分」の選びかたは、次の $BP(\varphi)$ の定義に、符号の違いしか影響を与えない。このとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}(\varphi)(Z) :=& \mathbf{e}(a\tau - {}^t b S_0 z + c\omega) \\ &\times \prod_{(n,l,m)>0} \left(1 - \mathbf{e}(n\tau + {}^t l S_0 z + m\omega)\right)^{c(nm - \frac{1}{2}S_0[l])}\end{aligned}$$

は、形式的に重み $\dfrac{c(0)}{2}$ の保型性をみたす。ただし、無限積部分の $(n, l, m) > 0$ は

「$m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}^s$」または「 $m = 0,\ n \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{Z}^s$」

または「$m = n = 0,\ l > 0$」

を意味するものする。

実際、ボーチャーズは、論文 [9] において、次の定理を示した。

定理 23. （ボーチャーズ） $\mathrm{BP}(\varphi)$ は $S_1[\mathrm{Im}\, Z]$ が十分大きなところで収束し、さらに、解析接続を行うことにより $\mathrm{BP}(\varphi)$ は $\mathcal{H}_S$ 上の有理型関数とみなすことができる。すなわち、 $\mathrm{BP}(\varphi)$ は $\mathcal{H}_S$ 上の重み $\dfrac{c(0)}{2}$ の保型性をみたす有理型関数とみなせる。そして、その零点と極の場所は $c(n')$ $(n' < 0)$ に対応する項から定まる零点の軌道だけであり、位数は $c(n')$ である。

5　ボーチャーズ無限積の収束性

ボーチャーズの定理を示すにあたり、形式的な保型性はマースリフトより容易に導かれるため、無限積の収束性およびその解析接続が問題となる。現在、ボーチャーズのアイデアに基づいて構成された無限積表示について、その収束性と解析接続を示す方法は３通り知られている。その方法は、見つかった順に少しずつ易しくはなってはきているものの、それでも相当に煩雑な計算を必要としている。ここでは、それぞれの方法について、煩雑な計算は省いて、概略だけを説明する。詳細は、参考文献を見ていただきたい。

5.1　漸近展開を利用する方法

この方法は、ボーチャーズによる原論文 [9] で扱われたものである。大雑把にいって、ボーチャーズ無限積はマースリフトの指数べきであるから、弱正則なヤコビ形式からのマースリフトが、解析接続により、たかだか log 程度の多価性をもった $\mathcal{H}_S$ 上の関数とみなせることをいえばよい。そのためには、 $c(n')$ のふるまいを正確に調べる必要がある。実際、 $c(n')$ の様子はサークルメソッドを使って調べることができ、

$$c(n) \sim 2\pi \sum_{m>0} \sum_{c>0} \frac{1}{c} \sum_{0\le a<c, 0\le d<c, c|(ad-1)} c(-m)\mathbf{e}\left(\frac{an-md}{c}\right) I_{1+\frac{s}{2}}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{4}}$$

となる（ I は第１種変形ベッセル関数）。この両辺の違いは、任意の正の整数 ϵ に対してたかだか $O(\exp(\epsilon\sqrt{n}))$ のオーダーに抑えられるので、これより弱正則なヤコビ形式からのマースリフトの挙動が判明する。詳細は、ボーチャーズによる原論文 [9] を参照にされたい。

5.2　テータ積分表示を利用する方法

この方法は、ハーヴェイとムーアによるもの [22] であり、ブルニエによるレクチャーノート [12] によくまとめられている。ボーチャーズによる方法と同様、弱正則なヤコビ形式からのマースリフトが、解析接続により、たかだか log 程度の多価性をもった $\mathcal{H}_S$ 上の関数とみなせることを示すのであるが、彼らは、それを、直接計算ではなく、テータ積分を用いて示した。大雑把にいって、マースリフトはテータ積分であり（[33] など）実際、そのテータ積分は、弱正則ヤコビ形式に対応する重み $-\dfrac{s}{2}$ の保型性を持つ $\mathbb{H}$ 上の関数 f をもちいて

$$\int_{\mathcal{F}} f(\tau)\overline{\theta_S(\tau, Z)}y\frac{dx\,dy}{y^2} \qquad (\tau = x + y\sqrt{-1})$$

とあらわせるのだが（詳細省略）、この積分は、そのまま計算すれば、 Z の場所によっては発散する。そこで、この積分の積分領域を、 $\mathbb{H}$ の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に関する基本領域 $\mathcal{F}$ から虚部が u より大きい部分を削ったものに変更し、さらに発散の度合いを少しゆるくして、積分

$$\int_{\mathcal{F}_u} f(\tau)\overline{\theta_S(\tau, Z)}y^{1+s}\frac{dx\,dy}{y^2}$$

を考えれば、これは s の実部がじゅうぶん大きいところで収束する。この積分の $u \to 0$ での極限を考え、さらに、その $s = 0$ でのローラン展開の定数項を考えれば、これがちょうどもとのテータ積分の解析接続になっており、ボーチャーズの定理が証明できる。詳細は、ブルニエのレクチャーノート [12] を参照されたい。

5.3　フーリエ・ヤコビ展開についての予想

ヤコビ形式の形式的な級数

$$\sum_m \varphi_m(\tau, z)\mathbf{e}(m\omega)$$

は、そのフーリエ展開の係数が Γ^F 不変であれば収束して保型形式になるであろうという予想がある。（実は、講演者である青木が予想しているだけである。）実際、２次のジーゲル保型形式については、フルモジュラーの場合だけでなく、レベル付き（レベル $2, 3, 4$）の場合でも、この予想は正しいことが示されている。したがって、これらの場合には、ボーチャーズ無限積のフーリエヤコビ展開にあらわれる（ヤコビ形式の）保型性をみたす関数（これらは元の φ から有限回の計算で得られる）が、ケヒャーの主張を満たしていることをみれば、収束性が示される。ただし、この予想はどこまで正しいかわかっておらず、また、極や零点の情報は得られない。

6　ボーチャーズ無限積の応用

マースリフトと違い、それを指数べきしたボーチャーズ無限積は、基本的にヘッケ作用素との相性が良くないと、講演者である青木は考えている。実際、ボーチャーズ無限積でヘッケ固有関数が得られることは、あまりない（保型形式のなす空間の次元が小さいときにたまたま一致することは起き得る）もちろん、ヘッケ作用素は保型形式たちの足し算であったから、それをかわりに掛け算にしてやれば、ボーチャーズ無限積との相性は良くなると思われる。実際、「掛け算の」ヘッケ作用素を定義して、与えられた保型形式がボーチャーズ無限積表示を持つかどうかの判定法が、村瀬・ハイムによって研究されている（[23] など）。

ボーチャーズ無限積の話をするにあたり必ず触れなければいけないことは、ボーチャーズ自身によるムーンシャイン予想の解決であろう。なにしろ、ボーチャーズはこの業績によりフィールズ賞を受賞したのだから。ムーンシャイン予想の解決については、原論文 [8] のほか、さまざまな解説が書かれている。本講演では保型形式をメインに据えたためにムーンシャイン予想の解決を応用として扱ったが、時系列的には、ボーチャーズはムーンシャイン予想を解決する過程でモンスターリー環の分母公式を得ようとして、多変数の保型形式を無限積を用いて構成したようである。それをより一般化したものが、今日「ボーチャーズ無限積」と称されているのである。

先に述べたように、ボーチャーズ無限積は、ヘッケ作用素の理論とは相性が良くない。が、一方で、零点と極がはっきりと判り、しかも比較的重みの小さい保型形式が作れることが多いため、具体的な保型形式の構成を必要とする分野では重宝されている。実際、保型形式環の構造の決定（[1, 14] など）やある種のモジュライ空間の射影モデルの構成（[10, 29] など）などにおいて、ボーチャーズ無限積は、（一般論ではなく具体的な数値条件を満たす特定の）保型形式を構成する手段として有効に利用されている。

また、大学１年で物理の授業に落ちこぼれた講演者にはまったく理解できないが、ボーチャーズ無限積は、どうやら数理物理にも応用されているようである（[21, 28] など）。

7　おわりに

以上、いろいろと偉そうに書いてきましたが、僕自身、サマースクールでの講演と報告集の執筆は、ボーチャーズ無限積の理解をより深めるとてもよい機会でした。講演を依頼されてからこの原稿が完成するまでの約１年間で、あらためて（特に無限積関連における）保型形式の難しさを認識すると同時

に、研究するべきテーマがまだ多く残っている（というか、ようやく手がつけられはじめたばかりである）ことに気づき、今後の研究のモチベーションが大きくあがったように感じます。なによりもサマースクール世話人のみなさま、そして、講演の準備や報告集の執筆にご協力いただいた多くの先生方にとても感謝しています。どうもありがとうございました。

参考文献

[1] H. Aoki, T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms of small levels, differential operators and Borcherds products, *Int. J. Math.* **16**(3) (2005), 249–279.

[2] H. Aoki, Estimating the dimension of the space of Siegel modular forms of genus 2 with level 2 and 3, *Proceedings of Japan-German seminar, Explicit Structure of Modular Forms and Zeta Functions* (白馬, 2001), 101-106.

[3] H. Aoki, Practical Construction of Borcherds Product, 第 1 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (浜名湖, 2002), 97-112.

[4] H. Aoki, On vector valued Siegel modular forms of degree 2 with small levels, *Osaka J. Math*, accepted.

[5] T. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory, 2nd Ed.*, GTM 41 (Springer, 1990).

[6] 浅井 哲也, Borcherds の無限積 ー入門一歩手前ー, 第 41 回代数学シンポジウム報告集, 113–121.

[7] W. Baily Jr., *Introductory lectures on automorphic forms* (Iwanami, 1973).

[8] R. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109-2** (1992), 405–444.

[9] R. Borcherds, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products, *Invent. Math.* **120-1** (1995), 161–213.

[10] R. Borcherds, The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra, *Topology* **35-3** (1996), 699–710.

[11] R. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, *Invent. Math.* **132-3** (1998), 491–562.

[12] J. Bruinier, *Borcherds products on O(2,l) and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Mathematics **1780** (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[13] J. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext (Springer-Verlag, Berlin, 2008)

[14] T. Dern, A. Krieg, Graded rings of Hermitian modular forms of degree 2, *Manuscripta Math* **110-2** (2003), 251–272.

[15] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms* (Birkhäuser, 1985).

[16] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, GMW 254, Springer Verlag, Berlin (1983).

[17] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras. I; II, *Internat. J. Math.* **9-2** (1998), 153–199; 201–275.

[18] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras, *Amer. J. Math.* **119-1** (1997), 181–224.

[19] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac-Moody algebras (Russian), *Mat. Sb.* **187-11** (1996), 27–66; translation in *Sb. Math.* **187-11** (1996), 1601–1641.

[20] V. A. Gritsenko, Fourier-Jacobi functions in n variables (Russian), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov* **168** (1988), *Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii* **9**, 32–44, 187–188; translation in *J. Soviet Math.* **53-3** (1991), 243–252

[21] J. Harvey, G. Moore, Algebras, BPS states, and Strings, *Nuclear Phys. B* **463-2;463-3** (1996), 315–368.

[22] 原田 耕一郎, 松尾 厚, フィールズ賞受賞者紹介 R. E. Borcherds 氏の業績 I; II, 数学 **51-1** (1999/1), 56–61.

[23] B. heim, A. Murase, Borcherds lift on $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables*, Poceedings of the International Symposium in Honor of Takayuki Oda on the Occasion of His 60th Birthday (2009), 56–76.

[24] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two I; II, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 175–200; **86** (1964), 392–412.

[25] 池田 保, 無限積による保型形式の構成, 第 5 回 (1997 年) 整数論サマースクール報告集, 94–104.

[26] 河合 俊哉, 弦理論における保型関数, 数理科学 **439** (2000/1), 28–34.

[27] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, CSAM 20, Cambridge University Press (1990).

[28] D. P. Jatkar, A. Sen, *Dyon spectrum in CHL models*, arXiv:0510147 [hep-th].

[29] 金銅 誠之, Borcherds products and Algebraic Geometry, 数理解析研究所講究録 **1294** (2002), 121–128

[30] M. Kontsevich, Product formulas for modular forms on O(2,n) (after R. Borcherds), *Seminaire Bourbaki* Vol. 1996/97, Asterisque No. 245 (1997), Exp. No. 821-3, 41–56.

[31] T. Miyake, *Modular forms*, Springer Monographs in Mathematics (Springer-Verlag, Berlin, 2006).

[32] 菅野 孝史, Jacobi 形式, Oda lifting, Maass space について, 数理解析研究所講究録 **617** (1987), 114–129.

[33] T. Sugano, Jacobi forms and the theta lifting, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **44-1** (1995), 1–58.

Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開

軍司圭一

1　はじめに

本稿では Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開を扱う．Eisenstein 級数は Siegel 保型形式の具体例として最も基本的なものであり，表現論的，幾何的な分野への応用を考えたときにも極めて重要な関数である．整数論サマースクールのテーマとしては，Eisenstein 級数の Fourier 展開は Ikeda lift の構成において重要であるが，それをおいても Fourier 係数の計算は興味深い．にもかかわらず，一般の次数の Eisenstein 級数の Fourier 展開が明示的に書き下されたのはごく最近のことであり，1999 年の桂田氏の論文 [Kat] においてである．本稿では Maass のレクチャーノート [Ma] に書かれていることを中心に，Fourier 展開がどのように与えられるのかを解説したい．

2　Siegel 保型形式と Fourier 展開

Siegel 保型形式の一般論は [Kl] を参照のこと．

以下の記号を定義する．

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_n &= \{Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) \gg 0\},\\
\Gamma = \Gamma^n = Sp(n,\mathbb{Z}) &= \{\gamma \in GL(2n,\mathbb{Z}) \mid \gamma J_n {}^t\gamma = J_n\}, \quad \text{ただし } J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix},\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \,\middle|\, A\,{}^tB = B\,{}^tA,\ C\,{}^tD = D\,{}^tC,\ A\,{}^tD - B\,{}^tC = 1_n \right\},\\
\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}) &= \{N \in M_n(\mathbb{Z}) \mid N = {}^tN\}.
\end{aligned}$$

$\mathbb{H}_n$ 上の関数 f と $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して

$$f|_k\gamma(Z) = \det(CZ+D)^{-k} f((AZ+B)(CZ+D)^{-1})$$

と定める．Γ に関する重さ k の正則 Siegel 保型形式の空間を

$$M_k(\Gamma) = \left\{ f\colon \mathbb{H}_n \xrightarrow{\text{正則}} \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{array}{l} f|_k\gamma = \gamma,\ \forall\gamma \in \Gamma, \\ n = 1 \text{ のとき } f \text{ は cusp } \infty \text{ で正則} \end{array} \right\}$$

で定義する．

$f \in M_k(\Gamma)$ とすると，f は $Z \mapsto Z+N,\ N \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ の作用で不変であるから，Z の各成分の変数ごとに周期関数であり Fourier 級数に展開される．展開をきれいに記述するため，$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ のトレース形式に関する dual lattice を

$$\begin{aligned} S_n^* &= \{A \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \mid \mathrm{Tr}(AN) \in \mathbb{Z},\ \forall N \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})\} \\ &= \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \mid a_{ii} \in \mathbb{Z},\ a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\ (i \neq j)\} \end{aligned}$$

と定める．S_n^* を半整数対称行列と呼ぶ．このとき $f \in M_k(\Gamma)$ は

$$f(Z) = \sum_{A \in S_n^*} c(A) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AZ))$$

と展開されるが，さらに $A \not\geq 0$ であるときは $c(A)=0$ であることが示される (**Koecher 原理**)．よって $f \in M_k(\Gamma)$ は

$$f(Z) = \sum_{\substack{A \in S_n^* \\ A \geq 0}} c(A) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AZ))$$

なる形の Fourier 展開を持つ．すなわち Fourier 係数は半正定値な半整数対称行列をパラメーターとして持つ．

$U \in GL_n(\mathbb{Z})$ とし，$\begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$ での変換を考えることにより

$$\det(U)^k C({}^tUAU) = C(A)$$

なる関係式が成り立つことに注意.

3 Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開

3.1 Eisenstein 級数の定義

$$\Gamma_\infty^n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n \right\}$$

とおき，偶数 k に対して

$$E_k^n(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^n \backslash \Gamma^n} \det(CZ+D)^{-k}$$

と定める．k が偶数より右辺は well-defined となる．この級数は $k > n+1$ (k は整数であるから実際は $k \geq n+2$) のとき広義一様絶対収束し，$M_k(\Gamma)$ の元を定めることが示される．

注　収束を示すのはそれほど簡単ではない．[Kl] の 5 章に詳しく書いてあるが，$\Gamma \backslash \mathbb{H}_n$ の基本領域の話などの準備が色々と必要になる．

3.2 Symmetric co-prime pair

この話の目的である $E_k^n(Z) \in M_k(\Gamma)$ の Fourier 係数を計算する．そのためにはず定義の中の和をとる集合 $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ を詳しく調べる．

補題 1 (1) $C, D \in M_n(\mathbb{Z})$ に対して

$$\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma \iff \begin{cases} \text{(i)} \quad C\,{}^tD \text{ が対称行列} \\ \text{(ii)} \quad \text{ある } M, N \in M_n(\mathbb{Z}) \text{ が存在して } CM + DN = 1_n \text{ となる} \end{cases}$$

が成り立つ．(i) の条件を symmetric，(ii) の条件を co-prime と呼び，(i),(ii) を満たす組 $(C, D) \in M_n(\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ を symmetric co-prime pair と呼ぶ．$\mathcal{M}_n$ で symmetric co-prime pair 全体のなす集合を表す.

(2) 集合の全単射

$$\Gamma_\infty \backslash \Gamma \leftrightarrow GL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{M}_n, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto (C, D)$$

が存在する．ただし $GL_n(\mathbb{Z}) \ni U$ は $\mathcal{M}_n \ni (C, D)$ に (UC, UD) で作用し，$\mathcal{M}_n$ はこの作用で保たれる．

証明) (1) $\Leftarrow$ のみ示す．$CM + DN = 1_n$ となる $M, N \in M_n(\mathbb{Z})$ を取ったとき, $A = {}^tN + {}^tMNC$, $B = -{}^tM + {}^tMND$ とおくと，$A\,{}^tB - B\,{}^tA = 0$, $A\,{}^tD - B\,{}^tC = 1_n$ が計算で確かめられる．すなわち $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ である．

(2) は容易. □

次に symmetirc co-prime pair (C, D) に対して，C の階数ごとに集合を分割する．すなわち次のように定める．$0 \le r \le n$ に対して

$$\mathcal{M}_n^r = \{(C, D) \in M_n \mid \operatorname{rank} C = r\}$$

とおく．特に

$$\mathcal{M}_n^0 = \{(0, U) \mid U \in GL_n(\mathbb{Z})\} \simeq GL_n(\mathbb{Z})$$

である．$\mathcal{M}_n^r$ もまた $GL_n(\mathbb{Z})$ の作用で保たれている．このとき Eisenstein 級数は

$$E_k^n(Z) = \sum_{r=0}^{n} E_k^{n,r}(Z),$$

$$E_k^{n,r}(Z) = \sum_{(C,D) \in GL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{M}_n^r} \det(CZ + D)^{-k}$$

と分解される．$E_k^{n,0}(Z) = 1$ であり，また各 $E_k^{n,r}(Z)$ はもはや保型形式にはならないことに注意.

3.3 階数が低い場合

$r < n$ に対して $GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^r$ の代表系を書くため，次の記号を用意する．まず

$$\Lambda_{n,r} = \{Q \in M_{n,r}(\mathbb{Z}) \mid \exists S \in M_{n,n-r}(\mathbb{Z}) \text{ s.t. } (Q,S) \in GL_n(\mathbb{Z})\}$$

とおく．各 $Q \in \Lambda_{n,r}$ に対して $\widetilde{Q} = (Q,*) \in GL_n(\mathbb{Z})$ を一つ取って固定しておく．

補題 2 $GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^r$ の代表系は次で与えられる．

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t\widetilde{Q}, \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \widetilde{Q}^{-1} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} (C',D') \in GL_r(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_r^r \\ Q \in \Lambda_{n,r}/GL_r(\mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

この補題より

$$\begin{aligned} E_k^{n,r}(Z) &= \sum_Q \sum_{(C',D')} \det\left(\begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t\widetilde{Q}Z + \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \widetilde{Q}^{-1} \right)^{-k} \\ &= \sum_Q \sum_{(C',D')} \det\Biggl(\underbrace{\begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t\widetilde{Q}Z\widetilde{Q} + \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}}_{(\star)} \Biggr)^{-k} \end{aligned}$$

であるが，

$$(\star) = \begin{pmatrix} C'W + D' & * \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}, \quad W = ({}^t\widetilde{Q}Z\widetilde{Q} \text{ の左上 } (r,r)\text{-block})$$

であるから，結局

$$E_k^{n,r}(Z) = \sum_Q \sum_{(C',D') \in GL_r(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_r^r} \det(C'Z[Q] + D')^{-k}, \quad (Z[Q] = {}^tQZQ \in \mathbb{H}_r) \tag{3.1}$$

となる．よって $E_k^{n,r}$ の Fourier 展開は，次数の低い Eisenstein 級数 $E_k^r(Z)$ の Fourier 展開に帰着されることになる．

実際 $z \in \mathbb{H}_r$ として

$$E_k^r(z) = \sum_{B \in S_r^*} C'(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(Bz))$$

となっているならば

$$\begin{aligned} E_k^{n,r}(Z) &= \sum_{Q \in \Lambda_{n,r}/GL_r(\mathbb{Z})} \sum_{B \in S_r^*} C'(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(BZ[Q])) \\ &= \sum_{Q,B} C'(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(QB{}^tQZ)) \end{aligned}$$

を得る．$\operatorname{rank} QB{}^tQ < r$ であるから，これは正定値でないような $A \in S_n^*$ に対しての Fourier 係数を与えていることになる．一方で後に示す通り (命題 1)，$E_k^{n,n}(Z)$ の Fourier 係数 $C(A)$ は A が正定値でないと消えてしまうため，低い階数の Fourier 係数はこの計算で尽きていることがわかる．

3.4 正定値の場合

前節の議論から $E_k^{n,n}(Z)$ の Fourier 展開を考えればよいことが分かる．このときは C が正則行列になるので

$$\begin{aligned} E_k^{n,r}(Z) &= \sum_{(C,D)\in\mathcal{M}_n^n} \det(CZ+D)^{-k} \\ &= \sum_{(C,D)} \det C^{-k} \det(Z+C^{-1}D)^{-k} \end{aligned}$$

と書けるが，symmetric の条件より $C^{-1}D$ は対称行列である．

補題 3 次の全単射の対応がある．

$$(C,D)\in GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}), \quad (C,D)\mapsto C^{-1}D$$

証明） 逆写像は次で構成される．$T\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ に対して，単因子論より $U,V\in GL_n(\mathbb{Z})$ が存在して

$$UVT = \begin{pmatrix} \nu_1/\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_n/\delta_n \end{pmatrix}, \quad (\nu_i,\delta_i)=1,\ \delta_i|\delta_{i+1},\ \delta_i>0$$

となる．このとき T に対して

$$\left(\begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix} U^{-1},\ \begin{pmatrix} \nu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_n \end{pmatrix} V \right) \in GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n$$

が逆写像を与えている．実際 $GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \to GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_n^n$ が恒等写像であること以外は容易．これを示すには，$(C,D),(C_1,D_1)\in\mathcal{M}_n^n$ に対して $C^{-1}D=C_1^{-1}D_1$ ならば，(C,D) と (C_1,D_1) が $GL_n(\mathbb{Z})$-同値であることを言えばよい．$U=C_1C^{-1}$ とおくと $UC=C_1\in M_n(\mathbb{Z})$, $UD=D_1\in M_n(\mathbb{Z})$ であるから (C,D) が co-prime であることより $U\in M_n(\mathbb{Z})$．同様に $U^{-1}=CC_1^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})$ となるので，結局 $U\in GL_n(\mathbb{Z})$ である．$U(C,D)=(C_1,D_1)$ から主張を得る． ∎

$T\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ に対して，証明中の記号を使って $\delta(T)=\prod_i\delta_i$ とおく．$(C,D)\leftrightarrow T$ ならば $\delta(T)=|\det C|$ となっている．さらに $S\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ とすると $\delta(T+S)=\delta(T)$ である．これは $(C,D)\leftrightarrow T$ とすると

$$\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ C & CS+D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$$

だから補題 1 より $(C, CS+D) \in \mathcal{M}_n^n$ であり，$\mathcal{M}_n^n \ni (C, D+CS) \leftrightarrow T+S$ となっていることから分かる．以上のことより

$$\begin{aligned} E_k^{n,n} &= \sum_{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})} \delta(T)^{-k} \det(Z+T)^{-k} \\ &= \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})}} \delta(T)^{-k} \sum_{S \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})} \det(Z+T+S)^{-k} \end{aligned} \tag{3.2}$$

と書ける．

次に $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$ として，Fourier 展開

$$\sum_{S \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})} \det(Z+S)^{-k} = \sum_{A \in S_n^*} \xi_n(Y, A, k) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(AX)) \tag{3.3}$$

を考える． このとき Fourier 係数 $\xi_n(Y, A, k)$ は

$$\xi_n(Y, A, k) = \int_{\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R})} \det(X+iY)^{-k} \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(AX))\, dX$$

で与えられるが，(3.3) の右辺の級数が収束する範囲 $(k > n)$ ではこれは正則関数になるから，

$$\xi_n(Y, A, k) = \widetilde{\xi}_n(A, k) \exp(-2\pi \operatorname{Tr} Y)$$

とかけている．この式を $X \mapsto X + T$ と置き換えて (3.2) に代入すると

$$\begin{aligned} E_k^{(n)}(Z) &= \sum_T \delta(T) \sum_{A \in S_n^*} \widetilde{\xi}_n(A, k) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(AT)) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(AZ)) \\ &= \sum_{A \in S_n^*} \widetilde{\xi}_n(A, k) b_n(A, k) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(Z)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

但し

$$b_n(A, k) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})}} \delta(T)^{-k} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(AT))$$

を得る．(3.4) に現れる ξ_n 及び b_n を以後詳しく見ていこう．

3.5 合流型超幾何関数

$\xi_n(Y, A, k)$ は合流型の超幾何関数と呼ばれており，$n = 1$ の場合は古典的，$n = 2$ の場合は Kaufold ([Kau]) で扱われており，一般の n に対しては Siegel が明示式を求めている．さらに Shimura([Sh1]) はより一般の場合の詳しいを行っている．結論を述べよう．

$$\Gamma_m(s) = \pi^{m(m-1)/4} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(s - j/2\right)$$

とおく．

命題 1 ([Si, (111)], [Sh1, (3,15),(4.7K),(4,10)]) $A \in S_n^*$ とする．このとき

$$\widetilde{\xi}_n(A,k) = \begin{cases} \dfrac{2^{-\frac{n(n-1)}{2}}(-2\pi i)^{nk}}{\Gamma_n(k)}(\det A)^{k-\frac{n+1}{2}} & A \gg 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が成り立つ．

すなわち $\widetilde{\xi}_n(A,k)$ は A が正定置のときのみ意味を持ち，ガンマ関数の積と $\det A$ のべきとで表されている．[Sh1] ではもっと広い範囲の関数が扱われており，任意の対称行列 A と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{re}(\alpha+\beta) \gg 0)$ に対して

$$\xi_n(Y, A; \alpha, \beta) = \int_{\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R})} \det(X+iY)^{-\alpha}\det(X-iY)^{-\beta}\exp(-2\pi i\,\mathrm{Tr}(AX))\,dX$$

を考え (複素数べきは適切に定義している)，それを $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して解析接続したものが考察されている．その結論は，A の符号を $(p+, q-)$ としたとき

$$\xi_n(Y, A; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma_{n-p-q}(\alpha+\beta-\frac{n+1}{2})}{\Gamma_{n-q}(\alpha)\Gamma_{n-q}(\beta)} \times (\alpha, \beta \text{ の正則関数})$$

となるというものである．よって $k > n+1$ の仮定の下では，正定値でない A に対しては $\Gamma_{n-q}(\beta)$ の寄与のおかげで $\xi_n(Y, A, k) = \xi_n(Y, A; k, 0) = 0$ を得る．

3.6 Siegel 級数

$s \in \mathbb{C}$ とする．

$$b_n(A, s) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})}} \delta(T)^{-s}\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(AT))$$

は Siegel 級数 (あるいは singular 級数) とよばれる．各 $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ は

$$T = T_{p_1} + T_{p_2} + \cdots + T_{p_r}, \quad T_{p_i} \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}),\ \delta(T_{p_i}) = p_i^{e_i},\ (p_i \text{ は素数})$$

と分解され，この分解は $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})/\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ の中で一意である．実際 $mT \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ となる $m \in \mathbb{Z}$ を取り，$1/m = \sum_i q_i/p_i^{f_i}$ と分解して $T_{p_i} = (q_i m/p_i^{f_i})T$ とおけばよい．この分解において $\delta(T) = \prod_i \delta(T_{p_i})$ が成り立つことから，$b_n(A, s)$ は各素数ごとの積に分かれる Euler 積表示を持つ．すなわち

$$b_n(A, s) = \prod_p b_n^p(A, s)$$

と分解される．ここに

$$b_n^p(A, s) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_p)}} \delta(T)^{-s}\mathbf{e}_p(\mathrm{Tr}(AT))$$

であり，$\mathbf{e}_p$ は

$$\mathbf{e}_p\colon \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \bigcup_m \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{e^{2\pi i(\cdot)}} \mathbb{C}^\times$$

で与えられる指標である．また $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p)$ に対しての $\delta(T)$ は p べきとなるようにとるものとする．

$b_n^p(A,s)$ は数多くの数学者によって研究されてきた．$n=2$ の場合は Kaufhold ([Kau]) が明示式を与えており，n が一般の場合も Siegel, Feito, Shimura, Kitaoka などの研究を経て，その明示式は 1999 年，Katsurada ([Kat]) によりようやく完全に解決された．明示式をすべて書き下すには記号の準備も大変であり，原論文を参照していただきたい．ここでは大雑把な形といくつかの性質をあげるのに留めておく．

まず $b_n^p(A,s)$ は p^{-s} の $\mathbb{Q}$-係数有理式となることが知られている．Shimura ([Sh2]) では Langlands の結果 ([La]) を引用して証明しているが，より初等的に示すこともできると思われる．

Siegel 級数は Rieman ゼータ関数の Euler 因子と多項式の積の形で表すことができる．Euler 因子をすべて決定したのが以下に紹介する Kitaoka の結果である．記号の準備として，n を偶数，$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^n \det(2A)})/\mathbb{Q}$ の判別式を D_A とし，χ_A を 2 次拡大に付随する指標とする．すなわち χ_A は素数 p に対して

$$\chi_A(p) = \left(\frac{D_A}{p}\right)$$

で定まる指標である．$(-1)^n \det(2A) = D_A f_A^2$ で $f_A \in \mathbb{N}$ を定める．

命題 2 ([Ki, Theorem 2]) $A \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q})$ に対して，ある $F_p(A,T) \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して

$$b_n(A,s) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-p^{-s}) \displaystyle\prod_{j=1}^{n/2} (1-p^{2j-2s})(1-\chi_A(p)p^{-s+n/2})^{-1} & n\colon \text{even} \\ (1-p^{-s}) \displaystyle\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (1-p^{2j-2s}) & n\colon \text{odd} \end{array} \right\} \times F_p(A, p^{-s})$$

と表される．$F_p(A,T)$ はほとんどすべての p に対して 1 となる．

この $F_p(A,T)$ を書き下したのが Katsurada の論文 [Kat] である．後ほど n が小さい場合の実例を述べる．

以上をまとめて次の定理を得る．

定理 1 (主結果) $n > k+1$ とする．Eisenstein 級数の Fourier 展開

$$E_k^{n,r}(Z) = \sum_{A \in S_n^*, A \geq 0} C(A) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(AZ))$$

に対して次が成り立つ．

(1) $A \gg 0$ のとき

$$C(A) = \widetilde{\xi}_n(A,k) \prod_p b_n^p(A,k)$$

なる形の Euler 積表示を持つ．それぞれの具体的な形については命題 1 及び 命題 2 を参照のこと．

(2) $\operatorname{rank} A = r < n$ のとき．このときは $A = QA'{}^tQ$ となる $Q \in \Lambda_{n,r}$ 及び $S_r^* \ni A' \gg 0$ を取ることができ

$$C(A) = \widetilde{\xi}_r(A',k) \prod_p b_r^p(A',k)$$

が成り立つ．

4 いくつかの注意と例

4.1 Siegel 級数に関する注意

Siegl 級数に関して，知られていることをいくつか注意しておく．Katsurada[Kat] は明示式を計算するに当たり，同論文で以下のような関数等式を示している．簡単のため n が偶数のときのみ書いておくが，n が奇数のときにも関数等式がある．

命題 3 n を偶数とする．このとき関数等式

$$F_p(A, p^{-n-1}T^{-1}) = (p^{\frac{n+1}{2}}T)^{-f_A} F_p(A,T)$$

が成り立つ．

これは Ikeda lift を構成する上で重要な等式である．

Siegel 級数は局所密度との関係でも重要である．$S \in \mathrm{Sym}^m(\mathbb{Z})$ と $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})$ に対して，集合

$$\{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}) \mid {}^tXSX \equiv T \bmod p^l\}$$

を考える．上の集合を濃度を $A_{p^l}(S,T)$ と書いたとき，

$$\alpha_p(S,T) = \lim_{l\to\infty} p^{-l(n(n+1)/2-mn)} A_{p^l}(A,T)$$

と置き，これを局所密度と呼ぶ．右辺は極限の形をとっているが，実は l が十分大きなところでは stable になっている．

命題 4 $H_k = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき $S_n^* \ni A \gg 0$ に対して

$$b_n^p(A,k) = \alpha_p(H_k, A)$$

が成り立つ．

すなわち Siegel 級数は局所密度を用いて表示できる．一方で局所密度は大雑把にいって，$\mathbb{Z}_p$ 上での 2 次形式の表現数の個数を記述するものであるから，これらの素数 p に関する無限積は $\mathbb{Z}$ 上での 2 次形式の表現数，すなわち theta 級数と関係が深い．実際に上の命題は Eisenstein 級数が theta 級数を用いて表示できるという「Siegel-Weil 公式」の基礎になるものである．上記命題も含め，このあたりは Arakawa による解説 [Ar] がまとまっていて読みやすい．

4.2 実例

次数が小さい場合の Eisenstein 級数の Fourier 係数を具体的に書き下してみる．

- $n = 1$ の場合

  この場合はよく知られているように，Fourier 係数には約数のべき乗和が現れる．その様子を観察してみよう．

  Siegel 級数の計算はこの場合非常に初等的である．$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $b_1^p(m,s)$ を計算する．$m = p^t m'$, $(p, m') = 1$ と書いたとき

$$b_1^p(m,s) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_p \bmod \mathbb{Z}_p} \delta(r)^{-s} \mathbf{e}_p(mr)$$
$$= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} p^{-ls} \sum_{u \in (\mathbb{Z}/p^l)^\times} \exp\left(\frac{2\pi i m' u}{p^{l-t}}\right).$$

である．ここで $u = u_2 p + u_1$, $u_2 \in \mathbb{Z}/p^{l-1}$, $u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times$ と分解すると

$$b_1^p(m,s) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} p^{-ls} \sum_{u_2 \in \mathbb{Z}/p^{l-1}} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_2}{p^{l-t-1}}\right) \sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_1}{p^{l-t}}\right).$$

となる．指標の直交性から真ん中の和は $l \geq t+2$ で消えてしまうため，これは有限和であり

$$b_1^p(m,s) = 1 + \sum_{l=1}^{t+1} \left(p^{-ls+l-1} \sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_1}{p^{l-t}}\right)\right)$$

となる．最後の和は

$$\sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p)^\times} \exp 2\pi i \left(\frac{m' u_1}{p^{l-t}}\right) = \begin{cases} p-1 & l \leq t \text{ のとき}, \\ -1 & l = t+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから，結局

$$S^p(n,s) = 1 + \sum_{l=1}^{t} p^{l(1-s)-1}(p-1) - p^{(1+t)(1-s)-1}$$
$$= (1 - p^{-s}) \sum_{l=0}^{t} p^{(1-s)l}$$

である．すなわちこのときは

$$F_p(m,T)=\sum_{l=0}^{\mathrm{ord}_p m}(pT)^l$$

が成り立つ．
よって

$$b_1(m,k)=\prod_p b_1^p(m,k)=\frac{1}{\zeta(k)}\prod_p\sum_{l=0}^{\mathrm{ord}_p m}p^{-(k-1)}$$

である．k が偶数であることに注意して，

$$\xi_1(m,k)=\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}m^{k-1}$$

とあわせると，結局

$$C(m)=\frac{(2\pi i)^k\sigma_{k-1}(m)}{\zeta(k)(k-1)!},\quad \text{ただし}\ \ \sigma_l(m)=\sum_{d|m}d^l$$

を得る．これはよく知られた結果と一致する．

- $n=2$ のとき

命題 1 より

$$\widetilde{\xi}_2(A,k)=\frac{(2\pi)^k\det(A)^{k-3/2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k)\Gamma(k-1/2)}$$

であり，命題 2 から

$$b_2(A,k)=\frac{L(k-1,\chi_A)}{\zeta(k)\zeta(2k-2)}\prod_p F_2(A,p^{-k})$$

である．$F_p(A,T)$ の具体的な形を [Kau] に従って記述してみよう．$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{pmatrix}$ に対して

$$\alpha_1=\mathrm{ord}_p(\gcd(a_1,2a_2,a_3)),\quad \alpha=\mathrm{ord}_p f_A$$

と定めたとき

$$F_p(A,T)=\sum_{l=0}^{\alpha_1}(p^2T)^l\left\{\sum_{m=0}^{\alpha-l}(p^3T^2)^m-\chi_A(p)pT\sum_{m=0}^{\alpha-l-1}(p^3T^2)^m\right\}$$

が成り立つ．

参考文献

[Ar] T. Arakawa, "2 次形式入門 I(Siegel 公式と Eisenstein 級数)", 第 1 回整数論サマースクール報告集「アイゼンシュタイン級数について」

[Kat] H. Katsurada, "An explicit formula for Siegel series", Amer. J. Math. **121** (1999), 415-452.

[Kau] G. Kaufhold "Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades", Math. Ann. **137**, 1959, 454-476.

[Ki] Y. Kitaoka, "Dirichlet series in the theory of quadratic forms", Nagoya Math. J. **92** (1984), 73-84.

[Kl] H. Klingen, "Introductory lectures on Siegel modular forms", Camblridge studies in advanced math. 20, 1990

[La] R. P. Langlands "On the functional equations satisfied by Eisenstein series", Lecture notes in Math. 544, Springer, 1976.

[Ma] H. Maass "Siegel's modular forms and Dirichlet series", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971

[Sh1] G. Shimura, "Confluent hypergeometric functions on tube domains", Math. Ann. **260** (1982), no. 3, 269–302

[Sh2] G. Shimura, "On Eisenstein series", Duke Math. J., **50** (1983), 417-476.

[Si] C.L. Siegel, "Über die analytishe Theorie der quadratischen Formen I, Ann. Math. **36** (1935), 527-606

Functoriality Principle

吉田敬之（京都大学）

本稿は整数論 summer school での 90 分講演のために用意した原稿に手を入れたものである. Functoriality principle はそれだけで優に summer school のテーマになりうるもので, 短くまとめるのには無理があるが, 勘所は書けていると思う. 志村ー谷山予想の一般化についての最後の節は講演では話せなかったが, 興味ある問題なので簡単にふれておいた. また参加者には思ったより若い人が多かったので, 勉強等の参考のための文献案内を最後に付けた.

記号. 体 F 上の代数群 G と F の拡大体 K に対して, $G(K)$ は G の K 有理点の成す群を表す. より一般に G が可換環 R 上の group scheme, S が R-algebra のとき, $G(S)$ は G の S-valued points の成す群を表す. global field とは有限次代数体, または有限体上の一変数代数函数体のことである. F は global field とする. F_A, $F_A^\times$ によってそれぞれ F のアデール環, イデール群を表す. G は F 上の代数群とする. G のアデール化を G_A と書く. F_A を F-algebra とみたとき $G_A = G(F_A)$ である. G_A の 既約 automorphic representation 全体の集合を $\mathcal{A}(G_A)$ と書く. 本文では reductive algebraic group を単に reductive group と呼んだ.

§0. Motivation

E は $\mathbf{Q}$ 上定義された elliptic curve とする. 志村ー谷山予想によれば Hecke eigenform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ があって

$$L(s, E) = L(s, f) \tag{0.1}$$

となる. ここに N は E の conductor である. この予想は非常に深いものを含んでいて思考実験によって functoriality principle の原型を得ることができる. これをまず説明しよう.

(1) E は虚二次体 K で虚数乗法をもつとする. このとき Deuring によれば $K_A^\times/K^\times$ の Hecke 指標（量指標） ψ があって $L(s, E) = L(s, \psi)$ となる. ψ は $GL(1, K_A)$ 上の automorphic form とみなせるから, $\psi \mapsto f$ は $GL(1, K_A)$ 上の automorphic form から $GL(2, K_A)$ 上の automorphic form への対応を与えている. 量指標の L 函数に対応する modular form は Hecke によって構成されたが, これは endoscopic lift のもっとも簡単な例になっている.

(2) F は実二次体, E は F 上定義された elliptic curve とする. 志村ー谷山予想を naive に拡張すれば $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_F)$ についての weight が $(2, 2)$ の Hilbert modular form f があって $L(s, E) = L(s, f)$ となる. [1] 初めに $\mathbf{Q}$ 上定義された elliptic curve E_0 がありり E は E_0 を F 上定義された elliptic curve とみなすことで得られているとする. 即ち E は E_0 の F への base change $E = E_0 \otimes_{\mathbf{Q}} F$ である. このとき E_0 に対応する elliptic modular form f_0 から Hilbert modular form f への対応が得られ, 両者は $L(s, f) = L(s, f_0)L(s, f_0 \otimes \chi)$ の関係で結ばれている. ここに χ は F に対応する Dirichlet 指標である. f_0 が elliptic curve から得られていない場合でもこの関係で elliptic modular form f_0 から得られる Hilbert modular form f がある, というのが土井ー長沼 lift, あるいは base change lift である.

(3) D は総実体 F 上の quaternion algebra とする. このとき $D_A^\times$ 上の automorphic form の空間は $\mathrm{GL}(2, F_A)$ 上の automorphic form の空間に Hecke 作用素の固有値を保って含まれている. 即ち $\mathcal{A}(D_A^\times) \subset \mathcal{A}(\mathrm{GL}(2, F_A))$ である. これは Eichler-Shimizu-Jacquet-Langlands による結果であるが, functoriality の簡単な例である.

(4) (0.1) 式に戻り, f に対応する $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Q}_A)$ の automorphic representation を $\pi = \otimes_v \pi_v$ とする. $v = p$ が素数のとき, E が p で potential good reduction を持つための必要十分条件は π_p が special 表現ではないことである (Langlands-Deligne-Carayol).

志村ー谷山予想を一般化して次の問題が考えられる. F は代数体として

$$\rho_\lambda : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, E_\lambda)$$

を λ-adic representation とする. ρ_λ は motivic と仮定する. ρ_λ に対応する automorphic representation は何か. これについては最後の節でふれることにする.

§1. Reductive groups

この節では L 群を定義するのに必要な代数的閉体上の reductive group の理論を復習する.

四つ組

$$\Psi = (X, \Phi, \check{X}, \check{\Phi})$$

を考える. ここに $X \cong \mathbf{Z}^n$, $\check{X} = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Z})$ は X の dual, $\Phi \subset X$ と $\check{\Phi} \subset \check{X}$ は有限集合である. Φ から $\check{\Phi}$ への bijection があると仮定し, $\alpha \in \Phi$ をこの bijection で写したものを $\check{\alpha}$ と書く. X と $\check{X}$ の paring を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す. $\alpha \in \Phi$ に対して

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \check{\alpha} \rangle \alpha, \qquad x \in X,$$

[1] F の類数が 1 より大きい場合は $\mathrm{GL}(2, F_A)$ 上の automorphic form によって定式化すればよい. F は任意の代数体でもよい. この場合の証明はまだ得られていない.

$\check{\alpha} \in \check{\Phi}$ に対して

$$s_{\check{\alpha}}(y) = y - \langle y, \alpha \rangle \check{\alpha}, \qquad y \in \check{X}$$

とおく．この状況で次の条件 (1), (2) が成り立つとき, Ψ は root datum であるという．

$$\langle \alpha, \check{\alpha} \rangle = 2, \qquad \forall \alpha \in \Phi. \tag{1}$$

$$s_\alpha(\Phi) \subset \Phi, \qquad s_{\check{\alpha}}(\check{\Phi}) \subset \check{\Phi}, \qquad \forall \alpha \in \Phi. \tag{2}$$

Φ は（空集合でないならば）Bourbaki の意味での root system になる．

F は体とする．$\overline{F}$ により F の分離閉包を表す．F が標数 0 ならば $\overline{F}$ は F の代数的閉包である．G は F 上定義された connected reductive group とする．G を $\overline{F}$ 上定義された reductive group とみなす．このとき root datum

$$R(G, T) = (X^*(T), \Phi, X_*(T), \check{\Phi})$$

が得られる．ここに T は ($\overline{F}$ 上に定義された) G の maximal torus, $X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ は T の character group, Φ は root の集合, $X_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ は T の cocharacter group, $\check{\Phi}$ は coroot の集合である．

定理 1.1. Ψ は *root datum* で Φ は *reduced* と仮定する．$F = \overline{F}$ と仮定する．このとき F 上定義された *connected reductive group* G で $R(G, T) = \Psi$ をみたすものが存在する．G の F 上の同型類は唯一つである．

定理 1.1 は本質的に Chevalley による存在定理である．Φ が reduced とは $\alpha, n\alpha \in \Phi$, $2 \le n \in \mathbf{Z}$ とはならないことを言う．

G の $\overline{F}$ 上に定義された Borel 部分群 B を $B \supset T$ ととる．このとき root は positive root と negative root に分かれ, simple root が決まる．Δ を simple root の集合, $\check{\Delta}$ を simple coroot の集合とする．

$$R_0(G, B, T) = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \check{\Delta})$$

とおき, これを based root datum という．$R_0(G)$ とも書く．

例 1.2.

$$G = \mathrm{GL}(n), \qquad T = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix} \right\}$$

とする．$\epsilon_i : t \mapsto t_i$ は T の character を定義し

$$X^*(T) = \mathbf{Z}\epsilon_1 \oplus \mathbf{Z}\epsilon_2 \cdots \oplus \mathbf{Z}\epsilon_n$$

である． $\check{\epsilon}_i : u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & u & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ ((i,i) 成分に u をおく) は T の cocharacter を定義し

$$X_*(T) = \mathbf{Z}\check{\epsilon}_1 \oplus \mathbf{Z}\check{\epsilon}_2 \cdots \oplus \mathbf{Z}\check{\epsilon}_n$$

である. $u \in \mathbf{G}_m$ に対し

$$\epsilon_i(\check{\epsilon}_j(u)) = \begin{cases} u, & i = j, \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

から, $\langle \epsilon_i, \check{\epsilon}_j \rangle = \delta_{ij}$ となる.

$$\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\},$$

$$\check{\Phi} = \{\check{\epsilon}_i - \check{\epsilon}_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

である. B を上半三角行列からなる群ととったとき positive roots の集合 Φ^+ は

$$\Phi^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

である. よって

$$\Delta = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\}$$

となる. 同様に

$$\check{\Delta} = \{\check{\epsilon}_1 - \check{\epsilon}_2, \check{\epsilon}_2 - \check{\epsilon}_3, \ldots, \check{\epsilon}_{n-1} - \check{\epsilon}_n\}$$

である.

G の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(G)$ について

$$\mathrm{Out}(G) \cong \mathrm{Aut}(R_0(G)) \cong \mathrm{Aut}(G, B, T, \{u_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}) \tag{1.1}$$

が成り立つ. ここに $u_\alpha \neq 1$ は α に対応する root 部分群から任意に取った自明でない元で, $\mathrm{Aut}(G, B, T, \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ は B, T, $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ を stabilize する $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群を表す. (1.1) から次の定理が得られる.

定理 1.3. 完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1$$

は分裂する.

§2. L-groups

F は体とする. G は F 上定義された connected reductive group とする. G を $\overline{F}$ 上定義された reductive group とみなし, $\overline{F}$ 上定義された G の maximal torus T と T を含む Borel 部分群 B をとる. このとき based root datum $R_0(G) = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \check{\Delta})$ が定まるが準同型

$$\mu_G : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(R_0(G)) \tag{2.1}$$

が得られる. (2.1) を簡単に説明しておこう. $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ をとる. $\sigma(B)$ は G の Borel 部分群であるから, $g \in G(\overline{F})$ があって $\sigma(B) = gBg^{-1}$ となる. $\sigma(T)$ は $\sigma(B)$ に含まれる maximal torus であるから, $\sigma(T) = gTg^{-1}$ でもある. $\chi \in X^*(T)$ に対し $\sigma\chi \in X^*(\sigma(T))$ を

$$(\sigma\chi)(\sigma(t)) = \sigma(\chi(t)), \qquad t \in T$$

で定める.

$$\chi_\sigma(t) = (\sigma\chi)(g^{-1}tg), \qquad t \in T$$

とおくと, $\chi_\sigma \in X^*(T)$ である. 対応 $\chi \mapsto \chi_\sigma$ は $X^*(T)$ の自己同型であり, positive roots を positive roots に写している. $X^*(T)$ への作用についても同様である.

定理 1.1 により, $\mathbf{C}$ 上の connected reductive group ${}^LG^0$ を

$$R_0({}^LG^0) = (X_*(G), \check{\Delta}, X^*(T), \Delta) \tag{2.2}$$

と取ることができる. ${}^LG^0$ を connected L-group という. ${}^LG^0$ は G の $\overline{F}$ 上の同型類にのみ依存する.

例 2.1. 例 1.2 により $G = \mathrm{GL}(n)$ のとき ${}^LG^0 = \mathrm{GL}(n)$ である.

例 2.2. G は semisimple とする. G が simply connected ならば ${}^LG^0$ は adjoint type である. G が古典型のとき, $G \mapsto {}^LG^0$ で type A_n, D_n は type A_n, D_n に写り, type B_n, C_n は入れ代わる. 例えば $G = SL(n)$ のとき (type A_{n-1}, simply connected), ${}^LG^0 = PSL(n, \mathbf{C}) \cong PGL(n, \mathbf{C})$ (type A_{n-1}, adjoint type) である.

(1.1) から

$$\mathrm{Aut}(R_0({}^LG^0)) \cong \mathrm{Aut}(R_0(G)) \cong \mathrm{Out}({}^LG^0)$$

である. (最初の同型は定義から明らか.) (2.1) により, 準同型

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Out}({}^LG^0)$$

を得る. さらに定理 1.3 により準同型

$$\mu_G^L : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Aut}({}^LG^0)$$

が得られる. (μ_G^L は ${}^LG^0$ による内部自己同型を除いて決まっている.) μ_G^L を用いて半直積

$$(2.3)\qquad {}^LG = {}^LG^0 \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$$

を作る. これを G の L-group という.

L-group の Weil form と呼ばれる variation を定義しよう. このために Weil 群について説明する. 一般に F が体, $K \subset \overline{F}$ は F の有限次 Galois 拡大体とする. K_{ab} は $\overline{F}$ に含まれる K の最大 Abel 拡大体を表す. このとき完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1$$

があり, この完全列は cohomology class $\eta_{K/F} \in H^2(\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K))$ を定める.

F は non-archimedian local field, $[K:F]=n$ とする. このとき

$$H^2(\mathrm{Gal}(K/F), K^\times) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

であって, $H^2(\mathrm{Gal}(K/F), K^\times)$ は fundamental class と呼ばれる canonical generator $\xi_{K/F}$ を持つことが知られている. 局所類体論により dense injection $K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K)$ があり, $\xi_{K/F}$ をこの写像で写したものが $\eta_{K/F}$ である. $\xi_{K/F}$ を用いて群拡大

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow W_{F,K} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1$$

を作る. $W_{F,K}$ を relative Weil 群という. F_{ur} により $\overline{F}$ に含まれる F の最大不分岐拡大体を表す. $F_{\mathrm{ur}} \subset K_{\mathrm{ab}}$ である. $W_{F,K}$ は $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/F)$ の元で $\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{ur}}/F)$ に制限したとき Frobenius 写像のベキになっているものが成す群と一致する. $L \supset K$ が F の有限次 Galois 拡大体であるとき, 自然な準同型 $W_{F,L} \longrightarrow W_{F,K}$ がある. この写像について projective limit をとり絶対 Weil 群 W_F を定義する.

$$W_F = \varprojlim W_{F,K}.$$

W_F は $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の元で $\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{ur}}/F)$ に制限したとき Frobenius 写像のベキになっているものが成す群と一致する

次に Weil-Deligne group scheme W'_F を定義しよう. q を F の剰余体の元の数, p を剰余体の標数とする. $g \in W_F$ が F_{ur} に制限して Frobenius 写像の n 乗であるとき, $\|g\| = q^{-n}$ とおく. R は p が可逆であるような可換環とする. $W'_F(R)$ は $R \times W_F$ に

$$(x_1, g_1)(x_2, g_2) = (x_1 + \|g_1\| x_2, g_1 g_2)$$

で演算を定義した群とする. W'_F は functor $R \mapsto W'_F(R)$ を represent する $\mathbf{Z}[1/p]$ 上の group scheme として定義される. (W_F, $W'_F(R)$ は inertia group

I を含むので, I の単位元の基本近傍系を W_F, $W'_F(R)$ の単位元の基本近傍系とすることで位相群の構造を与えておく.)

F は archimedean local field とする. $F = \mathbf{C}$ のとき $W_F = \mathbf{C}^\times$ と定義する. $F = \mathbf{R}$ のとき $W_\mathbf{R}$ は自明でない群拡大

$$1 \longrightarrow \mathbf{C}^\times \longrightarrow W_\mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \longrightarrow 1$$

として定義する. $W_\mathbf{R}$ は Hamilton quaternion algebra $\mathbf{H}$ を用いて $W_\mathbf{R} = \langle \mathbf{C}^\times, j \rangle$ と書くことができる.

F は global field とする. $C_F = F_A^\times / F^\times$ により F のイデール類群を表す. $[K : F] = n$ のとき

$$H^2(\mathrm{Gal}(K/F), C_K) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

であって, $H^2(\mathrm{Gal}(K/F), C_K)$ は fundamental class と呼ばれる canonical generator $\xi_{K/F}$ を持つことが知られている. 函数体の場合は局所体の場合と同様なので, F は代数体とする. 大域類体論により全射 (Artin map) $C_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/K)$ があり, kernel は C_K の単位元の連結成分 D_K である. $\xi_{K/F}$ をこの写像で写したものが $\eta_{K/F}$ である. $\xi_{K/F}$ を用いて群拡大

$$1 \longrightarrow C_K \longrightarrow W_{F,K} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1$$

を作る. $W_{F,K}$ を relative Weil 群という. $L \supset K$ が F の有限次 Galois 拡大体であるとき, 自然な準同型 $W_{F,L} \longrightarrow W_{F,K}$ がある. この写像について projective limit をとり絶対 Weil 群 W_F を定義する.

$$W_F = \varprojlim W_{F,K}.$$

自然な写像 $W_F \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ があるから, ν_G^L を用いて半直積

$$^LG = {}^LG^0 \rtimes W_F$$

を作ることができる. これを L-group の Weil form という. W_F を $W_{F,K}$ 或いは $\mathrm{Gal}(K/F)$ で置き換えた構成もできる. 適宜使い分ければよい.

以下 (2.3) を L-group として使う. Weil form を用いた場合も同様で本質的に同じ結果になる. L-group には直積位相を入れておく.

$$\pi_G : {}^LG \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$$

を canonical homomorphism とする.

定義 2.3. $P \subset {}^LG$ が parabolic subgroup $\Longleftrightarrow$ P は closed subgroup, $\pi_G(P) = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ かつ $P \cap {}^LG^0$ は ${}^LG^0$ の parabolic subgroup.

Δ の部分集合全体の成す集合（ベキ集合）を $\mathfrak{P}(\Delta)$ と書く. $\mathfrak{P}(\Delta)$ と G の parabolic subgroup で $\overline{F}$ 上定義されるものの $\overline{F}$ 上の共役類は一対一に対

応する．よって G の parabolic subgroup で F 上定義されているものの $\overline{F}$ 上の共役類は $\mathfrak{P}(\Delta)$ の部分集合 $\mathfrak{P}_0(\Delta)$ と一対一に対応する．Δ と $\check{\Delta}$ の間には bijection があるから, $\mathfrak{P}(\Delta)$ と $\mathfrak{P}(\check{\Delta})$ の間に bijection がある．この bijection で $\mathfrak{P}_0(\Delta)$ に対応するものを $\mathfrak{P}_0(\check{\Delta})$ と書く．

定義 2.4. ${}^LG$ の parabolic subgroup P が relevant $\Longleftrightarrow$ $P \cap {}^LG^0$ （の $\mathbf{C}$ 上の共役類）は $\mathfrak{P}_0(\check{\Delta})$ の元に対応する．

G が F 上 quasi-split, 即ち G は F 上に定義される Borel subgroup をもつとする．このとき全ての parabolic subgroup は relevant になる．

定義 2.5. G, H は connected reductive group とする．準同型 $\varphi : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ が L-homomorphism $\Longleftrightarrow$ $\pi_H = \pi_G \circ \varphi$ かつ $\varphi|{}^LH^0 : {}^LH^0 \longrightarrow {}^LG^0$ は複素 Lie 群としての morphism である．

§3. Functoriality Principle

1°. F は local field とする．F が non-archimedean のとき, $W'_F = W'_F(\mathbf{C})$, F が archimedean のとき $W'_F = W_F$ とおく．G は F 上に定義された connected reductive group とする．

定義 3.1. 準同型 $\phi : W'_F \longrightarrow {}^LG$ は次の三条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき, Langlands parameter であるという．

(i) 図式

$$\begin{array}{ccc} W'_F & \xrightarrow{\phi} & {}^LG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) & = & \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \end{array}$$

は可換である．

(ii) ϕ は連続であり, $\phi(\mathbf{G}_a)$ は ${}^LG^0$ の unipotent 元である．ϕ は semisimple element を semisimple element [2] に写す．

(iii) ϕ の像が ${}^LG$ の parabolic subgroup P に含まれるならば, P は relevant である．

${}^LG^0$ による内部自己同型で移りあうとき Langlands parameter は同値であるという．$\Phi(G) = \Phi(G/F)$ により, Langlands parameter の同値類の集合を表す．$\Pi(G(F))$ により $G(F)$ の既約 admissible 表現の同値類全体の集合を表す．

Local Langlands Conjecture. 各 $\phi \in \Phi(G)$ に対し有限集合 $\Pi_\phi = \Pi_\phi(G(F)) \subset \Pi(G(F))$ が定まって

$$\Pi(G(F)) = \sqcup_{\phi \in \Phi(G)} \Pi_\phi$$

[2] ${}^LG$ の元は第一成分である ${}^LG^0$ の元が semisimple のとき, semisimple という．F が archimedean のとき, W'_F の元は全て semisimple と定義する．F は non-archimedean とする．$W'_F = \mathbf{C} \rtimes W_F \ni (x, g)$ は $\|g\| \neq 1$ または, $\|g\| = 1$, $x = 0$ のとき, semisimple という．

が成り立つ．

Π_ϕ を L-packet という．Π_ϕ はいくつかの条件をみたすと予想されている．例えば条件として

Π_ϕ が discrete series の表現を含む $\Longleftrightarrow$ Π_ϕ は discrete series の表現からなる $\Longleftrightarrow$ $\phi(W_F')$ はいかなる proper Levi subgroup にも含まれない

がある．$G = \mathrm{GL}(n)$ のとき Local Langlands conjecture は Harris-Taylor-Henniart により証明された．このとき各 Π_ϕ は唯一つの元からなる．一般には Π_ϕ はかなり複雑な内部構造をもつ．これについては Arthur [A3] を参照されたい．

$$r : {}^LG \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$$

は L-group の表現とする．$r|{}^LG^0$ は複素解析的であるとする．このとき $\pi \in \Pi_\phi$ の L 函数と ϵ-factor を

$$L(s, \pi, r) = L(s, r \circ \phi),$$

$$\epsilon(s, \pi, r, \psi) = \epsilon(s, r \circ \phi, \psi)$$

によって定義する．ここに ψ は加法群 F の自明でない指標であり，右辺は W_F' の表現 $r \circ \phi$ の L 函数と ϵ-factor である．

G, H は F 上に定義された reductive group とする．L-homomorphism

$$\varphi : {}^LH \longrightarrow {}^LG$$

が与えられたとする．$\phi \in \Phi(H)$ を Langlands parameter（の同値類）とする．$\varphi \circ \phi : W_F' \longrightarrow {}^LG$ は Langlands parameter の定義 3.1 の条件 (i), (ii) をみたすが，G が quasi-split ならば条件 (iii) も成り立つ．よって G が quasi-split のとき，L-homomorphism は functoriality map

$$\Pi_\phi(H) \longrightarrow \Pi_{\varphi\circ\phi}(G) \tag{3.1}$$

を誘導する．$G = \mathrm{GL}(n)$ のとき $\Pi_{\varphi\circ\phi}(G)$ は唯一つの表現からなるが，$\Pi_\phi(H)$ は一般に複数個の表現を含むから，(3.1) は多対一対応である．

2°．F は global field, G は F 上に定義された connected reductive group とする．v は F の place とする．$\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ [3] により，自然な inclusion ${}^LG_v = {}^L(G/F_v) \subset {}^LG$ が得られる．π を $G(F_A)$ の既約 automorphic representation とする．このとき

$$\pi = \otimes_v \pi_v, \qquad \pi_v \in \Pi(G(F_v))$$

[3] この inclusion は v の上にある $\overline{F}$ の素因子の取り方に依存する．

と既約な局所表現 π_v のテンソル積に分解できる．$r : {}^LG \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ を L-group の表現とする．F の各 place v に対し制限にとり r は ${}^L(G/F_v)$ の表現 r_v を与えるから, L 函数と ϵ-factor を

$$L(s, \pi, r) = \prod_v L(s, \pi_v, r_v),$$

$$\epsilon(s, \pi, r) = \prod_v \epsilon(s, \pi_v, r_v, \psi_v)$$

によって定義する．ここに ψ は F_A の自明でない指標で F に制限すると自明になるものである．$L(s, \pi, r)$ を定義する無限積は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき収束することが示される．$L(s, \pi, r)$ の全 s 平面への有理型解析接続と函数等式

$$L(s, \pi, r) = \epsilon(s, \pi, r)L(1 - s, \widetilde{\pi}, \widetilde{r})$$

が予想される．(ここに$\widetilde{\ }$は contragredient をとることを表す.)

今 H は F 上に定義された connected reductive group で L-homomorphism $\varphi : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ が与えられたとする．F の各 place v について L-homomorphism $\varphi_v : {}^L(H/F_v) \longrightarrow {}^L(G/F_v)$ が得られる．$\rho = \otimes_v \rho_v$ を $H(F_A)$ の既約 automorphic representation とする．Local Langlands conjecture を仮定する．Langlands parameter $\phi_v \in \Phi(H/F_v)$ があって $\rho_v \in \Pi_{\phi_v}$ となる．G は F 上 quasi-split とする．

Problem on Functoriality. $G(F_A)$ の既約 automorphic representation $\pi = \otimes_v \pi_v$ で $\pi_v \in \Pi_{\varphi_v \circ \phi_v}, \forall v$ をみたすものが存在するであろうか.

これが成り立てば, functoriality correspondence

$$\mathcal{A}(H_A) \ni \rho \mapsto \pi \in \mathcal{A}(G_A)$$

で local な対応 $\rho_v \mapsto \pi_v$ が (3.1) と consistent になっているものが得られたことになる．π を ρ の functorial image という．(一般には local L-packet は複数個の元を含むので, π は一意的には決まらないことに注意.) この問題に対する答え (conjectual answer) は π の保型形式の空間における重複度 $m(\pi)$ を与える公式（予想）によって得られる．これについて簡単にふれておこう．(用語と記号の説明は省く.) π に対応する global Langlands parameter を ϕ とする．ϕ は tempered parameter と仮定する．Labesse-Langlands-Kottowitz によれば

$$m(\pi) = |\mathcal{S}_\phi|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{S}_\phi} \epsilon_\phi(x) \langle x, \pi \rangle,$$

$$\langle x, \pi \rangle = \prod_v \langle x, \pi_v \rangle_v$$

の形である．この仮定下で local L-packet は generic な表現を含むと考えられるので π を generic とする．$\langle x,\pi\rangle = 1$ ゆえ $\sum_{x\in\mathcal{S}_\phi}\epsilon_\phi(x)\neq 0$ ならば問題の答えは肯定的である．とくに $G=\mathrm{GL}(n)$ ならば $|\mathcal{S}_\phi|=1$ ゆえ問題の答えは肯定的である．

3°. Examples.

(1) D は F 上の quaternion algebra とする．D の乗法群 $D^\times$ が定義する F 上の代数群を H とする．即ち H は任意の F-algebra A に対して $H(A)=(D\otimes_F A)^\times$ を充たす代数群である．このとき

$$^LH = \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})\times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$$

である． $G=\mathrm{GL}(2)/F$ ととる． $^LH = {}^LG$ であるから恒等写像を L-homomorphism としてとると correspondence

$$\mathcal{A}(H_A)\ni \otimes_v\pi'_v \longrightarrow \otimes_v\pi_v\in\mathcal{A}(G_A)$$

が得られる．D が v で split していると，$D(F_v)=\mathrm{GL}(2,F_v)$ ゆえ $\pi'_v=\pi_v$ で対応する．これは Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence である．$\pi=\otimes_v\pi_v$ がこの対応の image にはいる条件は (π が無限次元のとき), D_v が division algebra になる v について π_v は principal series の表現ではないというものである．

(2) $[F:\mathbf{Q}]=2$, $H=\mathrm{GL}(2)/\mathbf{Q}$, $G=\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(\mathrm{GL}(2))$ とする．L-group の finite form を用いると[4]

$$^LG = \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})^2\rtimes \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}),$$

$$^LH = \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})\times \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$$

である．σ を $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$ の生成元とする．L-homomorphism $^LH\longrightarrow {}^LG$ を

$$^LH\ni (g,\sigma^i)\longrightarrow (g,g,\sigma^i)\in {}^LG$$

で定義する．^LG の表現 $r: {}^LG\longrightarrow \mathrm{GL}(4,\mathbf{C})$ を

$$r((g_1,g_2),\sigma^i)=\begin{pmatrix} g_1 & 0\\ 0 & g_2\end{pmatrix}w^i,\qquad w=\begin{pmatrix}0 & 1_2\\ 1_2 & 0\end{pmatrix}$$

で定義する．$\rho\in\mathcal{A}(H_A)$ の functorial image π は $\mathcal{A}(G_A)$ にあり

$$L(s,\pi,r)=L(s,\rho)L(s,\rho\otimes\chi)$$

[4]一般に Restriction of scalars での L-group の変化は induced group の概念を用いて記述される．[B] 参照.

が確かめられる．ここに χ は拡大 $F/\mathbf{Q}$ に対応する $F_A^\times$ の指標である．$G_A = G(\mathbf{Q}_A) = \mathrm{GL}(2, F_A)$ ゆえ π に対応する $\mathrm{GL}(2, F_A)$ の表現を $\tilde{\rho}$ と書くと $L(s, \pi, r) = L(s, \tilde{\rho})$ であり

$$L(s, \tilde{\rho}) = L(s, \rho)L(s, \rho \otimes \chi)$$

となる．$\rho \mapsto \tilde{\rho}$ は土井ー長沼 lifting である．この対応の像は $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$ で不変な表現として特徴づけられる．

(3) $H = \mathrm{GL}(2)/F$, $G = \mathrm{GL}(n+1)/F$ とする．L-homomorphism ${}^LH \longrightarrow {}^LG$ を

$${}^LH \ni (g, \sigma) \longrightarrow (\rho_n(g), \sigma) \in {}^LG$$

によって定義する．ここに ρ_n は n 次の対称テンソル表現である．functorial image の存在は $n = 2$ のとき Gelbart-Jacquet, $n = 3$ のとき Shahidi-H.Kim, $n = 4$ のとき H. Kim によって証明された．この場合の functoriality が全ての n に対して証明されればRamanujan 予想, Selberg 予想, Sato-Tate 予想などが解けることが知られていて，この問題は重要である．$n \geq 3$ のときは endoscopic lift ではない．将来の理論の試金石となる場合であろう．

(4) $G = \mathrm{GSp}(n)$ とする．

$${}^LG^0 = (\mathrm{GL}(1, \mathbf{C}) \times \mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C}))/A, \qquad A = \{1, a\}$$

である．ここに $a = (a_1, a_2)$, $a_1 = -1 \in \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$, a_2 は $\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C})$ の center の位数 2 の元である．π は G_A の既約 automorphic representation とする．$\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C})$ の $(2n+1)$ 次元表現 (standard representation) st を用いて L 函数をつくる．(st は被覆写像 $\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}(2n+1, \mathbf{C})$ から得られる.) $L(s, \pi, \mathrm{st})$ を π の standard L 函数という．$\mathrm{Spin}(2n+1, \mathbf{C})$ は spinor 表現 spin をもつ．これは 2^n 次元の表現である．$L(s, \pi, \chi \otimes \mathrm{spin})$ を π の spin L 函数という．ここに χ は $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ の位数 2 の指標で $\chi(-1) = -1$ をみたす．$n \geq 4$ のとき $L(s, \pi, \chi \otimes \mathrm{spin})$ の解析接続は知られていない．

§4. 志村ー谷山予想の一般化

E と F は有限次代数体とする．M は F 上の motive, 係数の体は E とする．E の finite place λ に対して λ-adic representation

$$\rho_\lambda : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, E_\lambda)$$

がある．ここで考えたい問題は ρ_λ に対応する automorphic representation を記述することである．以下 [Y] に述べた考え方をなるべく簡単に説明する．

M の Betti realization $H_B(M)$ は E 上の d 次元ベクトル空間である．d を M の rank という．$H_B(M) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ は Hodge 分解をもつ．これから M の weight が定義されるが, M は pure weight と仮定する．これを w とおく．Hodge 分解により, Hodge 群 $\mathrm{Hg}(M)$ が定義される．$\mathrm{Hg}(M)$ は E 上の connected group である．M は polarizable と仮定する．このとき $\mathrm{Hg}(M)$ は reductive となる．H を $\mathrm{Im}(\rho_\lambda)$ の Zariski closure とする．

予想 4.1. *H は E 上に定義された代数群で λ によらない. H^0 を H の単位元の連結成分とすると, $H^0 = \mathrm{Hg}(M)$ である.*

これは $E = \mathbf{Q}$ のときには良く知られた予想である. 一般の場合は $E = \mathbf{Q}$ のときと, compatible になっている. 以下これを仮定する. F の有限次 Galois 拡大体 K を

$$H^0 \cap \rho_\lambda(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)) = \rho_\lambda(\mathrm{Gal}(\overline{F}/K))$$

ととる. 埋め込み $E_\lambda \subset \mathbf{C}$ を決めておくと, これから完全列

$$1 \longrightarrow H^0(\mathbf{C}) \longrightarrow H(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1 \tag{4.1}$$

が得られる. (4.1) から H^0 の外部自己同型群への準同型

$$\varphi : \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow \mathrm{Out}(H^0) \cong \mathrm{Aut}(R_0(H^0))$$

が得られる.

命題 4.2. *F 上の connected reductive group G を次の条件をみたすように取ることができる. (i) G は F 上 quasi-split. (ii) ${}^LG^0 = H^0(\mathbf{C})$. (iii) $\mu_G = \varphi$.*

M に対応する automorphic representation は G_A 上に存在するのではないかと考えられる.[5] $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し, $\widetilde{\sigma} \in H(\mathbf{C})$ を $\widetilde{\sigma}$ を (4.1) の準同型で写したものが σ になるようにとる.

$$\begin{cases} f(\sigma,\tau)\widetilde{\sigma\tau} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}, \\ a(\sigma)n = \widetilde{\sigma}n\widetilde{\sigma}^{-1}, \qquad n \in H^0(\mathbf{C}) \end{cases}$$

とおく. $a(\sigma) \in \mathrm{Aut}(H^0(\mathbf{C}))$ である. このとき $\{a(\sigma), f(\sigma,\tau)\}$ は因子団で条件

$$\begin{cases} i(f(\sigma,\tau))a(\sigma\tau) = a(\sigma)a(\tau), \\ f(\sigma,\tau)f(\sigma\tau,\rho) = (a(\sigma)f(\tau,\rho))f(\sigma,\tau\rho) \end{cases} \tag{4.2}$$

をみたす. ここに $i(f(\sigma,\tau))$ は $f(\sigma,\tau)$ による内部自己同型を表す. 定理 1.3 により完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Out}(H^0) \longrightarrow 1$$

は split するから, $\pi : \mathrm{Aut}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Out}(H^0)$ を canonical homomorphism とすると, 準同型 $s : \mathrm{Out}(H^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^0)$ があって $\pi \circ s = \mathrm{id}$ となる. このとき $\alpha_\sigma \in H^0(\mathbf{C})$ があって

$$s(\pi(a(\sigma))) = i(\alpha_\sigma)a(\sigma) \tag{4.3}$$

[5] $G = \mathrm{GL}(d)/E$ 上に存在するというのは良く知られた予想である. ここでは群を minimal にとることを考える. minimal と $\mathrm{GL}(d)$ の中間の場合も以下と同様に扱える.

となる．$\widetilde{\sigma}$ を $\alpha_\sigma \widetilde{\sigma}$ でとりかえると，因子団 $\{a(\sigma), f(\sigma,\tau)\}$ は同値な因子団 $\{a_Z(\sigma), f_Z(\sigma,\tau)\}$ に変わる．ここに

$$\begin{cases} a_Z(\sigma) = i(\alpha_\sigma)a(\sigma), \\ f_Z(\sigma,\tau) = \alpha_\sigma(a(\sigma)\alpha_\tau)f(\sigma,\tau)\alpha_{\sigma\tau}^{-1} \end{cases}$$

である．(4.3) から $\sigma \mapsto a_Z(\sigma)$ は準同型である．ここで因子団の条件 (4.2) の最初のものを見ると $i(f_Z(\sigma,\tau)) = 1$ がわかる．これは $f_Z(\sigma,\tau)$ は $H^0(\mathbf{C})$ の中心 $Z(H^0(\mathbf{C}))$ に入っていることを意味する．即ち 2-cocycle
$f_Z \in Z^2(\mathrm{Gal}(K/F), Z(H^0(\mathbf{C})))$ が得られた．

定理 4.3. *f_Z の cohomology 類 ($\in H^2(\mathrm{Gal}(K/F), Z(H^0(\mathbf{C})))$) は M にのみ依存する．*

ρ_λ から得られる f_Z の cohomology 類は，補助的な役割をはたす $\widetilde{\sigma}$, α_σ, s の取り方に依らないことが確かめられる．予想 4.1 から λ にも依らないことがわかる．ρ_λ の $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ への制限が abelian の場合には，fundamental class [6] とも関係し，この cohomology 類は基本的であると考えられる．

v は F の finite place とする．ρ_λ を制限することにより λ-adic representation

$$\rho_{\lambda,v} : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \longrightarrow H(E_\lambda) \subset GL(d, E_\lambda)$$

を得る．これから連続準同型

$$\psi_v : W'_{F_v} \longrightarrow H(E_\lambda) \subset H(\mathbf{C})$$

が得られる．f_Z は分解体 L を持つと仮定する．即ち L は K を含む F の有限次 Galois 拡大体で，f_Z を $\mathrm{Gal}(L/F)$ に inflate した 2-cocycle は split すると仮定する．このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & {}^LG^0 & \longrightarrow & {}^LG & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & H^0(\mathbf{C}) & \longrightarrow & H(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

がある．ψ_v を Langlands parameter $\phi_v : W'_{F_v} \longrightarrow {}^LG$ に持ち上げることができる．v が infinite place のときは，$H_B(M)$ の Hodge 分解から Langlands parameter ϕ_v を得る．志村ー谷山予想の一般化は次のように定式化される．

予想 4.4. *既約 automorphic representation $\pi = \otimes_v \pi_v \in \mathcal{A}(G_A)$ があって $\pi_v \in \Pi_{\phi_v}, \forall v$ をみたす．*

f_Z の splitting field が存在するかどうか．これについては [Y] に書いた筆者の研究を参照されたい．

最後に次の（おそらく重要な）問題を述べておく．

[6] Weil 群の項を参照．

問題 4.5. *Langlands functoriality 以外に (automorphic representation に関係する) "functorial な現象" は存在するか.*

筆者は答えは肯定的であろうと考えている.

References

[A1] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: Conjectures, Astérisque, 171-172 (1989), 13–71.

[A2] J. Arthur, A note on the automorphic Langlands group, Canad. Math. Bull. 45 (2002), 466–482.

[A3] J. Arthur, A note on L-packets, Pure and applied Mathematics Quarterly 2 (2006), 199–217.

[B] A. Borel, Automorphic L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. 33 (1979), part 2, 27–61.

[V] D. Vogan, The local Langlands conjecture, Contemp. Math. 145 (1993), 305–379.

[Y] H. Yoshida, Motivic Galois groups and L-groups, Clay Mathematics Proceedings, 13 (2011), 603–647.

文献案内

以上は Summer School のときの resume につけた文献表で本稿の内容と直接関係するものである．それ以外の教育的な文献（いずれも簡単ではないが）を各節ごとに挙げていく．なお Corvallis conference の記録 Proc. Sympos. Pure Math. 33 (1979) は有益である.

第零節．志村ー谷山予想については志村五郎氏の自伝 "The map of my life", Springer, 2008, "記憶の切繪図", 筑摩書房, 2008 に創始者による詳しい記述がある．志村全集 [64e] についてのコメントも参照．また
S. Lang, Some history of the Shimura-Taniyama conjecture, Notices of AMS. 42 (1995), 1301–1307
も予想について論じようというとき, 必読であろう.

第一節．代数群については, Borel, Humphreys の有名な教科書がある. Springer の書いた本もよいであろう．問題点は主に代数的閉体の上で理論を展開していることである．任意の体の上の reductive group の詳しい理論には Borel-Tits の論文
A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965), 55–150

がある．SGA3 は最初から任意の scheme 上の group scheme の理論を作っているが, 大部で読みにくいであろう．また reductive group の理論の本質的なところでは Chevalley の結果を使っている．Root 系については
N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre IV, V, VI
を参照すればよい．

第二節． Weil 群については Artin-Tate “Class field theory” が詳しい．Weil の原論文も面白い．Weil はイデール類群 C_K の連結成分 D_K の存在が Riemann 予想の解決を阻んでいるのではないか, と考えていた．函数体のときは $D_K = \{1\}$ で $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{ab}}/F)$ を用いて Weil 群は簡単に構成できるが, 代数体のときはそうはいかない．D_K の克服が原論文のテーマであるが気魄が伝わってくると思う．L-group については References であげた Vogan の論文が面白い．L-group の構成と Local Langlands Conjecture の定式化を問題にしている．

第三節．multiplicity formula については [A1] と
J. -P. Labesse and R. P. Langlands, L-indistingushability for $SL(2)$, Can. J. Math. 31 (1979), 726–785,
R. Kottwitz, Stable trace formula: cuspidal tempered terms, Duke Math. J. 51 (1984), 611–650,
を参照．Arthur が新しい本を書いたそうである．Net で Arthur Arxiv に出ている．私はまだ読んでいない．

第四節．Motive については AMS, Proc. Symposia pure Math. Vol. 55 (Part 1) “Motive” が良い．好きな論文から読んでいくと勉強になる．Hodge group については Springer Lecture Note 900 にある Deligne の論文 (Milne のノート) が良い．Motive の category の簡潔な構成等については
U. Jannsen, Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity, Invent. Math. 107 (1992), 447–452
の一読をお勧めする．現在 Motive についての幾何学的な興味は mixed motive と scheme 上の motive に移ってきている．しかし algebraic cycles についての重要な予想 (Hodge, Tate 等) には大きな進展はないようである．

Seesaw dual pair とテータリフト

大阪市立大学大学院理学研究科　山名俊介

本稿は三章からなる．一章では, seesaw dual pair の定義, 例, その基本等式を解説する．Weil 表現や Howe 予想については, 松本久義先生の原稿でも解説されるけれど, 本稿でも記述した．二章では, seesaw dual pair の基本等式が Siegel-Weil 公式, L 函数の積分表示の理論, ダイコトミー現象などとともにどのように応用されるか基本的なアイデア解説した．三章では三つの例, 即ち, Rallis 内積公式, トーラス周期と L 函数の中心値, 三重積 L 函数の中心値に関する Jacquet 予想に二章の議論が応用され, 周期と L 函数の特殊値が関係するメカニズムが解説される．これら以外の様々な seesaw dual pair の基本等式に関しては, Kudla の論説 [19] などを参照されたい．最後に、筆者に講演の機会を与えて下さった軍司圭一先生と成田宏秋先生に感謝を述べます．成田先生には本稿に目を通していただき, 多くの助言と訂正をいただきました.

1　Seesaw dual pair と seesaw 等式

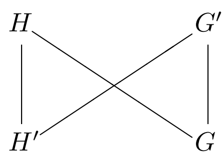
1.1　Seesaw dual pair の定義

F を局所体もしく大域体とする．簡単のため, F の標数は 0 であるとする．シンプレクティック群 $\mathbb{G} = Sp_N$ の部分群の組 (G, H) は, G の $\mathbb{G}$ での中心化群が H であり, H の $\mathbb{G}$ での中心化群が G であるとき, dual pair と呼ぶのであった.

定義 1.1. $\mathbb{G}$ の dual pair の組 (G, H), (G', H') は $G' \supset G$ かつ $H \supset H'$ であるとき, seesaw dual pair と呼ばれる.

注意 1.2.　(1) 定義 1.1 及び本章の議論は, dual pair を係数制限して得られる部分群の組 (weakly dual pair) に拡張できる．詳細は, Kudla の論説 [19] を参照.

(2) 良く知られているように, 名称の由来は下記の図式にある:



1.2 Seesaw dual pair の例

例 1 (直和分解型). $\langle\ ,\ \rangle : W \times W \to F$ を F 上のベクトル空間 W 上の非退化交代形式, $(\ ,\ ) : V \times V \to F$ を F 上のベクトル空間 V 上の非退化対称形式とし, $O(V)$ を対応する直交群とする. テンソル積 $\ll\ ,\ \gg = (\ ,\ ) \otimes \langle\ ,\ \rangle$ は, ベクトル空間 $\mathbb{W} = V \otimes_F W$ 上の交代形式を与え, $(Sp(W), O(V))$ は $Sp(\mathbb{W})$ の dual pair になる. W が互いに直交するシンプレクティック部分空間による分解 $W = W_1 + W_2$ を持てば, 下記の seesaw pair が得られる:

$$\begin{tikzcd} Sp(W) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & O(V) \times O(V) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ Sp(W_1) \times Sp(W_2) & O(V) \end{tikzcd}$$

一方, $V = V_1 + V_2$ を V の直交分解とすれば, 下記の seesaw pair が得られる:

$$\begin{tikzcd} Sp(W) \times Sp(W) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & O(V) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ Sp(W) & O(V_1) \times O(V_2) \end{tikzcd}$$

一般の分解 $W = W_1 + \cdots + W_r$, $V = V_1 + \cdots + V_s$ に関しても同様である. 二章で扱われる seesaw pair は全て直和分解型である.

例 2. K/F を二次拡大とし, σ を Galois 群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元とする. $(W^*, \langle\ ,\ \rangle^*)$ を K 上の歪エルミート空間とし, $(V^*, (\ ,\ )^*)$ を K 上のエルミート空間, $U(W^*)$ と $U(V^*)$ をそれぞれのユニタリ群とする. $\ll\ ,\ \gg^* = \mathrm{Tr}_{K/F}((\ ,\ ) \otimes \langle\ ,\ \rangle^\sigma)$ は, ベクトル空間 $\mathbb{W}^* = V^* \otimes_K W^*$ 上の交代形式を与え, $(U(W^*), U(V^*))$ は $Sp(\mathbb{W}^*)$ の dual pair になる. F 上の二次形式付き空間 $(V, (\ ,\ ))$ が存在して, V^* がその σ-エルミートな拡張, すなわち,

$$V^* \simeq V \otimes_F K, \qquad (x \otimes \alpha, y \otimes \beta)^* = \alpha^\sigma (x, y) \beta, \qquad (x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K)$$

であると仮定する. さらに $R = R_{K/F}$ を F への係数制限とし, F 上のシンプレクティックベクトル空間 $(R_{K/F} W^*, \mathrm{Tr}_{K/F} \langle\ ,\ \rangle^*)$ を考える. このとき, $\mathbb{W}^*$ は $V \otimes_F R_{K/F} W^*$ とシンプレクティックベクトル空間として同型であるから, 以下の seesaw pair が得られる:

$$\begin{tikzcd} U(V^*) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & Sp(R_{K/F} W^*) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ O(V) & U(W^*) \end{tikzcd}$$

例 3. U_1 と U_2 を F 上のベクトル空間とし, U_1^* と U_2^* をそれぞれの双対空間とする. 自然なペアリング $U_1 \otimes U_2^* \times U_1^* \otimes U_2 \to F$ を $\widetilde{W} = U_1 \otimes U_2^* + U_1^* \otimes U_2$ の交代形式に拡張すれば, $(GL(U_1), GL(U_2))$ は $Sp(\widetilde{W})$ の dual pair になる. 例 1 のシ

ンプレクティックベクトル空間 $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ の polarization を選べば, 同型 $V \simeq V^*$, $W' \simeq (W'')^*$ がそれぞれ $(\ ,\ )$, $\langle\ ,\ \rangle$ により定まり,

$$\mathbb{W} \simeq V \otimes W' + V \otimes W'' \simeq V \otimes (W'')^* + V^* \otimes W''$$

であるから, 以下の seesaw pair が得られる:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] GL(V) \arrow[d] \arrow[dr] & Sp(W) \arrow[d] \arrow[dl] \\ O(V) & GL(W'') \end{tikzcd}$$

1.3 局所テータ対応

F を局所体とし, 自明でない F の指標 ψ を固定する. G が $\mathbb{G}$ の部分群であるとき, $\widetilde{G}$ は $\mathbb{G}$ のメタプレクティック被覆 $\widetilde{\mathbb{G}} = \mathrm{Mp}_N$ での G の逆像を表すことにする. (G, H) が $\mathbb{G}$ の dual pair であるとき, Weil 表現 ω_ψ の $\widetilde{G} \times \widetilde{H}$ に引き戻しを考える. $\widetilde{G}$ の (genuine) 既約許容表現 π に対して, $\omega_\psi[\pi] = \omega_\psi / \cap_f \ker f$ とおく. ここで, f は全ての 0 でない G 同変写像 $\omega_\psi \to \pi$ を渡る. $\widetilde{G}$ と $\widetilde{H}$ は可換であるから, $\widetilde{H}$ の滑らか (genuine) 表現 $\Theta_\psi(\pi)$ が存在して, $\omega_\psi[\pi] \simeq \pi \boxtimes \Theta_\psi(\pi)$ となる. 以下では, ψ はしばしば省略される.

予想 1.3 (局所 Howe 予想)**.** $\Theta(\pi)$ は, もし 0 でなければ, 唯一つの既約商 $\theta_\psi(\pi)$ を持つ.

対応 $\pi \mapsto \theta_\psi(\pi)$ はテータ対応と呼ばれる.

注意 1.4. (1) 局所 Howe 予想はほとんど全ての場合に証明されている. 剰余標数が 2 でない非アルキメデス体の場合の証明は [37] を参照. F がアルキメデス体の場合の証明は [12] を参照. 本稿では簡単のために, 局所 Howe 予想をしばしば仮定する.

(2) (G, H) がシンプレクティック群と奇数次直交群の dual pair でなければ, 被覆 $\mathrm{Mp}(W) \to Sp(W)$ は G と H 上分裂することが知られている (証明は [25, 20] 参照). $\mathrm{Mp}(W)$ は奇数次直交群上分裂するが, シンプレクティック群上は分裂しない. 一般に分裂は一意的ではない. 分裂の具体的構成が Kudla [20] に与えられている.

簡単のため以下では, 分裂 $G \times H \to \mathrm{Mp}(W)$ があるとする. 適当な分裂を固定し, $\widetilde{G}$ (もしくは $\widetilde{H}$) の genuine な表現と G (もしくは H) の表現を同一視すれば, Howe 対応は G の表現と H の表現の間の対応を与える.

命題 1.5 (局所 seesaw 等式)**.** *(G, H), (G', H') を seesaw dual pair, π を G の既約表現, σ を H' の既約表現とするとき, 以下の同型が成り立つ:*

$$\mathrm{Hom}_G(\Theta(\sigma), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{H'}(\Theta(\pi), \sigma).$$

Proof.

$$\mathrm{Hom}_{G\times H'}(\omega, \pi\boxtimes\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times H'}(\pi\boxtimes\Theta(\pi), \pi\boxtimes\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{H'}(\Theta(\pi), \sigma).$$

同様に,

$$\mathrm{Hom}_{G\times H'}(\omega, \pi\boxtimes\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{G}(\Theta(\sigma), \pi)$$

も成り立つ. □

1.4 大域テータ対応

F を代数体, $\mathbb{A}$ をそのアデール, ψ を $\mathbb{A}/F$ の非自明な指標とする. $\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{A}}$ を $\mathbb{G} = Sp(\mathbb{W})$ アデール群 $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ のメタプレクティック被覆とし, (ω_ψ, S) を $\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{A}}$ の Weil 表現とする. (G, H) を $\mathbb{G}$ の dual pair とする. (π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現であるとする. π_v と $\theta_{\psi_v}(\pi_v)$ は殆ど全ての素点で不分岐であり, 制限テンソル積 $\otimes_v\theta_{\psi_v}(\pi_v)$ を考えることができる.

予想 1.6 (大域 Howe 予想)**.** $\otimes_v\theta_{\psi_v}(\pi_v)$ は $H(\mathbb{A})$ の保型表現である.

この予想には微妙な反例が早くから知られているし, 正確な予想を定式化できるだけの研究結果もまだない. $\mathbb{W}$ の polarization $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ を固定すれば, Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{X}(F_v))$ 上に Weil 表現は実現でき, Weil 表現の Schrödinger 模型と呼ばれる. K_v を $G(F_v)$ の適当な極大コンパクト部分群とし, K_v' を $H(F_v)$ の極大コンパクト部分群とする. v がアルキメデス素点であるとき, $\mathfrak{g}_v$ を $G(F_v)$ のリー環の複素化とし, $\mathfrak{h}_v$ を $H(F_v)$ のリー環の複素化とするとき, Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{X}(F_v))$ の $K_v \times K_v'$ の作用に関して有限な元からなる部分空間 $S(\mathbb{X}(F_v))$ は $(\mathfrak{g}_v, K_v) \times (\mathfrak{h}_v, K_v')$-加群である (実は適当な Fock 空間と一致する). v が非アルキメデス素点であるとき, $S(\mathbb{X}(F_v)) = \mathcal{S}(\mathbb{X}(F_v))$ とおき, $S(\mathbb{X}(\mathbb{A})) = \otimes_v S(\mathbb{X}(F_v))$ とする. 被覆 $\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{A}} \to \mathbb{G}(\mathbb{A})$ は唯一の分裂 $\mathbb{G}(F) \to \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{A}}$ を持ち, 任意の Schwartz 函数 $\phi \in S(\mathbb{X}(\mathbb{A}))$ に対して, テータ函数

$$\Theta(\phi)(g) = \sum_{x\in\mathbb{X}(F)} (\omega_\psi(g)\phi)(x)$$

は任意の $g \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathbb{A}}$ 及び $\gamma \in \mathbb{G}(F)$ に対して, $\Theta(\phi)(\gamma g) = \Theta(\phi)(g)$ を満足する (むしろ分裂はこの性質から決定される). 任意の $\xi \in V_\pi$ に対して

$$\theta_\phi(\xi)(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \overline{\xi(g)}\Theta(\phi)(g, h)dg$$

は $H(\mathbb{A})$ 上の保型形式になる. $H(\mathbb{A})$ の作用で不変なベクトル空間

$$\theta_\psi(\pi) = \{\theta_\phi(\xi) \mid \phi \in S(X(\mathbb{A})),\ \xi \in V_\pi\}$$

を保型表現 π の群 H へのテータリフトと呼ぶ. $\theta_\psi(\pi)$ は, 0 でないとき, $\otimes_v\theta_{\psi_v}(\pi_v)$ を (少なくとも既約商として) 実現し, 大域 Howe 予想を確かめることができる. しかし, $\theta_\psi(\pi)$ の非消滅の判定は微妙な問題である.

ξ_1, ξ_2 が $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式であり, 少なくとも一方が尖点形式であるとき, 内積 $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G$ を以下のように定義する.

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_G = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \xi_1(g)\overline{\xi_2(g)}dg.$$

次の等式は単なる積分の順序交換から得られる.

命題 1.7 (大域 seesaw 等式)**.** *(G, H), (G', H') を seesaw dual pair, (π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現, (σ, V_σ) を $H'(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とするとき, 尖点形式の組 $(\xi, \xi') \in V_\pi \times V_\sigma$ と $\phi \in S(\mathbb{X}(\mathbb{A}))$ に対して, 以下の等式が成り立つ:*

$$\langle \theta_\phi(\xi), \xi' \rangle_{H'} = \langle \theta_\phi(\xi'), \xi \rangle_G.$$

注意 1.8. (1) $\theta_\phi(\xi)$ と $\theta_\phi(\xi')$ はそれぞれ $H'(\mathbb{A})$ と $G(\mathbb{A})$ に制限されている. 核函数 $\Theta(\phi)(g, h)$ と $\Theta(\phi)(g', h')$ は共通の制限 $\Theta(\phi)(g, h')$ を持つけれども, 函数 $\Theta(\phi)(g', h)$ は存在しない. この事実が, 形式的に導かれる命題 1.7 の等式から様々な興味深い等式が得られる理由と考えられる.

(2) 応用上は, 命題 1.7 を ξ あるいは ξ' が尖点的でない保型形式である場合に適用しなければならないことが多い. 詳しくは, 三章の例を参照.

2 seesaw machine

2.1 Siegel-Weil 公式

Siegel-Weil 公式とは, テータ函数のある種の積分と Eisenstein 級数の間の等式であり, 両辺が絶対収束する領域で, Siegel [36] により証明され, Weil [39] により全ての古典群に一般化された. この等式は絶対収束域の外に, Kudla と Rallis[22] により拡張され, regularized Siegel-Weil 公式と呼ばれている. 本稿で扱う seesaw 等式は全て, この regularized Siegel-Weil 公式と結びつけて応用されるので, その解説を手短にする. 詳しくは, [22] や [40, 41] を参照.

$G = Sp_{2n}$, $H = O(V)$, $m = \dim V$ が偶数の場合を考える. まず F を局所体とする. (G, H) を $\mathbb{G}$ の dual pair とする. 適当に固定した分裂 $G \times H \to \mathrm{Mp}(W)$ により $\mathbb{G}$ の Weil 表現 ω を引き戻して, $G \times H$ の表現が得られる. $\mathbb{X} = V^n$ とすると, Schrödinger 模型 $S(V^n)$ への $O(V)$ の作用は, 線形作用 $\omega(h)\phi(x) = \phi(h^{-1}x)$ により定めるられる. V の判別式から定まる F の二次指標を χ_V と書く. G のジーゲル放物型部分群 P の作用は

$$\omega\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}\Big)\Phi(x) = \chi_V(\det a)|\det a|^{m/2}\Phi(xa), \qquad a \in \mathrm{GL}_n(F),$$
$$\omega\Big(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\Phi(x) = \psi(\mathrm{tr}(b(x,x))/2)\Phi(x), \qquad b \in \mathrm{Sym}_n(F)$$

により与えられる. ここで, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V^n$ に対して, $(x, x) = \frac{1}{2}((x_i, x_j)) \in \mathrm{Sym}_n(F)$ と書いた.

$$\begin{aligned} I(s) &= \mathrm{Ind}_P^G((\chi_V |\ \ |^s) \circ \det) \\ &= \Big\{ f^{(s)} : G \to \mathbb{C} \ \Big|\ f^{(s)}\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} g\Big) = \chi_V(\det a)|\det a|^{s+(n+1)/2} f^{(s)}(g) \Big\}, \end{aligned}$$

$s_0 = (m-n-1)/2$ とおけば, G-同変, H-不変な写像

$$S(V^n) \to I(s_0), \qquad\qquad \Phi \mapsto f_\Phi^{(s_0)}(g) = (\omega(g)\Phi)(0)$$

が得られる. Rallis の定理 [30, 25] より, この写像の像は, H の自明表現の G へのテータリフト $\Theta_\psi(\mathbb{1})$ と同一視できる. $G = O(n,n)$, $H = Sp_{2j}$ のときにも, 同様の写像と退化主系列表現 $I(s)$ の部分表現が得られる.

以下, F を代数体, V を F 上の二次形式付き空間とする. 上の議論により $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, $G(\mathbb{A})$ の誘導表現 $I(s)$ の切断 $f_\Phi^{(s)}$ が $f_\Phi^{(s_0)} = \otimes_v f_{\Phi_v}^{(s_0)}$ を拡張して得られる. 任意の $I(s)$ の切断 $f^{(s)}$ に対して, アイゼンシュタイン級数

$$E(f^{(s)})(g) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} f^{(s)}(\gamma g)$$

が構成される. Langlands の理論 (cf. [2]) より, $E(f^{(s)})$ は全平面に有理型に解析接続され, 函数等式 $E(f^{(s)}) = E(M(s)f^{(s)})$ を満たす. ここで, 絡作用素 $M(s) : I(s) \to I(-s)$ は, N を P のべき単根基, $w \in G(F)$ を適当な Weyl 元として, 積分

$$M(s)f^{(s)}(g) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f^{(s)}(wug)du$$

により定義される. 一方, テータ函数の積分

$$\theta_\phi(1)(g) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(\phi)(g,h)dh$$

は H の自明表現 $\mathbb{1}$ のテータリフトと考えられる. $\mathbb{1}$ は一般に尖点的ではないので, この積分が収束する保証はない (後で扱う全ての例で発散する).

定理 2.1 (Siegel-Weil 公式). 適当な条件の下, 任意の $\phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して

$$E(f_\phi^{(s)})|_{s=s_0} = \theta_\phi(1).$$

注意 2.2. (1) 左辺はアイゼンシュタイン級数の有理型解析接続であり, 適切な条件下で臨界点 s_0 で正則である. 右辺のテータ積分は Weil の収束条件 [39, Proposition 8] が満たされない場合は, regularize する必要がある.

(2) 他の古典群の場合の類似の等式については, [14, 40, 41] を参照.

練習問題 2.3. (1) $F = \mathbb{Q}$, $(\ ,\ )$ が正定値, $L \subset V(F)$ を極大偶整数格子でユニモジュラー (従って, m は 8 の倍数) であるとする. $\{L_j\}$ を L の種の中の類の代表系, $\epsilon(L_j) = \#O(V) \cap \mathrm{GL}(L_j)$,

$$\theta_{L_j}(Z) = \sum_{x \in L_j^n} e^{\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}((x,x)Z)}, \qquad Z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}), \qquad \Im Z > 0$$

とするとき,

$$E_{m/2}(Z) = \frac{\sum_j \epsilon(L_j)^{-1}\theta_{L_j}(Z)}{\sum_j \epsilon(L_j)^{-1}}$$

を定理 2.1 から導け (ヒント: $\phi_\infty = e^{-\pi \mathrm{tr}((x,x))}$, ϕ^∞ を $L \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ の定義関数, $\phi = \phi_\infty \otimes \phi^\infty$ とおいて, 定理 2.1 の等式の両辺を計算すればよい).

(2) (1) の両辺の Fourier 係数を計算して (軍司先生の原稿あるいは [34, 35] 参照), Siegel 公式を導け.

2.2 仮定 1: 基本等式

H' が H の部分群であるとき, $H(\mathbb{A})$ の保型形式 f の H' 周期を

$$\mathcal{P}_{H'}(f) = \int_{H'(F)\backslash H'(\mathbb{A})} f(h)dh$$

により定義する. f が 0 でないことを証明する一つの方法は, $\mathcal{P}_{H'}(f) \neq 0$ を証明することである. $H(\mathbb{A})$ の保型表現 (π, V_π) は, ある $f \in V_\pi$ が存在して $\mathcal{P}_{H'}(f) \neq 0$ であるとき, H' により区別されると言い, $\mathcal{P}_{H'}(\pi) \neq 0$ と書く. 特別なクラスの H と H' に対して, H' 周期が保型 L 函数の特殊値と密接に関係することがある. 本章では, seesaw pair の観点からそのような現象をやや公理的に議論してみたい. 後の具体例に適用できるように詳しい設定は明かさず, 収束などの問題も論じない.

(π, V_π) を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現, $(\pi^\vee, V_{\pi^\vee})$ を π の反傾表現とする. $V_{\pi^\vee} = \overline{V_\pi}$ と取ることができることに注意する. 以下の seesaw 図式を考える.

$$\begin{tikzcd} \theta_\phi(\xi)\ H \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & G' \ \ \theta_\phi(1) = E(f_\phi^{(s)})|_{s=s_0} \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ \mathbb{1}\ H' & G\ \ \xi \in V_\pi \end{tikzcd}$$

大域 seesaw 等式を適用すれば, Siegel-Weil 公式より

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{H'}(\theta_\phi(\xi)) &= \langle \theta_\phi(\xi), 1 \rangle_{H'} \\ &= \overline{\langle \xi, E(f_\phi^{(s)}) \rangle_G |_{s=s_0}} \\ &= \lim_{s \to s_0} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \overline{\xi(g)} E(f_\phi^{(s)})(g)dg \end{aligned}$$

が得られる. π のテータリフトの周期の研究は, Rankin-Selberg 型のゼータ積分

$$Z(\xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \xi^\vee(g) E(f^{(s)})(g)dg \qquad (\xi^\vee \in V_{\pi^\vee},\ f^{(s)} \in I(s))$$

の特殊値の研究に帰着される.

2.3 仮定 2: 積分表示の理論

Eisenstein 級数の理論より, ゼータ積分 $Z(\xi^\vee, f^{(s)})$ は $E(f^{(s)})$ が正則である開部分集合上収束し, 全平面上の有理型函数を定め, 函数等式

$$Z(\xi^\vee, f^{(s)}) = Z(\xi^\vee, M(s)f^{(s)})$$

を満たす. 更に以下を仮定する.

(1) 純テンソル $\xi = \otimes_v \xi_v$ と $f^{(s)} = \otimes_v f_v^{(s)}$ に対して, 以下の Euler 積を持つ:

$$Z(\xi^\vee, f^{(s)}) = \prod_v Z_v(\xi_v^\vee, f_v^{(s)}).$$

(2) 不分岐データ $\xi_{0,v}^\vee$, $f_{0,v}^{(s)}$ のゼータ積分は, ある L 群の表現 $r : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ に対して, π_v の Langlands の L 因子を与える:

$$Z_v(\xi_{0,v}^\vee, f_{0,v}^{(s)}) = L(s + 1/2, \pi_v, r).$$

(3) 任意の F の素点 v, 任意の $G(F_v)$ の既約許容表現 π_v に対して, 局所ゼータ積分は全平面に有理型解析接続を持ち, ある有理型函数 $\Gamma(s, \pi_v, \psi_v)$ が存在して, 局所函数等式

$$Z_v(\xi_v^\vee, f^{(s)}) = \Gamma\big(s + \tfrac{1}{2}, \pi_v, \psi_v\big) Z_v(\xi_v^\vee, M_v(s) f^{(s)}) \quad (\xi_v^\vee \in \pi_v^\vee,\ f_v^{(s)} \in I_v(s))$$

を満たす. ここで, $M_v(s) : I_v(s) \to I_v(-s)$ は $M(s)$ と類似の絡作用素.

通常は簡単な Euler 因子による修正項が (2) に混入するが, 以下では省く.
以上の仮定により, 悪い素点の集合 S に関して,

$$Z(\xi, f^{(s)}) = L^S\big(s + \tfrac{1}{2}, \pi, r\big) \textstyle\prod_v Z_v(\xi_v, f_v^{(s)})$$

が成り立つ ($Z(\xi, f^{(s)})$ の函数等式は s と $-s$ を結び付けるが, $L^S(s, \pi, r)$ の函数等式は s と $1-s$ を結びつけることに注意する). ゼータ積分の解析を L 函数の解析に帰着させるには, 悪い素点でのゼータ積分を制御する必要がある. このためには, 部分 L 函数では上手くいかないので, 悪い素点での L 因子を定義して, 完全 L 函数を考える必要がある.

2.4 仮定 3: L 因子, ε 因子, γ 因子

暫く F の素点 v を固定し, subscript $_v$ を省く. すなわち, $F = F_v$, $G = G(F_v)$, $I(s) = I_v(s)$, π を G の既約許容表現とする. 絡作用素 $M(s)$ の正規化 $M^\dagger(s)$ を適当に定義し, γ 因子を函数等式の比例因子として定義する. すなわち,

$$Z(\xi^\vee, M^\dagger(s) f^{(s)}) = \gamma\big(s + \tfrac{1}{2}, \pi, \psi\big) Z(\xi^\vee, f^{(s)}).$$

γ 因子の特徴付けは比較的容易である (正規化を上手く定義して, 必要な条件を全て満たすことを証明するのは容易ではないが). 例えば, π が誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の部分表現である時の関係式 $\gamma(s, \pi, \psi) = \gamma(s, \sigma, \psi)$ などのいくつかの性質により一意的に決定される (Shahidi の理論 [33] や Lapid と Rallis [24] の “Ten commandments” を参照). しかし, L 因子と ε 因子を定義する問題はより微妙である. K-有限な函数 $f^{(s)} : G' \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は s に関して正則かつ任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $f^{(s)} \in I(s)$ であるとき, $I(s)$ の正則切断と呼ばれる. $I(s)$ の切断 $f^{(s)}$ は正則切断 $f_1^{(s)}$ と $f_2^{(s)}$ が存在して, $f^{(s)} = f_1^{(s)} + M^\dagger(-s) f_2^{(-s)}$ と書けるとき, 良い切断と呼ばれる. 以下の良い切断の特徴付けも知られている:

命題 2.4 ([11, 42])**.** 以下の条件は同値.

- $f^{(s)}$ は良い切断.
- $f^{(s)}$ は $\Re s \geq 0$ で正則かつ $M^\dagger(s) f^{(s)}$ は $\Re s < 0$ で正則.

Tate の L 因子の積を局所 Euler 因子と呼ぶことにして, 以下を仮定する:

(1) π が既約であるとき, 局所 Euler 因子 $L(s,\pi)$ と単函数 $\varepsilon(s,\pi,\psi)$ が存在して, 以下の性質を満たす.

- 任意の $\xi^\vee \in \pi^\vee$ と任意の良い切断 $f^{(s)}$ に対して, $Z(\xi^\vee, f^{(s)})/L(s+1/2,\pi)$ は整函数.
- 任意の $s' \in \mathbb{C}$ に対して, ある $\xi^\vee \in \pi^\vee$ とある良い切断 $f^{(s)}$ が存在して, $Z(\xi^\vee, f^{(s)})/L(s+1/2,\pi)|_{s=s'} \neq 0$.
- 任意の $\xi^\vee \in \pi^\vee$ と切断 $f^{(s)}$ に対して次の函数等式が成り立つ:

$$\frac{Z(\xi^\vee, M^\dagger(s) f^{(s)})}{L\left(\frac{1}{2}-s,\pi^\vee\right)} = \varepsilon\left(s+\tfrac{1}{2},\pi,\psi\right)\frac{Z(\xi^\vee, f^{(s)})}{L\left(s+\frac{1}{2},\pi\right)}.$$

(2) π が不分岐であるとき, $L(s,\pi) = L(s,\pi,r)$. さらに ψ も不分岐ならば, $\varepsilon(s,\pi) = 1$.

(3) 正規化されたゼータ積分を次のように定義する:

$$Z^*(\xi^\vee, f^{(s)}) = Z(\xi^\vee, f^{(s)})/L(s+1/2,\pi).$$

任意の実部が非負の複素数 s' に対して, 射 $Z^*(s') : (\xi^\vee, f^{(s')}) \mapsto Z^*(\xi^\vee, f^{(s')})$ は 0 でない

$$\mathrm{Hom}_G(\pi^\vee \otimes I(s'), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_G(I(s'), \pi)$$

の 0 でない元を定める.

注意 2.5. (1) 次の関係式は基本的である:

$$\varepsilon(s,\pi,\psi) = \gamma(s,\pi,\psi)\frac{L(s,\pi)}{L(1-s,\pi^\vee)}.$$

(2) 仮定 3(2) を帰結するには仮定 2(2) だけでは不十分であることに注意する.

(3) 定義より局所ゼータ積分の族と L 因子の解析的性質は一致する. 従って, 保型 L 函数の解析的性質の解析がゼータ積分の解析に帰着される.

(4) 稠密な s に関して, $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi^\vee \otimes I(s'), \mathbb{C}) \leq 1$ を証明すれば, 仮定 2(3) が導かれる. 詳しくは, [27] の Part B, §12 の Bernstein の原理を参照.

再び F を代数体, π を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, L 函数と ε 函数を

$$L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v), \qquad \varepsilon(s,\pi) = \prod_v \varepsilon(s,\pi_v,\psi_v)$$

により定義する. s の実部が十分大きいとき, 無限積 $L(s,\pi)$ は絶対収束する. $\varepsilon(s,\pi)$ は実質的に有限積であり, ψ の取り方によらない. さらに, 仮定より $L(s,\pi)$ は全平面上の有理型函数に解析接続され, 函数等式 $L(s,\pi) = \varepsilon(s,\pi) L(1-s,\pi)$ を満たし, $L(s,\pi)$ の極の集合は $E(f^{(s)})$ の極の集合に含まれる.

2.5 仮定 4: ダイコトミー

簡単のために以下では, $s_0 = 0$ とする．今までの議論より, $\xi^\vee = \otimes_v \xi_v^\vee \in \pi^\vee$ と $\phi = \otimes_v \phi_v \in S(\mathbb{X}(\mathbb{A}))$ に対して,

$$\mathcal{P}_{H'}(\theta_\phi(\xi)) = L(1/2, \pi) \prod_v Z_v^*(\xi_v^\vee, f_{\phi_v}^{(0)}).$$

$\theta(\pi)$ が H' により区別されるためには, 以下の二条件が必要かつ十分である:

- (大域的条件) $L(1/2, \pi) \neq 0$;
- (局所的条件) 任意の v に対して, $Z_v^*(0)|_{\Theta_v(\mathbf{1})} \neq 0$.

有用な判定条件を得るためには, 局所的条件を上手く解釈する必要がある．局所 seesaw 等式より

$$Z_v^*(0)|_{\Theta_v(\mathbf{1})} \in \mathrm{Hom}_G(\Theta_v(\mathbb{1}), \pi_v) \simeq \mathrm{Hom}_{H'}(\Theta_v(\pi_v), \mathbb{C}),$$

であるから, 局所的条件より $\mathrm{Hom}_{H'}(\Theta_v(\pi_v), \mathbb{C}) \neq 0$ が従うことが分かる．この逆が成り立つ場合を見るために, 次の二つの図式の存在を仮定する:

$$\begin{tikzcd} H_+ \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & G' \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ H'_+ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_- \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & G' \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ H'_- & G \end{tikzcd}$$

(H'_+, H_+) と (H'_-, H_-) は内部形式である．$\epsilon = \pm$ に対して, $H'_\epsilon(F_v)$ の表現 π の $G'(F_v)$ へのテータリフトを $\Theta_v^\epsilon(\pi)$ と書くと, 多くの場合に

$$I_v(0) = \Theta_v^+(\mathbb{1}) \oplus \Theta_v^-(\mathbb{1}) \tag{2.1}$$

が成り立つ．故に

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_G(I_v(0), \pi) &= \dim \mathrm{Hom}_G(\Theta_v^+(\mathbb{1}), \pi) + \dim \mathrm{Hom}_G(\Theta_v^-(\mathbb{1}), \pi) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{H'_+}(\Theta_v^+(\pi), \mathbb{C}) + \dim \mathrm{Hom}_{H'_-}(\Theta_v^-(\pi), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

$\mathrm{Hom}_{H'_+}(\Theta_v^+(\pi), \mathbb{C})$ か $\mathrm{Hom}_{H'_-}(\Theta_v^-(\pi), \mathbb{C})$ のどちらか一方だけが 0 でないとき, このような現象はダイコトミーと呼ばれる．

2.6 Gross-Prasad 的結論

以上の仮定の下, 次の結果が証明される:

定理 2.6. *π を $G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする.*

(1) 以下の条件は同値である:

- $\mathcal{P}_{H'}(\theta(\pi)) \neq 0$;

- $L(1/2,\pi)\neq 0$ かつ全ての素点 v で $\mathrm{Hom}_G(\Theta(\pi_v),\mathbb{C})\neq 0$.

(2) さらに, 以下の条件も同値である*:*

- ある内部形式 H_0 と H_0' が存在して, π の H_0 へのテータリフトは H_0' により区別される*;*
- $L(1/2,\pi)\neq 0$.

Proof. $Z_v^*(0)|_{\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})}\in \mathrm{Hom}_{H_\epsilon'}(\Theta_v^\epsilon(\pi)$ より,

$$Z_v^*(0)|_{\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})}\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Hom}_{H_\epsilon'}(\Theta_v^\epsilon(\pi),\mathbb{C})\neq 0.$$

一方, (2.1) より $Z_v^*(0)|_{\Theta_v^+(\mathbf{1})}\neq 0$ または $Z_v^*(0)|_{\Theta_v^-(\mathbf{1})}\neq 0$ であるから, ダイコトミーより逆も成立する. 従って, (1) はこれまでの議論より明らかである.

(2.1) より直和分解

$$I(0)=R^+\oplus R^-, \qquad R^\epsilon=\oplus_{(\epsilon_v)_v:\prod_v \epsilon_v=\epsilon}\Theta_v^{\epsilon_v}(\mathbb{1}).$$

が成り立つことが分かる. 絡作用素 $M(s)$ は $s=0$ で R^- に -1 倍で作用するので (cf. 注意 2.7(2)), R^- は Eisenstein 級数の中心値に寄与せず, ゼータ積分の中心値にも寄与しない. H' の F 上の内部形式 H_i' の自明表現の G' へのテータリフトを $\Theta_{H_i'}(\mathbb{1})$ と書くと, Minkowski-Hasse の定理 (或いはその類似) により, $R^+=\oplus_{H_i'}\Theta_{H_i'}(\mathbb{1})$ が成り立つ. L 函数の定義より

$$L(1/2,\pi)=\sum_i Z(\overline{\xi_i},f_i^{(s)})|_{s=0}=\sum_i Z(\overline{\xi_i},f_{\phi_i}^{(s)})|_{s=0}=\mathcal{P}_{H_i'}(\theta_{\phi_i}(\xi_i)).$$

従ってある i が存在して $\mathcal{P}_{H_i'}(\theta_{\phi_i}(\xi_i))\neq 0$. これが証明したいことであった. □

注意 2.7. (1) $\theta(\pi)$ が H' により区別されるためには, $\mathrm{Hom}_{H'(\mathbb{A})}(\Theta(\pi),\mathbb{C})\neq 0$ が必要である. 故に全ての F の素点 v で $\mathrm{Hom}_{H'(F_v)}(\Theta_v(\pi_v),\mathbb{C})\neq 0$ であることが必要である.

(2) 正規化された絡作用素 $M_v^\dagger(s)$ は $s=0$ で, $\Theta_v^\epsilon(\mathbb{1})$ に恒等写像もしくは -1 倍で作用し, 次の同値が容易に分かる:

$$\mathrm{Hom}_{H_\epsilon'}(\Theta_v^\epsilon(\pi),\mathbb{C})\neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon(1/2,\pi,\psi_v)=M^\dagger(0)|_{\Theta_v^\epsilon(\mathbf{1})}.$$

従って, $\mathrm{Hom}_{H_\epsilon'}(\Theta_v^\epsilon(\pi),\mathbb{C})\neq 0$ を満たす符合 ϵ はルート数 $\varepsilon(1/2,\pi,\psi_v)$ により特定できる. この現象はイプシロンダイコトミーと呼ばれる.

(3) L 函数の微分には, R^- から来る Eisenstein 級数も寄与する. このような Eisensetein 級数は, 本稿のテータリフトの幾何的な類似物と考えられる算術的テータリフトなどのより深い現象と関わりがある. 興味ある読者は [23] などを参照.

3　seesaw machine の応用

3.1　例 1: doubling seesaw と Rallis 内積公式

doubling 法は全ての古典群に適用可能だが、簡単のために本稿では, 奇数次直交群の場合だけを記述する. F を代数体, $(V, (\ ,\ ))$ を n 次元二次形式付きベクトル空間とし,

$$V^{\square} = V \oplus V, \qquad V_1 = V \oplus \{0\}, \qquad V_2 = \{0\} \oplus V$$

とおく. 二次形式 $(\ ,\ )^{\square} : V^{\square} \times V^{\square} \to F$ を次のように定義する:

$$(x + y, x' + y')^{\square} = (x, x') - (y, y') \qquad (x, x' \in V_1,\ y, y' \in V_2).$$

$G = O(V)$ と $G^{\square} = O(V^{\square})$ をそれぞれ V と $V^{\square}$ の直交群とする.

$G(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現 π の Sp_{2j} へのテータリフトを $\theta_j(\pi)$ と書く. 以下の結果が知られている:

定理 3.1 (Rallis [30]). *(1) $j \geq n$ ならば, $\theta_j(\pi) \neq 0$.*

(2) $\theta_j(\pi) \neq 0$ ならば, 任意の $j' \geq j$ に対して, $\theta_{j'}(\pi) \neq 0$.

(3) j_0 を $\theta_{j_0}(\pi)$ が消えない最小の非負整数であるとき, $\theta_{j_0}(\pi)$ は既約尖点的保型表現である.

以下では, $j = (n-1)/2$ の場合を考え, $H = Sp_{n-1}$, $\widetilde{H} = \mathrm{Mp}_{n-1}$, $\theta(\pi) = \theta_{n-1}(\pi)$ とおき, 次の seesaw 図形を考える.

$$\begin{tikzcd}
Sp(W) \times Sp(W) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & G^{\square} \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
Sp(W) & G \times G
\end{tikzcd}$$

Weil 表現 ω_ψ の $G \times \widetilde{H}$ への標準的な分裂に関する引き戻しを $\omega_{\psi,V}$ と書く (これは二次形式 $(\ ,\ )$ に依存する). $a \in F^{\times}$ に対して, $\psi_a(x) = \psi(ax)$, $aV = (V, a(\ ,\ ))$ とおく. $c_a \in GSp_{2n(n-1)}$ が similitude 因子 a を持つとき,

$$\omega_{\psi_a, V} \simeq \omega_{\psi, aV} \simeq \omega_{\psi, V}^{c_a}$$

である. 下記の seesaw machine

$$\begin{tikzcd}
\theta_{\phi_1}(\xi_1)\overline{\theta_{\phi_2}(\xi_2)}\ Sp(W) \times Sp(W) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & G^{\square}\ E(f^{(s)}_{\sigma(\phi_1 \otimes \bar{\phi}_2)})|_{s=0} \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
\mathbb{1}\ Sp(W) & G \times G\ \ \xi_1 \in V_\pi,\ \bar{\xi}_2 \in \overline{V_\pi}
\end{tikzcd}$$

から (σ は適当な部分 Fourier 変換), 内積 $\langle \theta_\phi(\xi), \theta_\phi(\xi) \rangle_H$ を形式的に計算すると,

$$\langle \theta_\phi(\xi), \theta_\phi(\xi) \rangle_H = Z(\xi \boxtimes \overline{\xi}, f^{(s)}_{\sigma(\phi \otimes \overline{\phi})})|_{s=0}.$$

ここで, $\xi \in V_\pi$, $\xi^\vee \in V_{\pi^\vee}$, $I(s)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, 次の積分を考えた:

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(F)\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})} \xi(g)\xi^\vee(g')E((g,g');f^{(s)})dg_1dg_2.$$

以上の議論を正当化するためには, 積分の順序の入れ替えやジーゲル・ヴェイユ公式の Eisenstein 級数の収束域の外への拡張をする必要がある. 興味ある読者は, Kudla と Rallis による論文 [22], Wee Teck Gan と武田氏の論文 [6] あるいは筆者の論文 [40, 41] を参照されたい. 直交群の場合には, 以下のように Wee Teck Gan と武田氏により全ての場合に内積公式が拡張されている (他の群では, ある種の場合にはジーゲル・ヴェイユ公式の拡張は知られていない):

V の特殊直交群の L 群は, n が奇数のとき, $Sp(n-1,\mathbb{C})\times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, n が偶数のとき, $SO(n,\mathbb{C})\rtimes \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ である. n が偶数かつ V の判別式体 E が F と異なるとき, $\epsilon = \mathrm{diag}[1,1,\ldots,1,-1] \in O(n,\mathbb{C})\setminus SO(n,\mathbb{C})$ とすれば, ガロア群の作用は $\mathrm{Gal}(E/F)$ を経由して, $g\mapsto \epsilon g\epsilon^{-1}$ により与えられる. それ以外の場合の作用は自明である. n が奇数のとき, $N=n-1$, n が偶数のとき, $N=n$ として, $\mathrm{std}: {}^LG \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ を標準的な準同型として, 標準 L 函数を考える.

注意 3.2. (1) 非連結群 G の L 群は定義されていないことに注意する. Adams [1] によると, G の L 群は n が奇数のとき, $Sp(n-1,\mathbb{C})\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, n が偶数のとき, $O(n,\mathbb{C})\rtimes\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ とするのが良いそうである.

(2) 同様の構成が $(\ ,\ )=0$, $G=GL(V)$ の場合にも適用できるが, 得られる L 函数は Godement-Jacquet の L 函数 (定義は [7] 参照) と異なる.

$P=\{g\in G^\square \mid V^\triangle g = V^\triangle\}$ を $G^\square$ のジーゲル放物型部分群とする. 有限 coset 分解 $G^\square(F)=\coprod_i P(F)\gamma_i(G(F)\times G(F))$ を使うと, 上の積分が

$$\int_{G(F)\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})} \xi(g)\xi^\vee(g') \sum_{\gamma\in P(F)\backslash P(F)\gamma_i(G(F)\times G(F))} f^{(s)}(\gamma(g,g'))dgdg'$$

の和に等しいことが分かる. main orbit の $P(F)\backslash G(F)\times G(F) = G(F)\times e$ 以外の項は 0 になることが分かるので, 結局

$$Z(\xi\boxtimes\xi^\vee, f^{(s)}) = \int_{G(\mathbb{A})} \langle \pi(g)\xi,\xi^\vee\rangle_G f^{(s)}((g,e))dg$$

となる (詳しくは, [27] を参照). 同型 $\pi \simeq \otimes_v \pi_v$, $\pi^\vee \simeq \otimes\pi_v$, $I(s)\simeq \otimes_v I_v(s)$ を適当に固定する. $\xi_v\in\pi_v$, $\xi_v^\vee \in \pi_v^\vee$, $f_v^{(s)} \in I_v(s)$ に対して,

$$Z(\xi_v\boxtimes\xi_v^\vee, f_v^{(s)}) = \int_{G(F_v)} \langle \pi_v(g)\xi_v,\xi_v^\vee\rangle f_v^{(s)}((g,e))dg$$

とおく. π_v が不分岐のとき不分岐データ $\xi_{v,0}$, $\xi_{v,0}^\vee$, $f_{v,0}^{(s)}$ に対して,

$$Z(\xi_{v,0}\boxtimes\xi_{v,0}^\vee, f_{v,0}^{(s)}) = L(s,\pi_v,\mathrm{std})\langle\xi_{v,0},\xi_{v,0}^\vee\rangle b_v(s)^{-1},$$
$$b_v(s) = \prod_{j=1}^{[n/2]} \zeta_v(2s+n+1-2j).$$

となる．従って，$\xi = \otimes_v \xi_v$, $\xi^\vee = \otimes_v \xi_v^\vee$, $f^{(s)} = \otimes_v f_v^{(s)}$ であるとき，S を悪い素点の集合とすれば，

$$Z(\xi \boxtimes \xi^\vee, f^{(s)}) = \prod_{v \in S} Z(\xi_v \boxtimes \xi_v^\vee, f_v^{(s)}) \cdot L^S(s, \pi, \mathrm{std})/b^S(s).$$

γ 因子の理論は [24] を参照．L 因子と ε 因子に関しては [26, 11, 42] を参照．

以上により，L 函数 $L(s,\pi)$ の解析的性質 (有理型解析接続，函数等式，極の位置) を Eisenstein 級数の解析的性質から知ることができる．

命題 3.3 ([21, 42])**.** *無限積 $L(s,\pi)$ は右半平面 $\Re s > \frac{n}{2}$ で絶対収束し，全平面上の有理型函数に解析接続される．$L(s,\pi)$ は有限集合 $\mathfrak{X} = \left\{1-\frac{n}{2}, 2-\frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right\} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ に高々一位の極を持ち，函数等式 $L(s,\pi) = \varepsilon(s,\pi)L(1-s,\pi)$ を満たす．*

注意 3.4. GL_N の標準 L 函数と異なり，この L 函数には極が存在する．極の存在理由はテータリフトの理論から説明することができる．詳細は [22, 6, 42] などを参照．

局所 seesaw 等式より，大域的なテータリフトが 0 でないための局所的条件は

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mp}_{n-1}}(\Theta(\pi_v) \boxtimes \overline{\Theta(\pi_v)}, \mathbb{C}) \neq 0$$

であり，これは π_v の局所テータリフトが 0 でないことと同値である．各素点 v に対して，$\mathrm{sgn}_v : O(V_v) \to \mu_2$ を直交群の determinant 指標とする．素点の有限集合 T に対して，$\mathrm{sgn}_T = \prod_{v \in T} \mathrm{sgn}_v$ とする．T の位数が偶数であれば，sgn_T は保型的指標である．任意の素点 v に対して，

$$L(s, \pi_v \otimes \mathrm{sgn}_v) = L(s, \pi_v), \qquad \varepsilon(s, \pi_v \otimes \mathrm{sgn}_v, \psi_v) = \varepsilon(s, \pi_v, \psi_v)$$

は容易に証明できるので，$\#T$ が偶数なら $L(s, \pi \otimes \mathrm{sgn}_T) = L(s,\pi)$ である．

直交群の場合には，以下のテータダイコトミーが証明されている．

定理 3.5 (Gan-Savin [5])**.** *F を非アルキメデス体，π を G の既約許容表現とする．*

$$\begin{aligned} \Theta^+(\mathbb{1}) &= \Theta(\mathbb{1}), \\ \Theta^-(\mathbb{1}) &= \Theta(\mathbb{1}) \otimes \mathrm{sgn}, \\ \Theta^+(\pi) &= \Theta(\pi), \\ \Theta^-(\pi) &= \Theta(\pi \otimes \mathrm{sgn}) \end{aligned}$$

とおく．このとき，$\Theta^+(\pi)$ か $\Theta^-(\pi \otimes \mathrm{sgn})$ どちらか一方だけが 0 ではない．さらに

$$Z^*(0)|_{\Theta^\epsilon(\mathbf{1})} \neq 0 \Leftrightarrow \Theta^\epsilon(\pi) \neq 0.$$

以上より仮定 1〜4 が全て確かめられたので，以下の結論が従う．

定理 3.6 (cf. [41])**.** *π を $O(V)$ の既約尖点的保型表現とし，$L(s,\pi)$ が整函数であるとする．このとき，以下の条件は同値である:*

- *$\theta(\pi) \neq 0$;*

- $L(1/2,\pi) \neq 0$ かつ任意の素点 v に対して, $\theta_v(\pi_v) \neq 0$;
- $L(1/2,\pi) \neq 0$ かつ任意の素点 v に対して, $\pi_v(-1) = \varepsilon(V_v)\varepsilon(1/2,\pi_v)$.

$L(1/2,\pi) \neq 0$ ならば, 偶数個の素点の集合 T が存在して, $\theta(\pi \otimes \mathrm{sgn}_T) \neq 0$.

注意 3.7. 仮定の L 函数が正則性から, $\theta(\pi)$ は尖点的であり, Rallis 内積公式が適用できる.

3.2 例 2: トーラス周期と L 函数の中心値

B を代数体 F 上の四元数代数とし, $Z \simeq F^\times$ を B の中心, (π, V_π) を $B^\times(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とする. π の中心指標を χ_π で表し, $\chi_\pi = 1$ を仮定する. E を F 上二次元の半単純代数とし, E が B に埋め込まれていると仮定する. すなわち, ある $B^\times$ の元 b が存在して, $B = E \oplus Eb$, $T = E^\times$ は $B^\times$ の極大トーラスである. Waldspurger [38] は, $f \in V_\pi$ のトーラス周期

$$\mathcal{P}_T(f) = \int_{Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A})} f(t)dt$$

を研究している. $O(B)$ を B のノルム形式の直交群, 次の seesaw 図形

$$\begin{tikzcd} O(B) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ O(E) \times O(Eb) & \mathrm{SL}_2 \end{tikzcd}$$

の similitude 版

$$\begin{tikzcd} GSO(B) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)^0 \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ (GSO(E) \times GSO(Eb))^0 & \mathrm{GL}_2 \end{tikzcd}$$

を考える. ここで,

$$(\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)^0 = \{(g, g') \in \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \mid \det g = \det g'\}$$

とおいた. $(GSO(E) \times GSO(Eb))^0$ も同様に定義する.

π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, $\chi_\pi = 1$ とする. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の別の既約保型表現 π' と $GL_2(\mathbb{A})$ のある誘導表現 $I(s)$ の中心指標の積が自明であるとき, 次のゼータ積分を考える:

$$Z(f, f'; f^{(s)}) = \int_{Z(\mathbb{A})\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} f(g)f'(g)E(f^{(s)})(g)dg$$
$$(f \in V_\pi,\ f' \in V_{\pi'},\ f^{(s)} \in I(s)).$$

Jacquet [18] より，このゼータ積分はテンソル積 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ が与える四次元表現 $r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ に関する $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の L 函数 $L(s, \pi \times \pi', r)$ を与える．

次の accidental 同型

$$GSO(E) \simeq E^\times, \qquad GSO(B) \simeq B^\times \times B^\times / \{(z, z^{-1}) \mid z \in F^\times\}.$$

に関しては成田先生の原稿を参照．Jacquet-Langlands 対応により，π と対応する $B^\times$ の保型表現を π^B により表すとき (π^B が存在しなければ，形式的に $\pi^B = 0$ とする)，後者の同型を使って，

$$\theta(\pi) \simeq \pi^B \boxtimes (\pi^B)^\vee \simeq \pi^B \boxtimes \pi^B$$

か成り立つ事実は良く知られている．下記の seesaw machine より，$\xi \in V_\pi$ に対して，ある $\xi_1^B, \xi_2^B \in V_{\pi^B}$ が存在して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_T(\xi_1^B)\mathcal{P}_T(\xi_2^B) &= Z(\bar{\xi}, E(f_\phi^{(s)})|_{s=0}; f_{\phi'}^{(s)})|_{s=0} \\
&= \prod_v Z_v(\bar{\xi}_v, f_{\phi_v}^{(0)}; f_{\phi'_v}^{(s)})|_{s=0} \\
&= L^S(1/2, \pi \times \theta(\mathbb{1}), r) \prod_{v \in S} Z_v(\bar{\xi}_v, f_{\phi_v}^{(0)}; f_{\phi'_v}^{(s)})|_{s=0} \\
&= L(1/2, \mathrm{BC}_E(\pi)) \prod_{v \in S} Z_v^*(\bar{\xi}_v, f_{\phi_v}^{(0)}; f_{\phi'_v}^{(s)})|_{s=0}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\mathrm{BC}_E(\pi)$ は π の $\mathrm{GL}_2(E)$ への基底変換を表す．

$$\begin{tikzcd}
 & GSO(B) \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)^0 \arrow[d, dash] \arrow[dll, dash] & E(f_\phi^{(s)})E(f_{\phi'}^{(s)})|_{s=0} \\
\mathbb{1} & (GSO(E) \times GSO(Eb))^0 & & \mathrm{GL}_2 & \xi \in V_\pi
\end{tikzcd}$$

Weil 表現や Siegel-Weil 公式や基本等式の similitude 群への拡張については，[3] を参照．以下のダイコトミーが知られている．

定理 3.8 (Tunnel, H. Saito [32])**.** *F を局所体，$\mathrm{GL}_2(F)$ の既約許容表現 π の局所 Jacquet-Langlands 対応を π^{JL} (存在しなければ $\pi^{\mathrm{JL}} = 0$ とおく) と書くとすると*

$$\dim \mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi, \mathbb{C}) + \dim \mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi^{\mathrm{JL}}, \mathbb{C}) = 1.$$

以上の議論により Waldspurger による次の結果が得られる:

定理 3.9 (Waldspurger [38])**.** *π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし，E を F 上二次の半単純な代数とする．以下の条件は同値である:*

- $L(1/2, \mathrm{BC}_E(\pi)) \neq 0$;
- ある四元数代数 $B \supset E$ に対して，$f \in V_{\pi^B}$ が存在して $\mathcal{P}_T(f) \neq 0$.

さらに任意の E を含む四元数代数 B に対して, 以下の条件も同値である:

- $\mathcal{P}_T(\pi^B) \neq 0$;
- $L(1/2, \mathrm{BC}_E(\pi)) \neq 0$ かつ全ての素点 v で $\mathrm{Hom}_{E_v^\times}(\pi_v^{B_v}, \mathbb{C}) \neq 0$.

実際の定理では, 周期の平方 $\mathcal{P}_T(f)^2$ の値が明示的に計算されている. [13] や Wee Teck Gan 氏のノート [3] にも詳しい説明があるので, 参照されたい.

3.3 例 3: 三重積 L 函数の中心値に関する Jacquet 予想

(π_i, V_{π_i}) $(i = 1, 2, 3)$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現とし, $\chi_{\pi_1}\chi_{\pi_2}\chi_{\pi_3} = 1$ を仮定する. B を代数体 F 上の四元数代数とし, π_i^B を 3.2 節と同様に定める. $f_i^B \in \pi_i^B$ に対して, 三重双線形形式

$$I(f_1^B, f_2^B, f_3^B) = \int_{Z(\mathbb{A})B^\times(F)\backslash B^\times(\mathbb{A})} f_1^B(g) f_2^B(g) f_3^B(g) dg$$

を考える. $r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_8(\mathbb{C})$ をテンソル積により定まる八次元表現とする. 次の結果は Jacquet に予想され, Harris と Kudla [9, 10] が証明した.

定理 3.10 (Jacquet 予想→ Harris-Kudla の定理)**.** 上の設定の下, 以下の条件は同値である:

- $L(1/2, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r) \neq 0$;
- ある四元数代数 B に対して, $f_i^B \in V_{\pi_i^B}$ が存在して $I(f_1^B, f_2^B, f_3^B) \neq 0$.

さらに, このような B は, 次の条件により一意的に決まる: 全ての素点 v で

$$\mathrm{Hom}_{B_v^\times}(\pi_{1,v}^{B_v} \otimes \pi_{2,v}^{B_v} \otimes \pi_{3,v}^{B_v}, \mathbb{C}) \neq 0.$$

注意 3.11. (1) 定理 3.6 のように, 定理 3.9 や 3.10 の局所的な条件もルート数により言い換えることができる. 詳しくは, 各文献を参照.

(2) 定理 3.9 と 3.10 は, Gross-Prasad 予想 [8] の特別な場合である. Gross-Prasad 予想は, 市野氏と池田氏 [13] により精密化されている.

三重積 L 函数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r)$ の積分表示は, Garrett [4] により発見され, Piatetski-Shapiro と Rallis [28] や池田保氏 [15, 16, 17], Ramakrishnan [31] により詳しく研究され, L 因子や ε 因子も全ての素点で定義されている.

次のゼータ積分

$$\begin{aligned} Z(f_1, f_2, f_3; f^{(s)}) = &\int_{Z(\mathbb{A})(\mathrm{GL}_2(F)^3)^0\backslash(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})^3)^0} f_1(g_1) f_2(g_2) f_3(g_3) \\ &\times E(f^{(s)})(g_1, g_2, g_3) dg_1 dg_2 dg_3 \qquad (f_i \in V_{\pi_i},\ f^{(s)} \in I(s)) \end{aligned}$$

は 2.3 節と 2.4 節の仮定を全て満たし, 三重積 L 函数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r)$ の積分表示を与える. 次の seesaw machine

$$
\begin{tikzcd}
f_1^B, f_2^B, f_3^B & (GSO(B)^3)^0 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & GSp_6 \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] & E(f_\phi^{(s)})|_{s=0} \\
\mathbb{1} & GSO(B) & (\mathrm{GL}_2^3)^0 & f_1, f_2, f_3
\end{tikzcd}
$$

より, $f_i \in V_{\pi_i}$ に対して, ある $f_i^B \in V_{\pi_i^B}$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
I(f_1^B, f_2^B, f_3^B)^2 &= Z(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3; f_\phi^{(s)})|_{s=0} \\
&= \prod_v Z_v(\bar{f}_{1,v}, \bar{f}_{2,v}, \bar{f}_{3,v}; f_{\phi_v}^{(s)})|_{s=0} \\
&= L(1/2, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, r) \prod_{v \in S} Z_v^*(\bar{f}_{1,v}, \bar{f}_{2,v}, \bar{f}_{3,v}; f_{\phi_v}^{(0)})|_{s=0}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 仮定より $(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)^\vee \simeq \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ に注意する. Weil 表現や Siegel-Weil 公式や基本等式の similitude 群への拡張については, [9] を参照. 次のダイコトミーは Prasad [29] により証明されている.

定理 3.12 (D. Prasad [29]). *F を局所体, B を F 上の四元数体, 任意の $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約許容表現の三つ組 (π_1, π_2, π_3) に対して*

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F)}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, \mathbb{C}) + \dim \mathrm{Hom}_{B^\times}(\pi_1^B \otimes \pi_2^B \otimes \pi_3^B, \mathbb{C}) = 1.$$

以上を組み合わせれば, 定理 3.10 が得られる.

References

[1] J. Adams, L-functoriality for dual pairs, Astérisque **171-172** (1989) 85–129.

[2] J. Arthur, Eisenstein series and the trace formula, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979) part 1, 253–274.

[3] W. T. Gan, The Shimura correspondence a lá Waldspurger, preprint.

[4] P. Garrett, Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products, Ann. of Math. **125** (1987) 209–235.

[5] W. T. Gan and G. Savin, Representations of metaplectic groups I: epsilon dichotomy and local Langlands correspondence, preprint.

[6] W. T. Gan and S. Takeda, The regularized Siegel-Weil formula: the second term identity and non-vanishing of theta lifts from orthogonal groups, J. Reine Angew. Math. **659** (2011) 175–244.

[7] R. Godement and H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Springer Lec. notes in Math., vol. **260**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] B. H. Gross and D. Prasad, On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}, Canad. J. Math. **44** (1992) 974–1002.

[9] M. Harris and S. Kudla, The central critical value of a triple product L-function, Ann. of Math. (2) **133** (1991) 605–672.

[10] M. Harris and S. Kudla, On a conjecture of Jacquet, in Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory (Baltimore, 2002), Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 2004, 355–371.

[11] M. Harris, S. Kudla and W. J. Sweet Jr., Theta dichotomy for unitary groups, J. Am. Math. Soc., **9** (1996) 941–1004.

[12] R. Howe, Transcending classical invariant theory, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 535–552.

[13] A. Ichino and T. Ikeda, On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture, Geom. Funct. Anal. **19** (2010) 1378–1425.

[14] A. Ichino, A regularized Siegel-Weil formula for unitary groups, Math. Z. **247** (2004) 241–277.

[15] T. Ikeda, On the functional equations of triple L-functions, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989) 175–219.

[16] T. Ikeda, On the location of poles of the triple L-functions, Compos. Math. **83** (1992) 187–237.

[17] T. Ikeda, On the gamma factor of the triple L-function I, Duke Math. J. **97** (1999) 301–318.

[18] H. Jacquet, Automorphic forms on GL(2) Part II, Springer Lec. notes in Math. **278**, 1972.

[19] S. Kudla, Seesaw dual reductive pairs, Automorphic forms of several variables. Prog. Math. vol. **46**, pp. 244–268. Boston, MA: Birkhäuser 1984.

[20] S. Kudla, Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs, Isr. J. Math. **84** (1994) 361–401.

[21] S. Kudla and S. Rallis, Poles of Eisenstein series and L-functions, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II, 81–110, Israel Math. Conf. Proc. **3**, Weizmann, Jerusalem, 1990.

[22] S. Kudla and S. Rallis, A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity, Ann. Math. **140** (1994) 1–80.

[23] S. Kudla, M. Rapoport and T. Yang, Modular forms and special cycles on Shimura curves, Annals of Math. Studies **161**, Princeton Univ. Press, 2006.

[24] E. Lapid and S. Rallis, On the local factors of representations of classical groups, Automorphic representations, L-functions and applications: progress and prospects, Berlin: de Gruyter (2005) 309–359.

[25] C. Moeglin, M.-F. Vignera and C.-L. Waldspurger, Correspondence de Howe sur un corps p-adique, Springer Lec. notes in Math. **1291**, 1987.

[26] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, ε factor of representations of classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83** (1986) 4589-4593.

[27] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, L-functions for classical groups, in Springer Lec. notes in Math., vol. **1254** (1987) 1–52.

[28] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, Rankin triple L-functions, Compos. Math. **64** (1987) 31–115.

[29] D. Prasad, Trilinear forms for representations of $GL(2)$ and local epsilon factors, Compos. Math. **75** (1990) 1–46.

[30] S. Rallis, On the Howe duality conjecture, Compos. Math. **51** (1984) 333–399.

[31] D. Ramakrishnan, Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for SL(2), Ann. of Math. (2) **152** (2000) 45–111.

[32] H. Saito, On Tunnell's formula for characters of $GL(2)$, Compos. Math. **85** (1993) 99–108.

[33] F. Shahidi, A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups, Ann. of Math. (2) **132** (1990) 273–330.

[34] G. Shimura, On Eisenstein series, Duke Math. J. **50** (1983) 417–476.

[35] G. Shimura, The number of representations of an integer by a quadratic form, Duke Math. J. **100** (1999) 59–92.

[36] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I, Math. Ann. **124** (1951) 17–54; II, (1952) 364–387.

[37] J.-L. Waldspurger, Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Pt. I: Papers in representation theory, Pap. Workshop L-Functions, Number Theory, Harmonic Anal., Tel-Aviv/Isr. 1989, Isr. Math. Conf. Proc. 2, 267–324, Weizmann, Jerusalem 1990.

[38] J.-L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, Compos. Math. **54** (1985) 173–242.

[39] A. Weil, Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, Acta Math. **113** (1965) 1–87.

[40] S. Yamana, On the Siegel-Weil formula: The case of singular forms, Compos. Math. **147** (2011) 1003–1021.

[41] S. Yamana, On the Siegel-Weil formula for quaternionic unitary groups, Am. J. Math. (to appear)

[42] S. Yamana, L-functions and theta correspondence for classical groups, (preprint)

Theta 対応に現れる Cohomological 表現

早田 孝博　(山形大学)

1　導入

この小文では「コホモロジカル表現」,「導来関手加群 (derived functor module)」,「エー・キュー・ラムダ ($A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$)」 などと呼ばれている実半単純リー群の表現の定義を Knapp-Vogan の教科書

[KV] Anthony W. Knapp and David A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

に従って行うことが目的である (§2, §3). これは保型形式論によく現れる正則離散系列表現を含む表現のクラスである. $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ については, もともと

[VZ] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1):51–90, 1984.

が初期の論文であり, ここで $A_q(\lambda)$ は有限次元表現係数のリー環の相対コホモロジーが消えない表現として定義された. この論文は読みやすく, 実用上も十分なものである. 一方 [KV] においては, まず $(\mathfrak{g}, K)$-加群のカテゴリー $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ 上のいくつかの導来関手を定義し, いろいろな誘導がこれで説明されることを示している. そのうちのひとつが, コホモロジカル・インダクションで, 特に θ-stable 放物型部分対 $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ の一次元表現からの誘導表現が $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ であると構成的に定義している. また必要な基礎知識が Appendix に網羅されていて詳しい. イントロでコホモロジカルな表現を巡る歴史にも触れており, この分野に関する一通りの概観が得られる.

§4 では改めて離散系列表現を導入する. これは結果的には導来関手加群の特別な場合になる. これは

[Kn] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups*, volume 36 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. An overview based on examples.

によった.

§5 では, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の例として $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ の場合を計算した。θ-stable 放物型部分リー環 $\mathfrak{q}$ の分類や付随するルートデータを計算し, 表現の不変量である無限小指標や極小 K-タイプなどをリストアップしてある。

§6 では, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ が現れる例として, Jian-Shu Li の論文

[Li] Jian-Shu Li. Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. *Duke Math. J.*, 61(3):913–937, 1990.

に従い, $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ における Howe 対応をとりあげた. この論文では, 十分レギュラーな離散系列表現に Howe 対応で対応する表現は $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ であることを示している. 方針としては、実形によらず $\mathfrak{g}$-加群としてのみで決まるという無限小指標の対応 [Pr2] および片側コンパクトの場合に帰着させて K-タイプの対応 [松本 2] を見ることにより, Vogan の一意性定理から像が $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ であることを結論付けている. 「十分レギュラー」という条件がついているのは, 行先の $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の正値条件をみたす必要があったからである (この正値条件も後述する 19° より強い). だから §6 の表は完全なものではなく実際にもうすこし条件を緩められ、$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は正値条件を満たさない場合でも, 例えば「離散系列の極限」のような既約なユニタリ表現になることがある. (Sp, O) の Howe 対応のこの場合も計算したものに片側コンパクトのとき [西山], 一般には [P] に記述されている.

リー環のコホモロジーについてはこの記事では触れなかったが, [BW] が成書であり, 一読を薦める.

全体を通してリー環論, 実リー群の表現の用語は [KV] のものを使用したが, 標準的なものだと信じる. この記事がこの分野の学習の一助になれば幸いである.

2 コホモロジカル・インダクション

1°. $\mathfrak{g}$ を複素リー環, K をコンパクト・リー群とする. 次の三条件

1. K のリー環の複素化は $\mathfrak{g}$ の部分リー環である. すなわち $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}\, K \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{g}$.
2. K の $\mathfrak{g}$ 上の作用は $\mathfrak{k}$ 上の随伴作用 Ad_K の延長になっている (同じ記号で書く.)
3. $d(\mathrm{Ad}_K(K)) = \mathrm{ad}(\mathfrak{k}) \subset \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$

を満たすとき, 対 $(\mathfrak{g}, K)$ と記述する.

2°. 二つの対 $(\mathfrak{h}, L)$, $(\mathfrak{g}, K)$ に対し対の射 $\iota\colon (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ とはリー環の準同型 ι_{alg} とリー群の準同型 ι_{gp} の対 $\iota = (\iota_{alg}, \iota_{gp})$ であって

1. $\iota_{alg}|_{\mathfrak{l}} = d\,\iota_{gp}$
2. $\iota_{alg} \circ \mathrm{Ad}_L(l) = \mathrm{Ad}_K(\iota_{gp}(l)) \circ \iota_{alg} \quad (l \in L)$

を満たすものと定義する.

3°. 対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $C(\mathfrak{g}, K)$ を次の条件を満たす対象 V たちから成るカテゴリーであると定義する.

1. V は局所 K-有限な K-加群である.
2. V は $\mathfrak{g}$-加群であって, $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$, $v \in V$ のとき, $k(Xv) = (\mathrm{Ad}(k)X)kv$ が成りたつ.

3. $X \in \mathfrak{k}$ の微分作用は $X \in \mathfrak{g}$ としての作用と一致する.

一般に K-加群 V に対し, $V_K = \{v \in V \mid \dim_{\mathbb{C}} K \cdot v < \infty\}$ を K-有限ベクトルのなす空間とする. すると 1 の条件は $V_K = V$ と書ける.

4°. 対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $U(\mathfrak{g})$ を普遍包絡環, $R(K)$ を K 上の K-有限ディストリビューションのなす集合とするとき, 次で定義される $R(\mathfrak{g}, K)$ をヘッケ環という.

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{g}, K) &:= U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K) \simeq R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \\ &= U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} R(K)/\langle X \cdot w \otimes T - X \otimes w * T \rangle_{X \in U(\mathfrak{g}),\, w \in U(\mathfrak{k}),\, T \in R(K)} \end{aligned}$$

$R(\mathfrak{g}, K)$ が K-有限性から擬単位元を持つので $R(\mathfrak{g}, K)$ は一意に $\mathbb{C}$ 空間になり, 両側 K-有限な環になる. $C(\mathfrak{g}, K)$ は左 $R(\mathfrak{g}, K)$ 加群のカテゴリーと同値になる. すなわち

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(V, W) = \mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{g}, K)}(V, W)$$

5°. $\iota\colon (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$, $Z \in C(\mathfrak{g}, K)$ に対し, 忘却型関手 $F = F^{\mathfrak{h}, L}_{\mathfrak{g}, K}\colon C(\mathfrak{g}, K) \to C(\mathfrak{h}, L)$ を

1. $F(V) = V$
2. $r \cdot v = \iota(r) \cdot v \quad r \in R(\mathfrak{h}, L)$

で定義する. F は 完全共変関手 (exact covariant functor) になる.

6°. 関手 $P = P^{\mathfrak{g}, K}_{\mathfrak{h}, L}\colon C(\mathfrak{h}, L) \to C(\mathfrak{g}, K)$ を

1. $P(V) = R(\mathfrak{g}, K) \otimes_{R(\mathfrak{h}, L)} V$
2. $r \in R(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $r(\omega \otimes v) = (r\omega) \otimes v$

で定義する. P は右完全共変関手 (right exact) になる.

7°. 関手 $I = I^{\mathfrak{g}, K}_{\mathfrak{h}, L}\colon C(\mathfrak{h}, L) \to C(\mathfrak{g}, K)$ を

1. $I(V) = \mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{h}, L)}(R(\mathfrak{g}, K), V)_K$
2. $(r\phi)(x) := \phi(xr) \quad \phi \in I(V),\ r, x \in R(\mathfrak{g}, K)$

で定義する. I は 左完全共変関手 (left exact) になる.

8°. **命題**. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ のとき, $P^{\mathfrak{g}, K}_{\mathfrak{h}, K}, I^{\mathfrak{g}, K}_{\mathfrak{h}, K}$ は完全である.

9°. $V \in C(\mathfrak{h}, L)$ の射影分解

$$\cdots \to X_j \to X_{j-1} \to \cdots \to X_0 \to V \to 0 \quad (\text{完全})$$

を考える. このとき関手 P によって得られる $C(\mathfrak{g}, K)$ の列

$$\cdots \to P(X_j) \overset{\partial_{j-1}}{\to} P(X_{j-1}) \to \cdots \to P(X_0) \to 0$$

を考えたとき, P の導来関手 P_j を $P_j(V) = \mathrm{Ker}(\partial_{j-1})/\mathrm{Im}(\partial_j)$ で定義する. $P_0(V) = P(V)$ である. 同様に入射分解から左完全な I に対し, その導来関手 $I^j(V)$ が定義される.

10°. $\mathfrak{g}$ の実形を $\mathfrak{g}_0$ とする. すなわち $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}$. また $\mathfrak{g}_0$ には $\theta\colon \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ 対合と非退化二次形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathbb{R}$ が付随しているとする. 次の条件を満たすとき, 対 $(\mathfrak{g}, K)$ は簡約対 (reductive pair) であると定義する.

1. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ の $\mathfrak{g}$ への拡張は $\mathrm{Ad}(K)$-不変, また $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-歪対称である.
2. $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0(\theta; 1)$ が成りたつ. また, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0(\theta; -1)$ とおくと, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ である. このとき $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$ はそれぞれ負定値, 正定値である.
3. $\mathfrak{p}_0 \perp \mathfrak{k}_0$ である.

11°. 簡約対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対し, $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ を θ-stable カルタン部分リー環とする. すなわち $\theta(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. (複素) 放物型部分リー環 $\mathfrak{q}$ のレビ分解を $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ とする. $\mathfrak{q}$ が, $\theta\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$ を満たすとき, θ-stable 放物型部分リー環と呼ぶ. θ-stable という性質から $\mathfrak{l}$ は実形 $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ をもつ. $L \cap K$ はリー環 $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ を持つコンパクト部分群である. このとき 対 $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ は 1° を満たし, 特に, (θ-stable) 放物型部分対と呼ぶ. また対 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ は簡約対になる.

12°. $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}_0$ と定める. $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ などでそれぞれのルート系を定める. $\delta_G, \delta_c, \delta_L$ でそれぞれ, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}$ の正ルートの半分和を表わす. また $\Delta(\mathfrak{u})$ で $\mathfrak{u}$ に含まれるルートを表わし, $\delta(\mathfrak{u})$ でその半分和を表わす. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し, $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{a}_0$ 上の値を実と定めることにより, $\mathrm{Re}(\lambda)$ が定義される.

13°. $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ に対し, $Z^\# = Z \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u}$ とおく. $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群として $\wedge^{\mathrm{top}}\mathfrak{u} \simeq \mathbb{C}_{2\delta(\mathfrak{u})}$ である. Z のコホモロジカル・インダクション L_j, R^j を以下のように定義する.

$$L_j(Z) := \left(P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{g},L\cap K}\right)_j \circ P^{\mathfrak{g},L\cap K}_{\bar{\mathfrak{q}},L\cap K} \circ F^{\bar{\mathfrak{q}},L\cap K}_{\mathfrak{l},L\cap K}(Z^\#)$$
$$R^j(Z) := \left(I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{g},L\cap K}\right)^j \circ I^{\mathfrak{g},L\cap K}_{\mathfrak{q},L\cap K} \circ F^{\mathfrak{q},L\cap K}_{\mathfrak{l},L\cap K}(Z^\#)$$

ただし, $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l} + \bar{\mathfrak{u}}$ は逆向き放物型リー環 (opposite) を表す. このとき,

$$L_j(Z), R^j(Z)\colon \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K) \to \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$$

は共に共変関手になる.

14°. **消滅定理** [KV, 5.35]. $S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$ とおく. $j > S$ であれば, $L_j(Z) = R^j(Z) = 0$.

15°. [Kn, §VIII.5]. W_G をワイル群とする. $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は Harish-Chandra 写像

$$\gamma_{\mathfrak{g}}\colon Z(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})^{W_G}$$

により, $U(\mathfrak{h})$ の W_G により固定される元全体と同型になる. よって $\chi\colon Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ は, ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*/W_G$ により,

$$\chi(z) = \chi_\lambda(z) = \lambda(\gamma_{\mathfrak{g}}(z)) \qquad (z \in Z(\mathfrak{g}))$$

と表される. $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ 上 $Z(\mathfrak{g})$ がスカラー χ_λ で作用するとき, V は無限小指標 χ_λ (あるいは単に λ) を持つという.

16°. $\mathfrak{g}_0$ はある実リー群 G のリー環であるとすると $L \subset G$ となるが, このとき,

条件 (5.7)　「L は G の既約連結成分すべてと交わる」

と設定する.

17°.　**定理** [KV, 5.25]. **条件** (5.7) を仮定する. $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ が無限小指標 λ を持つとき, $L_j(Z)$, $R^j(Z) \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ は無限小指標 $\lambda + \delta(\mathfrak{u})$ を持つ.

18°.　**定理** [KV, 5.99]. **条件** (5.7) を仮定する. また $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ が無限小指標 λ を持ち, かつ admissible であるとする. さらに条件

$$\langle \operatorname{Re} \lambda + \delta(\mathfrak{u}) \mid \alpha \rangle \geq 0 \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$$

を満たすならば, $0 \leq j < S$ に対し, $L_j(Z) = R^j(Z) = 0$ であり, さらに (零かもしれないが) $L_S(Z) \simeq R^S(Z)$ が成りたつ.

19°.　**定理** [KV, 8.2]. **条件** (5.7) を仮定する. また $Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ が無限小指標 λ を持つ admissible な既約 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群であるとする. λ が正値条件

正値条件　$$\langle \operatorname{Re} \lambda + \delta(\mathfrak{u}) \mid \alpha \rangle > 0 \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$$

を満たすならば, $L_S(Z) \simeq R^S(Z)$ であり, かつこれらは零でない既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群になる.

3　$A_\mathfrak{q}(\lambda)$

§2 に加えて, 以下の設定を行う. G を連結な簡約実リー群とし, K をその極大コンパクト部分群とする. また, $\mathfrak{t}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の極大可換部分リー環とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{t}$ を含む θ-stable カルタン部分代数とする. 前 § に従って, 簡約対 $(\mathfrak{g}, K)$ および放物型部分対 $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ を考える. $\Delta(\mathfrak{u})$ が正になるように $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の正系を定める. 連結にとったので, **条件** (5.7) は満たされる.

20°.　$Z \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$ として, 最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が $\langle \lambda \mid \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \rangle = 0$ をみたす 1 次元 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群 $\mathbb{C}_\lambda$ をとる. $\mathbb{C}_\lambda$ は無限小指標 $\lambda + \delta_L$ を持つ. このとき,

$$A_\mathfrak{q}(\lambda) := L_S(\mathbb{C}_\lambda), \quad A^\mathfrak{q}(\lambda) := R^S(\mathbb{C}_\lambda)$$

と定義する.

21°.　**系** [KV, 5.109]. 上の条件のもと,

1. $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は無限小指標 $\lambda + \delta_G$ を持つ.
2. λ が**正値条件**

$$\langle \operatorname{Re} \lambda + \delta(\mathfrak{u}) \mid \alpha \rangle > 0 \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$$

を満たすならば, $A_\mathfrak{q}(\lambda) \simeq A^\mathfrak{q}(\lambda)$ は既約かつ非零になる.

22°.　$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V において, K-加群としての V に現れる K の既約表現を K-タイプという. 最高ウェイトが $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ の K-タイプが極小 K-タイプであるとは, $\sqrt{\langle \mu + 2\delta_c \mid \mu + 2\delta_c \rangle}$ が極小である, と定義する.

23°.　**定理** [KV, 9.70,10.24]. 上の条件のもと,

1. $\lambda|_{\mathfrak{t}_0}$ が実, $\lambda|_{\mathfrak{a}_0}$ が純虚ならば, ユニタリ化可能.
2. $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の K-タイプの最高ウェイトは λ をワイル元で動かしてうまく $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ に関して正にとることにより,
$$\lambda + 2\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})} n_\alpha \alpha \quad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$
の形で表される. 特に極小 K-タイプは $\lambda + 2\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ の最高ウェイトを持つ.

24°. **注意**. 23° の K-タイプの公式は $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ にのみ依存している. したがって二つの異なる $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ であっても $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ が同じであれば $A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \simeq A_{\mathfrak{q}'}(\lambda)$ である.

4 離散系列表現

記号, 設定などは §3 を引き継ぐ. ただし G の中心はコンパクトと仮定する.

25°. G の既約ユニタリ表現 D に対し K-有限ベクトル全体 D_K は $(\mathfrak{g}, K)$ 加群である. $v, w \in D_K$, $x \in G$ に対しユニタリ内積に関しての行列係数 $\langle x \cdot v, w \rangle$ が G 上の二乗可積分関数であるとき, D を離散系列表現という. $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 D_K も乱用して離散系列表現と呼ぶ.

26°. **離散系列表現の存在定理** [Kn, 12.20]. 離散系列 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群が存在する必要十分条件は G がコンパクトカルタン部分群を持つことである. すなわち $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$.

27°. 25° のもと,「**ランク条件** $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$」を, 以下仮定する.

28°. **定理** [Kn, 9.20]. $\mu \in (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ を固定する. $\mu > 0$ となるような正系をとる. $\Lambda = \mu + \delta_G - 2\delta_c$ が K の最高ウェイトの生成する格子に入ると仮定する. もし μ が非特異ならば, つまり, ワイルの壁にのっていないならば次の三条件で特徴付けられる離散系列 D_μ が一意に存在する.

1. D_μ の無限小指標は μ である.
2. D_μ はただひとつの極小 K-タイプ Λ を重複度 1 で持つ.
3. D_μ の K-タイプは
$$\Lambda + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}),\, \alpha > 0} n_\alpha \alpha \qquad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$
の形に表される.

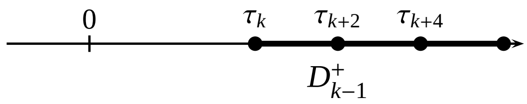
29°. W_G, W_K をそれぞれ G, K のワイル群とする. このとき $D_\mu \simeq D_{\mu'}$ となるのは $\mu = w\mu'$ となる $w \in W_K$ が存在するときに限る. このことと 15° により, 特に, 同じ無限小指標 μ を持つ互いに同型でない離散系列は $|W_G/W_K|$ 個存在する.

30°. 離散系列 D_μ において, μ を Harish-Chandra パラメータという. また, Λ を Blattner パラメータという.

一般に, $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ の無限小指標を HC = HC(V) と表し, 極小 K-タイプを BL = BL(V) と表すことにする. すると HC(D_μ) = μ, BL(D_μ) = Λ である. また, HC($A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$) = $\lambda + \delta_G$ (21°), BL($A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$) = $\lambda + 2\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ (23°) である.

31°. **例**: $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ とする. $K = SO(2)$ であり $\tau_k(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}) = e^{ik\theta}$ とおく. $\delta_G = 1$ である. 同じ無限小指標 μ を持つ離散系列表現は $|W_G/\{1\}| = 2$ 個ある. $k \geq 2$ として

$$D^+_{k-1} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tau_{k+2l}, \quad D^-_{k-1} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tau_{-k-2l},$$



を考えると $\mathrm{HC}(D^\pm_{k-1}) = \pm(k-1)$, $BL(D^\pm_{k-1}) = \pm k$ となる. (無限小指標を $(k-1)$ と書いても $-(k-1)$ と書いてもワイル群で同値なので指標としては変らないのだが、28° により、HC は正系を考慮したものにしている.)

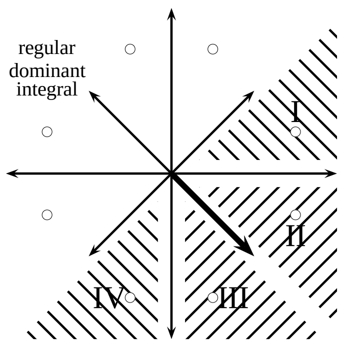
32°. **例**: $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ とする. $K \simeq U(2)$ となる. $\mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}(K)$ より G は**ランク条件** を満し離散系列表現を持つ. $|W_G/W_K| = 4$ である. G は C_2-ルート系 $\{\pm(e_1 \pm e_2), \pm 2e_1, \pm 2e_2\}$ を持つ. コンパクト正ルートを $e_1 - e_2$ と固定する. $(k_1, k_2) \to k_1e_1 + k_2e_2$ で $\mathbb{R}^2$ と $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ を右図のように同一視する. 最高ウェイト $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ の K-タイプは $\mathrm{sym}^{\Lambda_1-\Lambda_2} \otimes \det^{\Lambda_2}$ になる.

(I). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{I}$ のとき, $\delta_G = (2, 1)$, $\delta_c = (1/2, -1/2)$ より $\Lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2 + 2)$.

(II). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{II}$ のとき, $\delta_G = (2, -1)$, $\Lambda = (\mu_1 + 1, \mu_2)$.

(III). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{III}$ のとき, $\delta_G = (1, -2)$, $\Lambda = (\mu_1, \mu_2 - 1)$.

(IV). $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{IV}$ のとき, $\delta_G = (-1, -2)$, $\Lambda = (\mu_1 - 2, \mu_2 - 1)$.



33°. **定理** [KV, 11.178]. **ランク条件** のもと, $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ は $\mathfrak{q}$ がボレル部分群 $\mathfrak{b}$ であるとき, つまり $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}$ であるとき離散系列 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群になる. またすべてのボレル部分群を動かすことにより離散系列は $A_\mathfrak{b}(\lambda)$ で尽される.

5 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の導来関手加群

ここでは $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ とする. **ランク条件** が成立しているので, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ である. 32° の設定を継続し $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ は $\mathbb{R}^2$ と同一視する. 23°(2) より, $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ の正系は固定してよい.

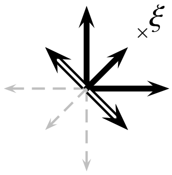
34°. θ-stable 放物型部分リー環 $\mathfrak{q}$ は次のようにして得られる. $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対し, $\mathfrak{g}_\alpha$ をルート空間とする. $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ の正系に関して非負な $\xi \in (\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ をとる毎に次のように $\mathfrak{q}$ を構成する.

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \qquad (\text{複素})$$
$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\, \langle\alpha,\xi\rangle=0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{u} = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\, \langle\alpha,\xi\rangle>0} \mathfrak{g}_\alpha$$

実際は ξ が同じワイルの部屋, または境界成分に入っていると同じ $\mathfrak{q}$ を定める. 特に $\xi = 0$ のとき, $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ となる. 35°～44° により $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の θ-stable 放物型部分リー環 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ はすべて尽くされる.

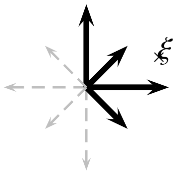
35°. $\mathfrak{q} = Q^{3,0}_{(0)}$
$L = K, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(0,2)} = \mathfrak{p}_+$

$\delta_G = (2, 1)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$



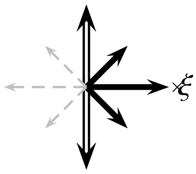
36°. $\mathfrak{q} = Q^{3,0}$
$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (2, 1)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$



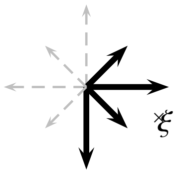
37°. $\mathfrak{q} = Q^{2,0}$
$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_{(0,2)} + \mathfrak{g}_{(0,-2)}$
$L \simeq U(1) \times \mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (2, 1)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$



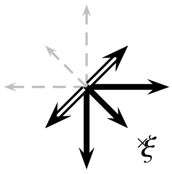
38°. $\mathfrak{q} = Q^{2,1}$
$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(0,2)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (2, -1)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$



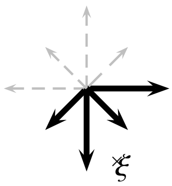
39°. $\mathfrak{q} = Q^{1,1}$
$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_{(1,1)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)}$
$L \simeq U(1) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)} + \mathfrak{g}_{(0,-2)}$

$\delta_G = (2, -1)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (1, -1)$



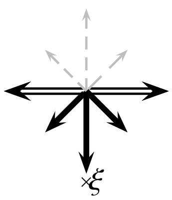
40°. $\mathfrak{q} = Q^{1,2}$
$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)} + \mathfrak{g}_{(0,-2)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)}$

$\delta_G = (1, -2)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$



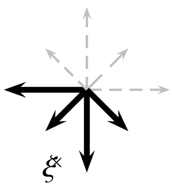
41°. $\mathfrak{q} = Q^{0,2}$
$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_{(2,0)} + \mathfrak{g}_{(-2,0)}$
$L \simeq \mathrm{Sp}(1, \mathbb{R}) \times U(1)$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(0,-2)} + \mathfrak{g}_{(1,-1)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)}$

$\delta_G = (-1, -2)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$



42°. $\mathfrak{q} = Q^{0,3}$
$L = T, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{t}$
$\mathfrak{u} = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{g}_{(1,-1)}$

$\delta_G = (-1, -2)$
$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$



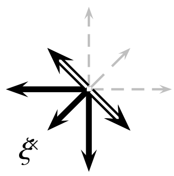
43°. $\mathfrak{q} = Q^{0,3}_{(0)}$

$L = K, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$

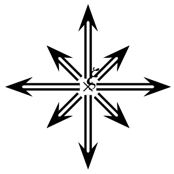
$\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{(0,-2)} + \mathfrak{g}_{(-1,-1)} + \mathfrak{g}_{(-2,0)}$
$\quad = \mathfrak{p}_-$

$\delta_G = (-1, -2)$

$\delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = (-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2})$



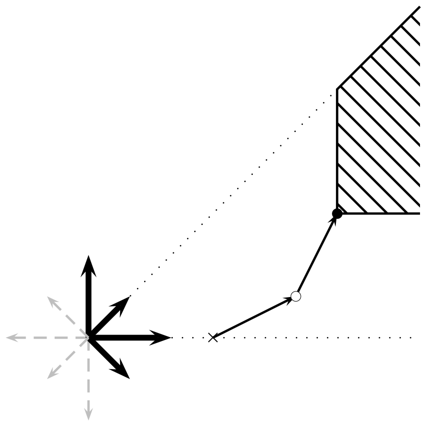
44°. $\mathfrak{q} = Q^{0,0}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{g}, \quad L = G$



45°. 次に, $Sp(2, \mathbb{R})$ の $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ を求める. 都合上 $\lambda := \mathrm{AQ}(A_\mathfrak{q}(\lambda))$ と定める. $\mathbb{C}_\lambda$ は L の一次元表現であり, $\langle \lambda \mid \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \rangle = 0$ であった (20°). λ が**正値条件** を満たすときそれぞれの θ-stable $\mathfrak{q}$ の $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ の無限小指標 (白丸), 極小 K- タイプ (黒丸) および K-タイプの最高ウェイト格子上の分布 (斜線部) を, 46°～49° に, 図示した. なお, 24° より, $q = Q^{3,0}_{(0)}$ のときは $q = Q^{3,0}$ と, $q = Q^{0,3}_{(0)}$ のときは $q = Q^{0,3}$ と同じ $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ を与える. また, $q = Q^{0,0} = \mathfrak{g}$ のときは単位表現になる. さらに $q = Q^{i,j}$ と $Q^{j,i}$ は互いに反傾関係であるため, $\mathbb{R}^2$ 内の各パラメータは $(x, y) \mapsto (-y, -x)$ で読みとることができる (46°,47°,48°). 49° は自己双対的である。

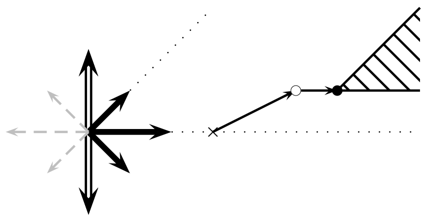
46°. $\mathfrak{q} = Q^{3,0}$ のとき,

AQ : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$
HC : $\lambda + (2, 1)$
BL : $\lambda + (3, 3)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$: 正則離散系列表現



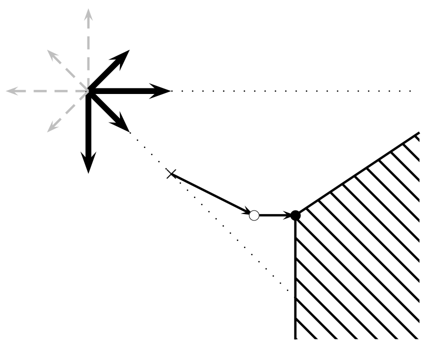
47°. $\mathfrak{q} = Q^{2,0}$ のとき,

AQ : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1),\ \lambda_1 \geq -1$
HC : $\lambda + (2, 1)$
BL : $\lambda + (3, 1)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$: ユニタリ最高ウェイト表現

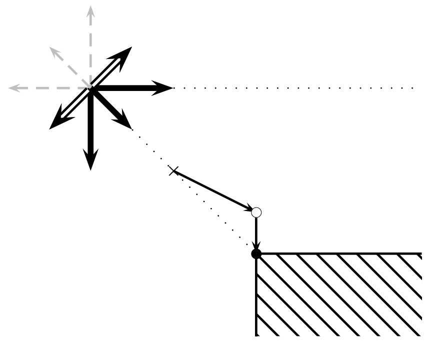


48°. $\mathfrak{q} = Q^{2,1}$ のとき

AQ : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq -\lambda_2 \geq 0$
HC : $\lambda + (2, -1)$
BL : $\lambda + (3, -1)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$: 大離散系列表現



49°. $\mathfrak{q} = Q^{1,1}$ のとき,



AQ : $\lambda = (\lambda_1, -\lambda_1)$, $\lambda_1 \geq -1$
HC : $\lambda + (2, -1)$
BL : $\lambda + (2, -2)$
$A_\mathfrak{q}(\lambda)$: non-tempered 表現

6 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ の Howe 対応

50°. Howe 対応の記号を整理する. Howe 対応については [松本 2] を参照のこと. $G_1, G_2 \subset \mathrm{Sp}$ を dual pair とし, $(\omega, \mathcal{P})$ を Sp の Fock モデル (=Weil 表現の $(\mathfrak{g}, K)$-加群) とする.

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}_i, \tilde{K}_i, \mathcal{P}) = \{V\colon \text{既約 } (\mathfrak{g}_i, \tilde{K}_i) \text{ 加群} \mid V \text{ は } \mathcal{P} \text{ の商加群 }\}$$

で定義すると, Howe 対応 $V_2 = \theta(V_1)$ とは次の全単射である.

$$\begin{aligned} \theta\colon \mathcal{R}(\mathfrak{g}_1, \tilde{K}_1, \mathcal{P}) \ni V_1 \leftrightarrow V_2 \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}_2, \tilde{K}_2, \mathcal{P})\colon \ \text{全単射} \\ \text{by } \ V_1 \otimes V_2 \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2, \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_2, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

ここでは, 片側が $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ の場合の Howe 対応をここまで用意したパラメータを利用して記述する. “even case” のとき,

$$G_1 = O(4),\ O(2),\ O(2,2), \qquad G_2 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}),$$

の dual pair を考える. また, $SO_0(3,2) \simeq \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ とみることができるので

$$G_1 = \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}), \qquad G_2 = O(3,2)$$

の dual pair を考える. この場合に, [Li, 6.2] を適用する.

51°. $G_1 = O(4), G_2 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ のとき. V_1 は有限次元表現. $V_2 = \theta(V_1)$ は正則離散系列表現になる.

	V_1 of $O(4)$	V_2 of $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$
HC	(a_1, a_2)	(a_1, a_2)
	$(a_1 > a_2 \geq 1)$	
BL	$(a_1 - 1, a_2)$	$(a_1 + 1, a_2 + 2)$
AQ		$(a_1 - 2, a_2 - 1)$
$\mathfrak{q}$		$Q^{3,0}$

52°. $G_1 = O(2), G_2 = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ のとき. V_1 は二次元既約表現. V_2 は離散系列ではないユニタリ最

高ウェイト表現になる.

	V_1 of $O(2)$	V_2 of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$
HC	a_1	$(a_1, 1)$
	$(a_1 \geq 2)$	
BL	a_1	$(a_1 + 1, 1)$
AQ		$(a_1 - 2, 0)$
$\mathfrak{q}$		$Q^{2,0}$

53°. $G_1 = O(2,2)$, $G_2 = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ のとき. V_1 は HC が (a,b) の「正則離散系列表現」であって、その極小 K-タイプは 4 次元既約表現 $\mathrm{Ind}_{K_1^\circ}^{K_1} \tau_{a+1} \boxtimes \tau_b$ となるもの (31°) である. $V_2 = \theta(V_1)$ は大離散系列表現になる.

	V_1 of $O(2,2)$	V_2 of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$
HC	(a,b)	$(a,-b)$
	$(a > b \geq 1)$	
BL	$(a+1,b)$	$(a+1,-b)$
AQ		$(a-2, 1-b)$
$\mathfrak{q}$		$Q^{2,1}$

54°. $G_1 = \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, $G_2 = \mathrm{Sp}(2,R) \sim SO_0(3,2) \subset O(3,2)$ のとき. V_1 は「genuine」な離散系列表現, $V_2 = \theta(V_1)$ はパラメータによって,「スカラー」正則離散系列または non-tempered な $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ になる.

	V_1 of $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$	V_2 of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$
HC	$a - 1/2$	$(a, -a+1)$
	$(a \geq 2)$	
BL	$a + 1/2$	$(a, -a)$
AQ		$(a-2, 2-a)$
$\mathfrak{q}$		$Q^{1,1}$

	V_1 of $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$	V_2 of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$
HC	$-b + 1/2$	$(b, b-1)$
	$(b \geq 2)$	
BL	$-b - 1/2$	$(b+1, b+1)$
AQ		$(b-2, b-2)$
$\mathfrak{q}$		$Q^{3,0}_{(0)}$

参考文献

[西山] 西山 享、「Reductive Dual Pair と Weil 表現」 第 4 回整数論サマースクール報告集, p.63–88, 1996.

[松本 1] 松本 久義、「Howe Duality の解説」 第 4 回整数論サマースクール報告集, p.151–168, 1996.

[松本 2] ———, 「Weil 表現と Howe duality」, この報告集.

[BW] A. Borel and N. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 67 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2000.

[Kn] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups*, volume 36 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. An overview based on examples.

[KV] Anthony W. Knapp and David A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Li] Jian-Shu Li. *Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. Duke Math. J.*, 61(3):913–937, 1990.

[M] C. Mœglin. *Correspondance de Howe pour les paires reductives duales: quelques calculs dans le cas archimédien. J. Funct. Anal.*, 85(1):1–85, 1989.

[P] Annegret Paul. *On the Howe correspondence for symplectic-orthogonal dual pairs. J. Funct. Anal.*, 228(2):270–310, 2005.

[Pr1] Tomasz Przebinda. *The oscillator duality correspondence for the pair* $\mathrm{O}(2,2)$, $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 79(403):x+105, 1989.

[Pr2] Tomasz Przebinda. *The duality correspondence of infinitesimal characters. Colloq. Math.*, 70(1):93–102, 1996.

[VZ] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. *Unitary representations with nonzero cohomology. Compositio Math.*, 53(1):51–90, 1984.

二つの楕円保型形式から重さ半整数 Siegel 保型形式へのリフト*

林田秀一
(大阪大学インターナショナルカレッジ)

0 要旨

0.1 内容

k を自然数としたとき、重さ $2k-2$ と重さ $2k-4$ の楕円保型形式から重さ $k-\frac{1}{2}$ の次数 2 のジーゲル保型形式へのリフトが、伊吹山-林田 [HI 05] で予想されていた。特にこのリフトの行き先のジーゲル保型形式は、次数 2 のプラス空間に属する。ここで、プラス空間とは、Kohnen plus 空間の高次元への拡張であり、レベル 1 に相当する空間である。（普通、重さ半整数のジーゲル保型形式を考える場合は、レベルが 4 で割り切れる必要があるが、プラス空間は部分空間であり、ニューホームの空間にあたる空間である。）

このリフトの予想を部分的 (k が偶数で、かつ構成したジーゲル保型形式が消えないという仮定の下) に証明したので、この論説ではその証明について解説を行いたい。

0.2 証明の方針

２つの楕円保型形式から次数２の重さ半整数のジーゲル保型形式を構成する方法は、重さ半整数の場合での宮脇-池田リフト (cf. 池田 [Ik 06]) の構成の類似により与えられる（この構成法は池田保氏のご指摘による）。構成には、Duke-Imamoglu-伊吹山-池田リフト (以下、池田リフトと略す)、フーリエ・ヤコビ展開、指数 1 のヤコビ形式と重さ半整数のジーゲル保型形式との対応、の３つを用いる。この構成した重さ半整数のジーゲル保型形式が、ヘッケ作用素の同時固有関数となるという事実を、マース関係式を一般化することにより証明する。つまり、次数 3 の重さ半整数のジーゲル保型形式に対し、フーリエ・

* 第 19 回整数論サマースクール 2011 年 9 月 9 日 報告集原稿。

ヤコビ係数の間の関係式を示す。

謝辞：オーガナイザーの軍司圭一さん、成田宏秋さんには、講演の機会を頂き、またサマースクールの期間を通じて大変お世話になりました。深く感謝いたします。

1 マース関係式

1.1 ヤコビ形式とマース関係式

ジーゲル保型形式の定義については、報告集の軍司 [Gu 11a] を参照されたい。楕円保型形式から次数 2 のジーゲル保型形式へのリフトで斎藤・黒川リフトというのがある。H. Saito と N. Kurokawa[Ku 78] により独立に予想され、H. Maass、A. Andrianov、D. Zagier (cf. [EZ 85]) により証明が与えられた。そのリフトは、間に重さ半整数の一変数保型形式の空間と指数 1 のヤコビ形式の空間を経由することにより証明が与えられている。記号で書くと次の通りである。k を偶数とすると、次の 3 つの同型を得る

$$S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \cong S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)) \cong J^{(1)\,cusp}_{k,1} \cong S_k^{Maass}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$$

ここで、$S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ は、重さ k の Kohnen プラス空間で、$J^{(1)\,cusp}_{k,1}$ は次数 1 かつ指数 1 で重さ k のヤコビ尖点形式の空間 (ただしレベルは 1)、更に、$S_k^{Maass}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ はマース空間である。それぞれの空間の定義については、報告集の坂田 [Sk 11]、高瀬 [Tk 11]、伊吹山 [Ib 11] などを参照されたい。特に、上記の 3 つの同型写像はそれぞれの空間のヘッケ作用素の作用と可換である。(ただし、一番左の志村対応は、k が奇数でも成り立つ。)

マース関係式とは、次数 2 のジーゲル保型形式のフーリエ係数の間の関係式である。$F \in S_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ を次数 2 のジーゲル尖点形式とし、$F(Z) = \sum_N A(N) exp(2\pi i \mathrm{tr}(NZ))$ を F のフーリエ展開とする。F がマース関係式を満たすとは、任意の半整数対称行列 $\begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix}$ に対して、関係式

$$A\left(\begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix}\right) = \sum_{d|(n,m,r)} d^{k-1} A\left(\begin{pmatrix} \frac{nm}{d^2} & \frac{r}{2d} \\ \frac{r}{2d} & 1 \end{pmatrix}\right).$$

を満たすときにいう。マース関係式を満たす重さ k のジーゲル尖点形式のなす部分空間を $S_k^{Maass}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ と表した。次数 2 のジーゲル・アイゼンシュタイン級数は尖点形式ではないが、この関係式を満たす。

自然数 l に対し、V_l、U_l をそれぞれヤコビ形式の指数を l、l^2 倍する作用素とする。(ヤコビ形式および V_l、U_l の定義については [EZ 85, p.41]、あるいは報告集の伊吹山 [Ib 11]、

菅野 [Su 11]、青木 [Ao 11] を参照されたい。) $M_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$、$S_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ をそれぞれ、重さ k の次数 2 のジーゲル保型形式とジーゲル尖点形式のなすベクトル空間とする。

$F \in M_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ を重さ k の次数 2 のジーゲル保型形式とし、そのフーリエ・ヤコビ展開を

$$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_m \psi_m(\tau, z) q^m$$

とする。ここで、$q := e^{2\pi i m\omega}$ とおいた。ϕ_m は重さ k で指数 m のヤコビ形式である。

V_l の定義より、次の補題が従う。

補題 1.1. F がマース関係式を満たす必要十分条件は、任意の自然数 m に対し

$$\psi_m = \psi_1 | V_m$$

を満たすことである。(この両辺のフーリエ係数を見比べたものがマース関係式である。)

補題 1.2. F がマース関係式を満たす必要十分条件は、任意の自然数 m と任意の素数 p に対し、

$$\psi_m | V_p = \psi_{mp} + p^{k-1} \phi_{\frac{m}{p}} | U_p$$

を満たすことである。

証明. 補題 1.1 と V_m の結合の関係式 $V_m \circ V_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} V_{\frac{mn}{d^2}} \circ U_d$ より従う。(この関係式の証明は [EZ 85, p.43] 参照 (ちなみに、[EZ 85, p.43] の式 (10) 左辺の $U_{l'}$ は $V_{l'}$ の誤植)。V_n, U_d 達を作用させた後のフーリエ係数を見比べることで得られる。) □

自然数 l に対し $T(l)$ を $S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ に作用するよく知られたヘッケ作用素とする。

補題 1.3. ϕ を重さ k、指数 m のヤコビ尖点形式とするとき、次の二点を満たす。

(1) $\phi(\tau, 0) \in S_k(SL(2,\mathbb{Z}))$

(2) 任意の自然数 l に対し、$(\phi|V_l)(\tau, 0) = (\phi(\tau,0))|_k T(l)$

証明. これらは定義より直接得られる。 □

1.2 Pullback

次に、マース空間に属する次数 2 のジーゲル保型形式の pullback について述べたい。記号 $\mathfrak{H}_n$ を n 次のジーゲル上半空間とする。

$F \in M_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ を重さ k の次数 2 のジーゲル保型形式とする。F の $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ での pullback を考えると、$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)$ は τ の関数として楕円保型形式であり、ω の関数としても楕円保型形式である。ω を固定し、$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)$ を τ の関数とみて、その展開を

$$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_i u_i(\tau) f_i(\omega) \tag{1.1}$$

とする。ここで、$\{f_i\}_i$ は $M_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ のヘッケ作用素の同時固有関数達の基底とする。$\{f_i\}_i$ が直交基底であることより、$\{u_i\}_i$ は一意に定まる。更に、F がジーゲル保型形式の変換公式を満たすことより、各 u_i は重さ k の楕円保型形式となる (ただし、ヘッケ作用素の同時固有関数とは限らない)。

恒等式 $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix}\omega & z\\ z & \tau\end{smallmatrix}\right)$ を考慮すると、pullback により、写像

$$M_k(Sp(2\mathbb{Z})) \to (M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{sym}$$

が得られる。つまり、$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum\limits_{i,j} C_{i,j}(F)\, f_i(\tau) f_j(\omega)$ と書いた時に、行列 $\left(C_{i,j}(F)\right)_{i,j}$ は対称行列である。

今、更に F がマース関係式を満たすと仮定する。補題 1.2 と補題 1.3 の (2) より、任意の自然数 m と任意の素数 p に対し、

$$\psi_m(\tau,0)|T(p) = \psi_{mp}(\tau,0) + p^{k-1}\psi_{\frac{m}{p}}(\tau,0)$$

となる。この両辺に q^m を掛けて、m について和をとることで、

$$\begin{aligned} F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p) &= \sum_m (\psi_m(\tau,0)|T(p)) q^m \\ &= \sum_m (\psi_{mp}(\tau,0) + p^{k-1}\psi_{\frac{m}{p}}(\tau,0)) q^m \\ &= F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\omega T(p) \end{aligned}$$

を得る。ここで、上記において $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p)$ は $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)$ を τ の関数と見てヘッケ作用素 $T(p)$ を、$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\omega T(p)$ は $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)$ を ω の関数と見てヘッケ作用素 $T(p)$ を作用させている。(最後の等式は、楕円保型形式のヘッケ作用素が、$(\sum\limits_m a_m q^m)|_k T(p) = \sum\limits_m (a_{mp} + p^{k-1} a_{\frac{m}{p}}) q^m$ で与えられることによる。) よって、

$$\sum_i (u_i|T(p))(\tau)\, f_i(\omega) = F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p) = \sum_i u_i(\tau) a_i(p) f_i(\omega)$$

となる。ここで、$a_i(p)$ は f_i の p 番目のフーリエ係数である。すなわち、任意の素数 p に対し、$u_i|T(p) = a_i(p)f_i$ であり、$u_i = C_{i,i}(F)f_i$ となる。つまり、F がマース関係式を満たす場合は、

$$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_i C_{i,i}(F)f_i(\tau)f_j(\omega)$$

である。(これは F 自体が次数 2 のジーゲル保型形式として、ヘッケ作用素の同時固有関数でなくても成り立つ。) つまり、pullback により線形写像

$$M_k^{Maass}(Sp(2,\mathbb{Z})) \to (M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{diag} \tag{1.2}$$

が得られる。ここで、上記の $(M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{diag}$ は、$M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ の部分空間で、$\sum_{i,j} C_{i,j}f_i \otimes f_j \in M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ の $(C_{i,j})_{i,j}$ が対角行列となる空間である。

Remark. 次の事柄が既に知られている。

1. 写像 (*1.2*) は、マース関係式から直接導くこともできる (市野 [*Ic 05*, *Lemma*1.1] 参照)。
2. F をマース空間に属するジーゲル保型形式でヘッケ作用素の同時固有関数としたときに、上記の $C_{i,i}(F)$ の絶対値は、6 次のオイラー因子を持つある L-関数の特殊値などを使って記述できる (市野 [*Ic 05*, *Theorem*2.1] 参照)。
3. $F \in M_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ の *pullback* が $(M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{diag}$ に入ったとしても、F がマース空間に属するとは限らないが、$F\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right)\right)$ の z に関するマクローリン展開の係数達 (τ, ω の関数達) が、微分作用素に関するある適当な条件を満たすときに、F はマース空間に属する (*Heim*[*He 10*] 参照)。

この論説では、次数 2 の重さ整数のジーゲル保型形式の代わりに、次数 3 の重さ半整数のジーゲル保型形式でこれと同様のことを考察する。つまり、次数 3 の重さ半整数のある良いジーゲル保型形式を対角成分に制限し、次数 1 と次数 2 のジーゲル保型形式（ただし重さ半整数）の対称性にあたる性質を導く。その事実から、２つの楕円保型形式から重さ半整数の次数 2 のジーゲル保型形式へのリフティングが得られることになる。

2 主結果

群 $\Gamma_0^{(n)}(4)$ をシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \subset M_{2n,2n}(\mathbb{Z})$ の部分群で、$\Gamma_0^{(n)}(4) := \{\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right) \mid C \equiv 0_n \bmod 4\}$ とおく。$M_{k-\frac{1}{2}}^{+}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ を次数 n の一般化プラス空間とする。

$M^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ は次数 n で重さ $k-\frac{1}{2}$ のジーゲル保型形式のなす空間の部分空間である。k を偶数としたとき、次数 n で重さ k かつ指数 1 のヤコビ形式のなす空間 $J^{(n)}_{k,1}$ と $M^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ の同型対応が成り立つ。(この同型は Eicher-Zagier[EZ 85] $n=1$、伊吹山 [Ib 92] $n>1$ により与えられた。また、表現論的な解釈が高瀬 [Tk 99] で与えられている。報告集の高瀬 [Tk 11] を参照されたい。)

次のリフティング予想は、伊吹山-林田 [HI 05] により与えられていた。

予想 1 ([HI 05])**.** k を自然数とし、f と g をそれぞれ重さ $2k-2$ と $2k-4$ の正規化された楕円保型形式でヘッケ作用素の同時固有関数とする。この時、$\mathcal{F}_{f,g}\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ で、ヘッケ作用素の同時固有関数となるものが存在し、その L-関数は

$$L(s,\mathcal{F}_{f,g})=L(s,f)L(s-1,g)$$

を満たす。

ここで、重さ半整数のジーゲル保型形式の L-関数は、Zhuravlev [Zh 84] により与えられている。その L-関数は次で与えられる。F を次数 n のジーゲル保型形式でヘッケ作用素の同時固有関数とし、$\{\alpha^{\pm}_{i,p}\}$ を F の p-parameter とした時に、

$$L(s,F):=\prod_p\prod_{i=1}^n\left\{\left(1-\alpha_{i,p}p^{-s+k-3/2}\right)\left(1-\alpha_{i,p}^{-1}p^{-s+k-3/2}\right)\right\}^{-1}$$

で定義する。ただし、上記の積で p は F のレベル N を割らないところをはしるとする。プラス空間の場合は、指数 1 でレベル 1 のヤコビ形式の空間と同型となるので、そちらからヘッケ作用素を引用する。つまり、プラス空間に属するジーゲル保型形式の場合は、上記の無限積はすべての素数 p をとることとする。$L(s,f)$ および $L(s,g)$ は、それぞれ f と g のよく知られたヘッケの保型 L-関数である。

上記の予想は、オイラー因子の具体的な数値計算に根拠があった。(この予想の数値計算や次数 2 のプラス空間の構造定理、および吉田リフトとの関連などに関しては、[HI 02] にも解説があるので、興味のある方はそちらも参照されたい。尚、伊吹山知義氏により、次数 2 のジーゲル保型形式での志村対応型予想 [Ib 08] が立てられているが、そこに出てくる次数 2 のプラス空間は Nebentype (指標付き) のベクトル値の空間であり、上記の予想 1 のプラス空間はスカラー値の Haupttype (指標無し) の空間であるので、予想 1 と [Ib 08] の志村対応型予想の直接の関係はない。)

次の定理が、表題のリフティングである。

定理 2.1. k が偶数の時、上記の予想 1 の f と g から $\mathcal{F}_{f,g} \in S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を構成することができ、$\mathcal{F}_{f,g} \neq 0$ であれば、$\mathcal{F}$ はヘッケ作用素の同時固有関数で、その *Zhuravlev* L-関数は、予想 *1* の中の等式を満たす。即ち、$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) = L(s-1, g)\, L(s, f)$ である。

3 $\mathcal{F}_{f,g}$ の構成

この節では、定理 2.1 の $\mathcal{F}_{f,g}$ の構成について解説する。筆者はこの構成を池田保氏よりご指摘頂いた。

k を偶数とし、$g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ をヘッケ作用素の同時固有関数で正規化された尖点形式とする。ここで、正規化という意味は、$g = \sum_m b(m)\, q^m$ とフーリエ展開した時に、$b(1) = 1$ となることである。池田リフトを用いて、g から $I(g) \in S_k(Sp(4,\mathbb{Z}))$ を構成する。(k が偶数という条件はここで必要。) $I(g)$ は次数 4 のジーゲル尖点形式であり、ヘッケ作用素の同時固有関数となる。$I(g)$ の 1 番目のフーリエ・ヤコビ係数を $I_1(g)$ とする。つまり、

$$I(g)\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^t z & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} (I_m(g)(\tau, z)) e^{2\pi i m \omega}$$

(ここで $\tau \in \mathfrak{H}_3,\ \omega \in \mathfrak{H}_1,\ z \in M_{3,1}(\mathbb{C})$) と $I(g)$ をフーリエ・ヤコビ展開したときに、各 $I_m(g)$ は次数 3、重さ k、指数 m のヤコビ尖点形式となるが、$I_1(g)$ だけ取り出す。重さ $k - \frac{1}{2}$ の次数 3 のジーゲル尖点形式で、$I_1(g)$ と対応するものが存在する。このジーゲル尖点形式を G とする。まとめると、以下の通りである。

$$g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \to I(g) \in S_k(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})) \to I_1(g) \in J^{(3)\, cusp}_{k,1} \to G \in S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$$

ここで、$J^{(3)\, cusp}_{k,1}$ は重さ k、指数 1、次数 3 のヤコビ尖点形式のなす空間とした。

Remark. 講演の際に、吉田敬之氏により、$I_1(g)$ が恒等的にゼロでないかどうか、質問を受けた。$I_1(g)$ は恒等的にはゼロではない ([*Ha 11a*] 参照)、しかし、一般に $S_k(Sp(n,\mathbb{Z}))$ に属するヘッケ作用素の同時固有関数の $1st$ フーリエ・ヤコビ係数がゼロでないかどうかという問題の答えは、まだ知られていない。特に $n = 2$ の場合、つまり次数 2 の $S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ の場合は、*Kohnen-Skoruppa* [*KS 89*] の結果により、$1st$ フーリエ・ヤコビ係数の非零がいえれば、その次数 2 のジーゲル保型形式のスピノル L-関数の解析接続と関数等式の別証明が与えられることになり、重要である。講演の際に述べることはできなかったが、ここで吉田氏に感謝したい。

埋め込み $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_3$ による G の pullback を考える。

$$G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_h \mathcal{F}_{h,,g}(\tau)h(\omega) \tag{3.1}$$

ここで、$\tau \in \mathfrak{H}_2$、$\omega \in \mathfrak{H}_1$ で上記の和の h は $S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ のヘッケ作用素の同時固有関数で、基底をはしる。

上記で $g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ から $G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$ を構成したが、一方において、$f \in S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ からは志村対応で f に対応する $\hat{f} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ が存在する。そこで、上記 (3.1) の G の展開を用いて、

$$\mathcal{F}_{f,g} := \mathcal{F}_{\hat{f},g}$$

と定めることにする。$\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ となることは、G の保型性と、プラス空間の定義から分かる。これにより、k が偶数の場合は、写像

$$S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \otimes S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \to S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4)) \qquad ((f,g) \mapsto \mathcal{F}_{f,g})$$

が得られる。

Remark. 上記の写像は、$S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ の代わりに、*Kohnen* プラス空間の2つからの写像

$$S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)) \otimes S^+_{k-\frac{3}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)) \to S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$$

と見たほうが、双線形写像になるので自然である、と以前 *Zagier* 氏によりご指摘を頂いた。確かにそのほうが自然ではあるが、[*HI 05*] での予想は重さ整数の保型形式の組からのリフトとしているので、この論説では、[*HI 05*] に従うこととする。

定理 2.1 を証明するために、示すべきことは、(1) $\mathcal{F}_{f,g}$ がヘッケ作用素の同時固有関数、(2) $\mathcal{F}_{f,g}$ の L-関数が f と g の L-関数の積で書き表せる、という二点である。(1) と (2) について、次の節で解説を与える。

4 重さ半整数ジーゲル保型形式 G の Fourier-Jacobi 展開と一般化マース関係式

前節で定めた G の Fourier-Jacobi 展開を考察し、その一般化マース関係式をこの節で述べたい。

4.1 G の Fourier-Jacobi 展開

k を偶数とし、関数 $G \in S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$ を 3 節で与えたものとする。つまり、G はヘッケ作用素の同時固有関数 $g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ から池田リフト、Fourier-Jacobi 展開、Eichler-Zagier-伊吹山対応の 3 つを経由することで構成できた。

定理 2.1 を証明する為に、G の Fourier-Jacobi 展開を考える

$$G\left(\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^tz & \omega \end{smallmatrix}\right)\right) = \sum_{m \equiv 0,3 \mod 4} \phi_m(\tau, z) q^m,$$

ここで、$\tau \in \mathfrak{H}_2$, $\omega \in \mathfrak{H}_1$, $z \in M_{2,1}(\mathbb{C})$ であり、G の Fourier 係数がプラス空間の条件を満たすので、自然数 m は $m \equiv 0, 3 \bmod 4$ となるものをはしる。ϕ_m は重さ $k - \frac{1}{2}$ の指数 m のヤコビ形式となる。

Remark. ϕ_m の保型性は、G の保型性より示せるが、その群はフルモジュラー $Sp(2,\mathbb{Z})$ ではなくレベル 4、つまり $\Gamma_0^{(2)}(4)$ に関してである。ただし、G はプラス空間の元であるので、ϕ_m のフーリエ係数にもある条件がつく。つまり、ϕ_m は重さが半整数ではあるが、ヤコビ形式の中のプラス空間にあたるような部分空間に属していて、レベルが 1 であるとみなせる。

4.2 一般化マース関係式

斎藤・黒川リフトの古典的な証明には、ヤコビ形式の指数を変える作用素 V_l が重要であったように、重さ半整数のヤコビ形式の空間に対しても、指数を変える作用素を導入することができ、リフトの証明において有用である。

$J^{(2)}_{k,m}$ を次数 2、重さ k、指数 m のヤコビ形式のなす空間とし、p を奇素数とする。$i = 1$, 2 に対して、

$$V^{(2)}_{p,i} \ : \ J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m} \to J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},mp^2}$$

となる作用素 $V^{(2)}_{p,i}$ が定義できる。(cf. [Ha 11b].) この $V^{(2)}_{p,i}$ はヘッケ作用素のように、ヤコビ群での両側剰余類を片側剰余分解し、その代表元の作用の和として定義できる。$V^{(2)}_{p,1}$ と $V^{(2)}_{p,2}$ の二つ存在する理由は、それぞれ $\mathrm{diag}(1, p, p^2, p)$ と $\mathrm{diag}(1, 1, p^2, p^2)$ に対応しており、次数 2 の重さ半整数を考察しているからであるが、詳しい説明は省略する。$p = 2$ に対しても、同様に $V^{(2)}_{2,i}$ を定義できるが、その場合は $J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m}$ の部分空間を考察する必要がある。

また次の作用素を定義する。

$$U_l^{(2)} \ : \ J_{k-\frac{1}{2},m}^{(2)} \to J_{k-\frac{1}{2},ml^2}^{(2)}$$

ここで、この写像は、$\phi \in J_{k-\frac{1}{2},m}^{(2)}$ に対し、$\phi(\tau, z) \mapsto \phi(\tau, lz)$ で与えられる。(ただし、$\tau \in \mathfrak{H}_2$、$z \in M_{2,1}(\mathbb{C})$.) 次の命題を得る。

命題 4.1. 任意の素数 p と任意の自然数 m に対し、次の 2 つの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\phi_m|V_{p,1}^{(2)} &= p\, b(p)\, \phi_m|U_p + \phi_{mp^2} + p^{k-2}\left(\frac{-m}{p}\right)\phi_m|U_p + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}|U_{p^2}, \\
\phi_m|V_{p,2}^{(2)} &= (p^{2k-4} - p^{2k-6})\, \phi_m|U_p \\
&\qquad + b(p)\left(\phi_{mp^2} + p^{k-2}\left(\frac{-m}{p}\right)\phi_m|U_p + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}|U_{p^2}\right).
\end{aligned}$$

ここで、$b(p)$ は $g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ の p 番目のフーリエ係数である。また、m が p^2 で割れないときは、$\phi_{\frac{m}{p^2}} \equiv 0$ とする。$\left(\frac{*}{p}\right)$ は二次剰余記号であり、$p = 2$ のときは、$\left(\frac{t}{2}\right) = (-1)^{\frac{t^2-1}{8}}$ ($t \equiv 1 \mod 2$ のとき)、$\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ ($t \equiv 0 \mod 2$ のとき) である。

この命題 4.1 の証明は次節で説明したい。この命題 4.1 が補題 1.2 で記述したマース関係式の、次数 3 重さ半整数での拡張である。

Remark. 命題 *4.1* は補題 *1.3* と違い、$b(p)$ が現れることが特徴である。つまり、関係式は g のとり方に依存する。また、指数が p 倍ではなく、p^2 倍で移りあうことにも注意したい。

重さが整数の場合の、高次元ジーゲル保型形式の一般化マース関係式については、山崎 [Yz 86, Yz 89]、Kohnen [Ko 02]、Kohnen-小嶋 [KK 05]、山名 [Yn 10]、林田 [Ha 11a] などにより得られている。重さが半整数の場合は、次数 2 の場合に谷川 [Tn 86] により得られていた。

4.3 命題 4.1 から定理 2.1 の証明

この小節では、一般化マース関係式 (命題 4.1) を用いて、定理 2.1 を示す。

記号 $\tilde{T}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & p^2 & \\ & & & p \end{pmatrix}$ と $\tilde{T}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^2 & \\ & & & p^2 \end{pmatrix}$ をそれぞれ、$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & p^2 & \\ & & & p \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^2 & \\ & & & p^2 \end{pmatrix}$ の両側剰余に対応する、$S_{k-\frac{1}{2}}^{+}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ に作用するヘッケ作用素とする。

補題 1.3 と同様に次が成り立つ。

補題 4.2. ϕ_m を G のフーリエ・ヤコビ展開に現れた m 番目のフーリエ・ヤコビ係数とする。ϕ_m は重さ $k-\frac{1}{2}$、指数 m のヤコビ尖点形式であり、また次を満たす。

(1) $\phi_m(\tau,0)\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$

(2) 任意の素数 p に対し、$(\phi_m|V^{(2)}_{p,1})(\tau,0) = (\phi_m(\tau,0))|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix}$ および、

$(\phi_m|V^{(2)}_{p,2})(\tau,0) = (\phi_m(\tau,0))|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&p^2&\\&&&p^2\end{pmatrix}$ が成り立つ。

これらは、定義より簡単に示せる。詳しい計算は省略する。□

命題 4.1 と補題 4.2 より

$$
\begin{aligned}
&(\phi_m(\tau,0))|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix} = (\phi_m|V^{(2)}_{p,1})(\tau,0)\\
&= p\,b(p)\,\phi_m(\tau,0) + \left(\phi_{p^2m}(\tau,0) + \left(\frac{-m}{p}\right)p^{k-2}\phi_m(\tau,0) + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}(\tau,0)\right)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&G\left(\begin{pmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{pmatrix}\right)\Big|_\tau \tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix} = \sum_m\left(\phi_m(\tau,0)|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix}\right)q^m\\
&= p\,b(p)\sum_m \phi_m(\tau,0)q^m\\
&\quad + \sum_m\left(\phi_{p^2m}(\tau,0) + \left(\frac{-m}{p}\right)p^{k-2}\phi_m(\tau,0) + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}(\tau,0)\right)q^m\\
&= p\,b(p)\,G\left(\begin{pmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{pmatrix}\right) + G\left(\begin{pmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{pmatrix}\right)\Big|_\omega \tilde{T}(p^2).
\end{aligned}
$$

ここで、$G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\right)|_\tau$ と $G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\right)|_\omega$ はそれぞれ、$G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\right)$ を τ と ω の関数とみて、ヘッケ作用素を作用させている。(それぞれ、次数 2 と 1 のプラス空間の元である。) また、$\tilde{T}(p^2)$ は Kohnen プラス空間に作用するヘッケ作用素で、$h(\omega)=\sum_m c_m q^m \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ に対し、

$$
(h|\tilde{T}(p^2))(\omega) := \sum_m\left(c_{mp^2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}m}{p}\right)p^{k-2}c_m + p^{2k-3}c_{\frac{m}{p^2}}\right)q^m
$$

と定義される。

更に、$G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)\right)=\sum_h \mathcal{F}_{h,g}(\tau)h(\omega)$ と一意に分解され、$\mathcal{F}_{f,g}=\mathcal{F}_{\hat{f},g}$ であったので、

$$\mathcal{F}_{f,g}|\tilde{T}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & p & & \\ & & p^2 & \\ & & & p\end{pmatrix}=(p\,b(p)+a(p))\mathcal{F}_{f,g}$$

となる。ここで、$a(p)$ は $\hat{f}$ の $\tilde{T}(p^2)$ でのヘッケ固有値であり、つまり、f の p 番目のフーリエ係数である。同様に、命題 4.1 の 2 つ目の等式から

$$\mathcal{F}_{f,g}|\tilde{T}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^2 & \\ & & & p^2\end{pmatrix}=(p^{2k-4}-p^{2k-6}+a(p)b(p))\mathcal{F}_{f,g}$$

を得る。

これらのことより、$\mathcal{F}_{f,g}$ がヘッケ作用素の同時固有関数となることが分かり、またヘッケ固有値もわかっているので、$\lambda_1(p)=p\,b(p)+a(p)$ と $\lambda_2(p)=p^{2k-4}-p^{2k-6}+a(p)b(p)$ を $\mathcal{F}_{f,g}$ の固有値とすると、$\mathcal{F}_{f,g}$ の L-関数は

$$\begin{aligned}
&L(s,\mathcal{F}_{f,g})\\
&=\prod_p\left(1-\lambda_1(p)p^{-s}+(p\lambda_2(p)+p^{2k-5}(1+p^2))p^{-2s}-\lambda_1(p)p^{2k-3-3s}+p^{4k-6-4s}\right)^{-1}\\
&=\prod_p\left\{\left(1-b(p)\,p^{1-s}-p^{2k-3-2s}\right)\left(1-a(p)\,p^{-s}-p^{2k-3-2s}\right)\right\}^{-1}\\
&=L(s-1,g)\,L(s,f)
\end{aligned}$$

となり、命題 4.1 から主結果 (定理 2.1) が得られる。

5 命題 4.1 の証明の概略

命題 4.1 を証明するために、次の 5 つを考察する。

1. 重さ k、指数 1 のヤコビ形式の、行列指数でのフーリエ・ヤコビ展開。
2. 重さ k、行列指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ形式と重さ $k-1/2$、整数指数 $\det(2\mathcal{M})$ のヤコビ形式との対応。及び、それぞれの空間に作用する作用素との可換性。
3. 命題 4.1 の一般化マース関係式をジーゲル・アイゼンシュタイン級数の場合で示し、池田リフトの場合に適用する。
4. S.Böcherer による、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数とヤコビ・アイゼンシュタイン級数との対応の公式の特別な場合。
5. ヤコビ・アイゼンシュタイン級数へのインデックス・チェンジ作用素の作用の計算。

5.1 ヤコビ形式のフーリエ・ヤコビ展開

$I_1(g)(\tau,z)$ を 3 節で定めた、次数 3、指数 1 で重さ k のヤコビ形式とする。ここで $(\tau,z)\in\mathfrak{H}_3\times M_{3,1}(\mathbb{C})$ である。$\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ {}^t z & \omega\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{H}_4$ ($\tau\in\mathfrak{H}_3$、$\omega\in\mathfrak{H}_1$、$z\in M_{3,1}(\mathbb{C})$) に対し、

$$I_1(g)(\tau,z)e^{2\pi i\omega}=\sum_{\mathcal{M}\in Sym_2^*}\phi_{\mathcal{M}}(\tau',z')e^{2\pi i\mathrm{Tr}(\mathcal{M}\omega')}$$

と展開すると、各 $\phi_{\mathcal{M}}$ は次数 2、重さ k、指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ尖点形式となる。上記の和で、Sym_2^* はサイズが 2 の半整数対称行列の全体であり、$\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ {}^t z & \omega\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\tau' & z'\\ {}^t z' & \omega'\end{pmatrix}$ ($\tau'\in\mathfrak{H}_2$、$\omega'\in\mathfrak{H}_2$、$z'\in M_{2,2}(\mathbb{C})$) としている。上記の和の $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ * & 1\end{smallmatrix}\right)$ となることに注意。(ただし、$I_1(g)$ でなくても、$J_{k,1}^{(3)\,cusp}$ の任意の元に対して、同様の展開を得る。) これにより、写像

$$J_{k,1}^{(3)\,cusp}\to\bigoplus_{\substack{\mathcal{M}\in Sym_2^*\\ \mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ * & 1\end{smallmatrix}\right)}}J_{k,\mathcal{M}}^{(2)\,cusp}$$

が得られる。ここで、$J_{k,\mathcal{M}}^{(2)\,cusp}$ は次数 2、重さ k、指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ尖点形式の空間とした。(一般次元かつ行列指数のヤコビ形式の定義については、Ziegler [Zi 89] 参照。)

Remark. $\phi_{\mathcal{M}}$ は、3 節の $I(g)$ (g の次数 4 への池田リフト) をフーリエ・ヤコビ展開した場合の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数と同じヤコビ形式となる。

これまでの写像をまとめると、以下の通りである。

$$\begin{tikzcd}
 & I(g)\in S_k(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})) \arrow[d, "\text{1st F-J}"] & \\
 & I_1(g)\in J_{k,1}^{(3)\,cusp} \arrow[r, "\text{E-Z-I}"'] \arrow[d, "\text{F-J}"] & G\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4)) \arrow[d, "\text{F-J}"] \\
 & \{\phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M}}\in\bigoplus_{\substack{\mathcal{M}\in Sym_2^*\\ \mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ * & 1\end{smallmatrix}\right)}}J_{k,\mathcal{M}}^{(2)\,cusp} \arrow[r, "\iota"] & \{\phi_m\}_m\in\bigoplus_{m\equiv 0,3 \bmod 4}J_{k-\frac{1}{2},m}^{(2)\,cusp} \\
g\in S_{2k-4}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \arrow[uuur, "\text{Ikeda lift}"] & &
\end{tikzcd}$$

ここで、$J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m}$ は次数 2、重さ $k-\frac{1}{2}$、指数 m のヤコビ尖点形式の空間である。また、上図の最後の写像 ι については次の 5.2 節で解説したい。

$\{\phi_m\}_m$ の間で一般化マース関係式を証明する代わりに、$\{\phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M}}$ の間で一般化マース関係式を証明したい。

5.2 行列指数 (重さ整数) と整数指数 (重さ半整数) のヤコビ形式の対応

Eichler-Zagier-伊吹山により、指数 1 の重さ整数のヤコビ形式の空間と一般次元プラス空間 (重さ半整数のジーゲル保型形式の部分空間) との空間の対応が知られていた。両方の空間の関数のフーリエ・ヤコビ展開を考察することで、行列指数 (重さ整数) のヤコビ形式の部分空間と整数指数 (重さ半整数) のヤコビ形式の部分空間との対応が得られる。この行列指数 (重さ整数) から整数指数 (重さ半整数) へのヤコビ形式の空間の写像を ι とする。

また、$J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m}$ に指数を p^2 倍する写像 $V^{(2)}_{p,i}$ $(i=1,2)$ と $U^{(2)}_p$ が定義できるが (ただし $p=2$ の場合は、$J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m}$ の部分空間に制限)、同様に、$J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}}$ にも指数を $\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]$ に変える写像が定義できる (ここで、$A[B] := {}^tBAB$ はジーゲルの記号) この写像を、それぞれ $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ $(i=1,2)$、$U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ とおく

$$
\begin{aligned}
V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i} &: J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}} \to J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]} \qquad (i=1,2),\\
U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} &: J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}} \to J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]}.
\end{aligned}
$$

行列指数ヤコビ形式 $\phi_{\mathcal{M}}$ と整数指数ヤコビ形式 ϕ_m を対応させることが出来たが、これは、互いのフーリエ係数を同一視することにより対応が得られる。同様に、フーリエ係数を見比べることで、$\phi_{\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ には、$\phi_m|V^{(2)}_{p,i}$ が対応し、$\phi_{\mathcal{M}}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ には、$\phi_m|U^{(2)}_p$ が対応することが分かる。つまり、次の可換図を得る。

$$
\begin{array}{ccc}
J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}} & \to & J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m} \\
\downarrow & & \downarrow \\
J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]} & \to & J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},mp^2}
\end{array}
$$

以上により、命題 4.1 を重さ半整数で指数整数のヤコビ形式 $\{\phi_m\}_m$ で証明する代わりに、重さ整数で行列指数のヤコビ形式 $\{\phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M}}$ で証明すれば命題 4.1 を示せたことになる。

Remark. $p=2$ が割と簡単に扱えるようになる、というのも重さ整数のヤコビ形式で考察するメリットの一つである。

5.3 一般化マース関係式のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の場合

池田リフトの性質の一つとして、リフトで得られるジーゲル尖点形式のフーリエ係数がジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数と同じような振る舞いをする、というのがある。これは、リフトのフーリエ係数がジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数と同じような形をしているからであり、詳しくは、池田 [Ik 01] を参照されたい。$\phi_{\mathcal{M}}$ のフーリエ係数は $I(g)$ のフーリエ係数と同一なので、$\phi_{\mathcal{M}}$ は次数 4 のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数とおなじ振る舞いをする。また 5.2 節の $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ $(i=1,2)$ と $U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ はヘッケ作用素のように両側剰余類の片側剰余の代表系の作用の和として記述できるので、これらの作用素を作用させた後のフーリエ係数の形も分かる。以上の考察より、尖点形式で命題 4.1 を証明する代わりに、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数達で命題 4.1 の関係式 (ただし十分多くの重さ k について) がいえれば、尖点形式でも同じ関係式が得られることになる。

5.4 ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数とヤコビ・アイゼンシュタイン級数の関係式

この小節では、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数とヤコビ・アイゼンシュタイン級数の間の関係式について、指数が $\mathcal{M} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Sym_2^*$ の場合について述べる。この関係式は、Boecherer [Bo 83, Satz 7] により得られた一般の行列指数の場合を、行列のサイズが 2 で右下が 1 という特別な場合に制限した時の関係式である。尚、この関係式は次数 2 のみでなく、一般の次数でも成り立つので、次数は一般の自然数 n とする。

関係式を述べるために、いくつか記号を用意する。$\mathcal{M} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}_2^*$ をサイズが 2 の正定値の半整数対称行列とする。$m = \det(2\mathcal{M})$ とおき、D_0 を $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の判別式とする。$f := \sqrt{\frac{m}{|D_0|}}$ とおくと、$m \equiv 0, 3 \bmod 4$ であるので、f は自然数である。$h_{k-\frac{1}{2}}(m)$ を重さ $k-\frac{1}{2}$ の Cohen 型アイゼンシュタイン級数 ([Co 75] 参照) の m-番目のフーリエ

係数とする ([Co 75, p.272] の $H(k-1,m)$ に等しい)。

$$h_{k-\frac{1}{2}}(m) = h_{k-\frac{1}{2}}(|D_0|)\, m^{k-\frac{3}{2}} \sum_{d|f} \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) d^{1-k} \sigma_{3-2k}\left(\frac{f}{d}\right)$$

という関係式が成り立つ。ここで、$\sigma_l(a) = \sum_{d|a} a^l$ であり、μ はメビウス関数である。関数 g_k を $g_k(m) := \sum_{d|f} \mu(d)\, h_{k-\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{d^2}\right)$ とおくと、$g_k(p^2m) = \left(p^{2k-3} - \left(\frac{-m}{p}\right) p^{k-2}\right) g_k(m)$ という関係式が任意の素数 p に対して成り立つ。(k が奇数の場合は、$\left(\frac{-m}{p}\right)$ の部分を $\left(\frac{m}{p}\right)$ に代えると同様に成立する。)

$e^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}}$ を次数 n の重さ k のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数とし、$E^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}}$ を次数 $n-2$ の重さ k の指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ・アイゼンシュタイン級数 (定義は [Zi 89, Theorem 2.1] 参照) とする。この時、次の関係式が成り立つ。

命題 5.1. $k > n+1$ の時、

$$e^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}}(\tau, z) = \sum_{d|f} g_k\left(\frac{m}{d^2}\right) E^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}[{}^tW_d{}^{-1}]}(\tau, zW_d)$$

となる。ここで、それぞれの d に対して、二つの条件 $\det(W_d) = d$ および $W_d^{-1}\mathcal{M}{}^tW_d{}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Sym_2^*$ を満たす行列 $W_d \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$ をとる。上記の和は、W_d のとり方によらない。

この証明は、[Bo 83, Satz 7] の公式からの直接の計算による。

この命題により、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数 (のフーリエ・ヤコビ係数 $e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$) での命題 4.1 の公式を得るためには、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ の代わりに $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ に $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ を作用させたものを計算すればよい、ということになる。

5.5 ヤコビ・アイゼンシュタイン級数への指数を変える作用素の作用

最後に $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ $(i=1,2)$、つまりヤコビ・アイゼンシュタイン級数 $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ に $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ を作用素させた関数の計算を行う。記号 $\mathcal{M}$、m、D_0、f などは 5.4 節と同じものを用いる。

任意の自然数 n に対し、次数 n のジーゲル・アイゼンシュタイン級数がヘッケ作用素の同時固有関数となることは良く知られているが、これは、次のような行列計算

から分かる。$E_k^{(n)} := \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\gamma$ を次数 n のジーゲル・アイゼンシュタイン級数とする。(cf. 軍司 [Gu 11b].)（ここで、$\Gamma := \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, $\Gamma_0 := \left\{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0_n & D\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma\right\}$ とおいた。）$\alpha \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \cap GL_{2n}^+(\mathbb{Q})$ に対し、$M_0 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0_n & D\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma\alpha\Gamma\right\}$ とおく。このとき、両側剰余 $\Gamma\alpha\Gamma$ で定まるヘッケ作用素の作用に対して

$$\begin{aligned} E_k^{(n)}|\Gamma\alpha\Gamma &= \sum_{\gamma'\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\gamma\gamma' = \sum_{\gamma''\in\Gamma_0\backslash\Gamma\alpha\Gamma} 1|_k\gamma'' \\ &= \sum_{\delta\in\Gamma_0\backslash M_0}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\delta\gamma = \sum_{\delta\in\Gamma_0\backslash M_0} c_{\delta,k} \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\gamma \end{aligned}$$

となる。ここで、$c_{\delta,k}$ は定数である。つまり、$E_k^{(n)}$ はヘッケ作用素の作用で固有関数である。

ヤコビ・アイゼンシュタイン級数 $E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}$ も $E_k^{(n)}$ と同じように、ヤコビ群に関する代表系の作用の和で定義されている。また、$V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),i}$ の作用も、ある両側剰余類を片側剰余分解したときの、代表系の作用の和で与えられる。ただし、$V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),i}$ の作用は、ヤコビ形式の指数を変えるので $E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}$ は $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),i}$ の固有関数にはなり得ない。この場合、$E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),i}$ は $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]}$、$E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}$、$E^{(2)}_{k,\mathcal{M}[X^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}]}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1\end{smallmatrix}\right){}^tX\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1\end{smallmatrix}\right)}$ の 3 つの関数の和として具体的に記述できる。(3 つ目の関数は、$p|f$ となる場合にのみ現れ、行列 X は 行列式 1 で $\mathcal{M}[X^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}]$ が半整数対称行列となるような行列である。) 例えば、$p\nmid f$ のときは、

$$\begin{aligned} E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),1} &= \left(p^{-2k+3} + p^{-4k+8} + p^{-4k+7} - p^{-3k+5}\left(\frac{-m}{p}\right)\right) E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} \\ &\quad + \left(p^{-2k+4} + p^{-3k+5}\left(\frac{-m}{p}\right)\right) E^{(2)}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]}. \end{aligned}$$

などとなる。先ほどと同様に、行列計算からこのような関係式が得られるが、サイズ 2 の指数に関するヤコビ群を扱っている関係上、上記のような等式を得るために、次の形の一般化ガウス和 $G_p^{2,l}(A)$ の値を求めることも必要となる。これは、サイズ 2 の半整数対称行列 $A \in Sym_2^*$ と自然数 $l \le 2$ に対し、

$$G_p^{2,l}(A) := \sum_{\substack{x'={}^tx'\in M_{2,2}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ rank_p(x')=l}} e\left(\frac{1}{p}\mathrm{tr}(Ax')\right).$$

で定義される。この一般化ガウス和は、斎藤 [Sa 91] で扱われている一般化ガウス和のサイズが 2 の特別の場合であることに注意する。奇素数 p に対しては、[Sa 91] の結果を

用いて計算ができる。(ちなみに [Sa 91, Proposition 1.9 (1)] の式の右辺の $q^{\frac{n-(t+1)}{2}}$ は $q^{n-\frac{t+1}{2}}$ の誤植。) 行列 A のサイズが 2 なので、直接の計算でも求まる。

$E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の詳しい形は、[Ha 11b] を参照されたい。

Remark. $p = 2$ の場合は、計算が少し複雑になるが、奇素数の場合と同じ形の $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の関係式が得られる。

以上の計算と、命題 5.1 を用いることで、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ を 3 つの関数 $e^{(2)}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]}$、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}[X^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}]}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)^t X \left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ の和で具体的に書きあらわすことができ、これは、任意の $k > 5$ に対して成り立つ関係式である。つまり十分多くの k について成り立つ関係式であるので、5.3 節の考察より、池田リフトで得られる尖点形式にも適用することができる。これにより、次数 3 の重さ半整数ジーゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数に関する一般化マース関係式、つまり命題 4.1 を得たことになる。

参考文献

[Ao 11] 青木宏樹: 「Borcherds product」, 本報告集

[Bo 83] S. Boecherer: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. I, *Math.Z.* **183** (1983), 21–46.

[Co 75] H. Cohen: Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, *Math. Ann.* **217** (1975), 171–185.

[EZ 85] M. Eichler and D. Zagier: Theory of Jacobi Forms, Progress in Math. **55**, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1985).

[Ha 11a] S. Hayashida: Fourier-Jacobi expansion and the Ikeda lift, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **81** no.1 (2011), 1–17.

[Ha 11b] S. Hayashida: Maass relations for generalized Cohen-Eisenstein series of degree two and of degree three, preprint.

[HI 02] S. Hayashida and T. Ibukiyama: Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture. (Automorphic forms, automorphic representations and automorphic L-functions over algebraic groups), 数理解析研究所考究録 No. 1173 (2000), 98–112.

[HI 05] S. Hayashida and T. Ibukiyama: Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture, *Journal of Kyoto Univ.* **45** no.3 (2005) 489–530.

[He 10] B. Heim: On the Spezialschar of Maass, *Int. J. Math. Math. Sci.* (2010) 15pp.

[Gu 11a] 軍司圭一: 「Siegel 保型形式の Hecke 理論」, 本報告集

[Gu 11b] 軍司圭一: 「Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開」, 本報告集

[Ib 92] T. Ibukiyama: On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **41** no.2 (1992), 109–124.

[Ib 08] T. Ibukiyama: A conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, *Modular forms on Schiermonnikoog, Cambridge Univ. Press, Cambridge*, (2008) 107–144.

[Ib 11] 伊吹山知義: 「Saito Kurokawa for level N」, 本報告集

[Ic 05] A. Ichino: Pullbacks of Saito-Kurokawa lifts. *Invent. Math.* **162** no. 3, (2005), 551–647.

[Ik 01] T. Ikeda: On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree 2n, *Ann. of Math. (2)* **154** no.3, (2001), 641–681.

[Ik 06] T. Ikeda: Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture, *Duke Math. J.* **131** no.3, (2006), 469–497.

[Ko 02] W. Kohnen : Lifting modular forms of half-integral weight to Siegel modular forms of even genus, *Math, Ann.* **322** (2002), 787–809.

[KK 05] W. Kohnen and H. Kojima : A Maass space in higher genus, *Compos. Math.* **141** No.2, (2005), 313–322.

[KS 89] W. Kohnen and N. -P. Skoruppa: A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two, *Invent. Math.* **95** (1989), 541–558.

[Ku 78] N. Kurokawa: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. *Invent. Math.* **49** (1978), 149–165.

[Sa 91] H. Saito: A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Reine Angew. Math.* **416** (1991), 91–142.

[Sk 11] 坂田裕: 「Shimura 対応」, 本報告集

[Su 11] 菅野孝史: 「Oda Lift」, 本報告集

[Tk 99] K. Takase: On Siegel modular forms of half-integral weights and Jacobi forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** No. 2, (1999), 735–780.

[Tk 11] 高瀬幸一: 「重さ半整数の Siegel モジュラー形式と Jacobi 形式」, 本報告集

[Tn 86] Y. Tanigawa: Modular descent of Siegel modular forms of half integral weight and an analogy of the Maass relation. *Nagoya Math. J.* **102** (1986), 51–77.

[Yn 10] S. Yamana: Maass relations in higher genus, *Math. Z.* **265** No.2, (2010), 263–276.

[Yz 86] T. Yamazaki: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **33** (1986), 295–310.

[Yz 89] T. Yamazaki: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **36** (1989), 373–386.

[Zh 84] V. G. Zhuravlev: Euler expansions of theta transforms of Siegel modular forms of half-integral weight and their analytic properties, *Math. sbornik.* **123 (165)** (1984), 174–194.

[Zi 89] C. Ziegler: Jacobi forms of higher degree, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* **59** (1989), 191–224.

林田秀一

〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-30

大阪大学インターナショナルカレッジ兼理学研究科

Email : hayashida@math.sci.osaka-u.ac.jp

On v-adic periods of t-motives

三柴 善範 (九州大学大学院数理学府 博士課程 1 年)*

函数体上の t モチーフ M と有限素点 v に対して，M の v 進周期に関する超越次数と M から得られる代数群の次元とが等しいという結果を紹介します．本稿は，第 19 回 (2011 年度) 整数論サマースクール「保型形式のリフティング」での院生・ポスドクの時間において講演した内容をまとめたものです．素晴らしい勉強会を企画・運営して下さったオーガナイザーの皆様，聴講して下さった参加者の皆様に感謝致します．

1　はじめに

Riemann ゼータ函数の特殊値の間に $\mathbb{Q}$ 上どのような代数的関係があるかはまだほとんど知られていないが，この正標数類似である Carlitz ゼータ函数の特殊値については，完全に知られている．その証明では，函数体上の t モチーフという対象の Betti 実現 (∞ 進的対象) による周期に関する超越次数を決定する Papanikolas の結果が重要となっている．一方で有限素点 v に対して，v 進ゼータ函数や v 進実現が考えられる．本稿では，t モチーフの v 進実現に対する Papanikolas の結果の類似を解説する．

まずは標数 0 の場合を述べる．Riemann ゼータ函数の特殊値について，次のような予想がある．

予想 1. n を 2 以上の整数とすると，

$$\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\pi, \zeta(2), \ldots, \zeta(n)) = n - \lfloor n/2 \rfloor$$

が成り立つ．ここで，π は円周率であり，実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数を表す．

よく知られているように，偶数点においては $\zeta(2n)/\pi^{2n} \in \mathbb{Q}$ となる．従って予想 1 は，π とゼータ函数の特殊値の間には，他に $\mathbb{Q}$ 上の代数的な関係がないだろうということを述べている．予想 1 については，まだほとんど何も分かっていない．しかし，この正標数類似である Carlitz ゼータ函数については，同様の主張が既に示されている．以下，このことについて述べる．

$\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とし，その標数を p とする．$K := \mathbb{F}_q(\theta)$ を $\mathbb{F}_q$ 上の一変数有理函数体とする．1 以上の整数 n に対して，

$$\zeta_C(n) := \sum_{a \in \mathbb{F}_q[\theta],\ \text{モニック}} a^{-n} \in K_\infty := \mathbb{F}_q(\!(\theta^{-1})\!)$$

*e-mail: y-mishiba@math.kyushu-u.ac.jp

を Carlitz ゼータ函数の特殊値という．$\mathbb{F}_q[\theta]$，K，K_∞ をそれぞれ $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ の類似物と見做せば，これは Riemann ゼータ函数の特殊値の類似物と考えることができる．定義から，正の整数 m と n に対して $\zeta_C(p^m n) = \zeta_C(n)^{p^m}$ となることが分かる．次に，π の (正確には $2\pi\sqrt{-1}$ の) 類似物 $\tilde{\pi}$ を

$$\tilde{\pi} := \theta(-\theta)^{\frac{1}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} (1-\theta^{1-q^i})^{-1} \in K_\infty((-\theta)^{\frac{1}{q-1}})$$

と定義する．このとき，$q-1$ の倍数 n に対して $\zeta_C(n)/\tilde{\pi}^n \in K$ となることが Carlitz によって示されている．$\sharp\mathbb{Z}^\times = 2$，$\sharp\mathbb{F}_q[\theta]^\times = q-1$ であることを踏まえると，これは Riemann ゼータ函数の偶数点における性質の類似である．実は，正標数のときには K 上の関係式がこれらで全てであることが Chang と Yu によって示されている．

定理 2 ([CY, Corollary 4.6])**.** n を 1 以上の整数とすると，

$$\mathrm{tr.deg}_K\, K\left(\tilde{\pi}, \zeta_C(1), \ldots, \zeta_C(n)\right) = n + 1 - \lfloor n/p \rfloor - \lfloor n/(q-1) \rfloor + \lfloor n/p(q-1) \rfloor$$

が成り立つ．

この定理の証明には，Papanikolas による t モチーフの周期に関する超越次数についての結果が中心的な役割を果たしている．以下，このことについて述べる．t モチーフについての詳しいことは次の章にまとめる．

$\widehat{\overline{K_\infty}}$ を K_∞ の代数閉包の ∞ 進完備化とし，$|\cdot|_\infty$ をその上の自然な絶対値とする．また，t を θ とは独立な変数とする．

$$\mathbb{T} := \{ f \in \widehat{\overline{K_\infty}}[\![t]\!] | f \text{ は } |t|_\infty \leq 1 \text{ で収束 } \}$$

とし，$\mathbb{L} := \mathrm{Frac}(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ の分数体とする．このとき，$\mathbb{L}$ には Frobenius 作用 σ が自然に作用し，その固定部分は $\mathbb{F}_q(t)$ となる．M を t モチーフとする．t モチーフは有限生成自由 $\bar{K}[t]$ 加群に付加構造を入れたものであり，その Betti 実現 $H_B(M) \subset \mathbb{L} \otimes_{\bar{K}[t]} M$ が定義される．$H_B(M)$ は $\mathbb{F}_q(t)$ ベクトル空間となり，その次元は M の階数以下であることが示せる．$\dim_{\mathbb{F}_q(t)} H_B(M) = \mathrm{rank}_{\bar{K}[t]} M =: r$ と仮定し，$H_B(M)$ の基底 $\mathbf{x}$ と M の基底 $\mathbf{m}$ を固定すると，$\mathbb{L} \otimes_{\bar{K}[t]} M$ 内において $\mathbf{x}$ を $\mathbf{m}$ に移す変換行列 $\Psi = (\Psi_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ が得られる．一方でこのような M に対して，M が生成し H_B をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)$ 上のニュートラル淡中圏が得られる．Γ をその基本群とする．定義より，Γ は $\mathbb{F}_q(t)$ 上の代数群となる．このとき，Papanikolas によって次の定理が示されている．

定理 3 ([Pa, Theorem 4.3.1, 4.5.10])**.** M を $\dim H_B(M) = \mathrm{rank}\, M$ となる t モチーフとし，Ψ と Γ を上のように定める．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}_{\bar{K}(t)}\, \bar{K}(t)(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \ldots, \Psi_{rr}) = \dim \Gamma$$

が成り立つ．

有限素点 v に対して M の v 進実現 $V(M)$ が定義され，H_B の代わりに V を用いて変換行列と代数群が同様に得られる．それらに対して定理 3 の類似が成立することを 3 章で述べる．

注意 4. Papanikolas は実際には，“ABP-criterion” と呼ばれるもの ([ABP]) を用いることで，

$$\mathrm{tr.deg}_{\bar{K}}\, \bar{K}(\Psi_{11}|_{t=\theta}, \Psi_{12}|_{t=\theta}, \ldots, \Psi_{rr}|_{t=\theta}) = \dim \Gamma$$

となることまで示している．Anderson と Thakur は [AT] において，ある種の t モチーフ M に対して，$\Psi|_{t=\theta}$ が ζ_C と関係することを示している．そこから得られる代数群 Γ を詳しく調べることで，定理 2 を得ることができる．有限素点 v に対して v 進ゼータ函数 $\zeta_{C,v}$ が定義されるが，ABP-criterion の v 進類似がまだなく，Ψ と $\zeta_{C,v}$ の関係も分かっていない．そのため，定理 3 の v 進類似を $\zeta_{C,v}$ へ応用するにはまだ至っていない．

2　t モチーフ

定理 3 の v 進類似を述べる前に，ここではアーベル t 加群と t モチーフを定義する．定理を述べるだけなら t モチーフだけで十分だが，その双対概念であるアーベル t 加群はアーベル多様体の類似として捉え易いので，まずはそちらから述べる．

定義 5. K 上のアーベル t 加群とは，K 上の $\mathbb{F}_q[t]$ 加群スキーム E であって，次の条件を満たすものである：

- ある整数 $d \geq 0$ に対して，K の代数閉包 $\bar{K}$ 上の群スキームとして $E_{\bar{K}} \cong \mathbb{G}_a^d$.
- 十分大きな N に対して，$(t-\theta)^N \operatorname{Lie}(E) = 0$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.sch.}/K}(E, \mathbb{G}_a)$ は自然に入る $K[t]$ 加群の構造に関して有限生成.

定義から，アーベル t 加群とはだいたい $\mathbb{G}_a^d$ に $\mathbb{F}_q[t]$ の作用が入ったものであり，アーベル多様体への $\mathbb{Z}$ 作用の類似と考えられる．正標数の場合には q 乗 Frobenius 等があるので，$\mathrm{End}(\mathbb{G}_a^d)$ が大きくなり，様々な作用を考えることができる．

例 6 (Carlitz 加群)**.** $C := \mathbb{G}_{a,K}$ とし，$\mathbb{F}_q[t]$ 作用を

$$\mathbb{F}_q[t] \to \mathrm{End}(C); t \mapsto (x \mapsto \theta x + x^q)$$

で定める．このとき，C はアーベル t 加群になることが分かる．これを Carlitz 加群という．

次に t モチーフについて述べる．Frobenius 作用 σ を

$$\sigma\colon K[t] \to K[t]; \sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i a_i^q t^i$$

と定める．

定義 7. K 上の t モチーフとは，$K[t]$ 加群 M と写像 $\varphi\colon M \to M$ の組 (M, φ) であって，次の条件を満たすものである：

- M は有限生成自由 $K[t]$ 加群.
- $\varphi\colon M \to M$ は σ 半線型.

- $\det\varphi = c(t-\theta)^n$ $(c \in K^\times, n \geq 0)$.
- M は $K[\varphi]$ 上有限生成.

ここで，$\det\varphi$ は M の $K[t]$ 基底 $\mathbf{m}$ を取ったときに $\varphi\mathbf{m} = A\mathbf{m}$ となる行列 A の行列式である ($(K[t])^\times = K^\times$ より，$\det\varphi$ が 3 つ目の条件の形であるかどうかは基底の取り方に依らない)．組 (M,φ) を単に M とも書く．

アーベル t 加群 E に対して，$M_E := \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.sch.}/K}(E, \mathbb{G}_a)$ とおく．E の方の t 作用をそのまま M_E への t 作用とし，$\mathbb{G}_a$ の方の定数倍と q 乗写像を M_E への定数倍と φ 作用とすることで，M_E は K 上の t モチーフになる．この対応は自然に関手になるが，実は次の命題が成り立つ．

命題 8. E に M_E を対応させる関手は，K 上のアーベル t 加群のなす圏から K 上の t モチーフのなす圏への圏同値を与える．

例 9 (Carlitz t モチーフ)**.** C を例 6 で定義した Carlitz 加群とする．このとき，M_C は $K[t]$ 加群としては $K[t]$ と同型となり，φ 作用は $a \in M_C$ に対して $\varphi(a) = (t-\theta)\sigma(a)$ となる．これを Carlitz t モチーフという．

3 v 進の場合

この章では Papanikolas の結果の v 進類似について述べる．$v \in \mathbb{F}_q[t]$ をモニックな既約多項式とし，K の分離閉包 K^{sep} を固定する．$\mathbb{F}_q(t)_v$，$K(t)_v$，$K^{\mathrm{sep}}(t)_v$ をそれぞれ $\mathbb{F}_q(t)$, $K(t)$，$K^{\mathrm{sep}}(t)$ の v 進完備化とする．このとき，σ は $K(t)_v$ と $K^{\mathrm{sep}}(t)_v$ に自然に延長され，その固定部分は $\mathbb{F}_q(t)_v$ となる．K 上の t モチーフ M に対して，その v 進実現を

$$V(M) := \left(K^{\mathrm{sep}}(t)_v \otimes_{K[t]} M\right)^{\sigma\otimes\varphi}$$

で定義する．但し，$(-)^{\sigma\otimes\varphi}$ で作用の固定部分を表す．$V(M)$ は $\mathbb{F}_q(t)_v$ ベクトル空間となり，その次元は常に M の階数と等しいことが分かる．t モチーフのままでは扱いにくいので，v 進実現が経由する次のような圏を考える．

定義 10. $K(t)_v$ 上の φ 加群とは，有限次元 $K(t)_v$ ベクトル空間 N と σ 半線型写像 $\varphi\colon N \to N$ の組のことである．単に N とも書く．φ 加群の間の射は，$K(t)_v$ 線型写像で各 φ と可換なものである．

N を $K(t)_v$ 上の φ 加群とすると，自然な写像

$$K^{\mathrm{sep}}(t)_v \otimes_{\mathbb{F}_q(t)_v} V(N) \to K^{\mathrm{sep}}(t)_v \otimes_{K(t)_v} N$$

が得られる．ここで，$V(N) := (K^{\mathrm{sep}}(t)_v \otimes_{K(t)_v} N)^{\sigma\otimes\varphi}$ である．$K(t)_v$ 上の φ 加群で上の写像が同型となるもののなす圏を $\mathcal{C}$ で表す．このとき，$\mathcal{C}$ は V をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)_v$ 上のニュートラル淡中圏となる．また，M を K 上の t モチーフとすると，$K(t)_v \otimes_{K[t]} M$ が $\mathcal{C}$ の対象となることが分かる．

M を K 上の t モチーフとし，$r := \mathrm{rank}_{K[t]} M$ とする．このとき，上に述べたことから $r = \dim_{\mathbb{F}_q(t)_v} V(M)$ となる．$V(M)$ の基底 $\mathbf{x}$ と M の基底 $\mathbf{m}$ をそれぞれ固定すると，$K^{\mathrm{sep}}(t)_v \otimes_{K[t]} M$ 内において $\mathbf{x}$ を $\mathbf{m}$ に移す変換行列

$$\Psi = (\Psi_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_r(K^{\mathrm{sep}}(t)_v)$$

が得られる．Ψ は各基底の取り方に依るが，$\mathrm{GL}_r(K[t])\backslash \mathrm{GL}_r(K^{\mathrm{sep}}(t)_v)/ \mathrm{GL}_r(\mathbb{F}_q(t)_v)$ において well-defined である．Ψ の各成分 Ψ_{ij} を，M の v 進周期という．$v = \prod_{l=1}^{d}(t-\lambda_l)$ と $\overline{\mathbb{F}_q}$ で分解すると，

$$K^{\mathrm{sep}}(t)_v = \prod_l K^{\mathrm{sep}}(\!(t-\lambda_l)\!)$$

となるので，これに合わせて $\Psi_{ij} = (\Psi_{ijl})_l$ と成分表示する．次に，Γ_v を $K(t)_v \otimes_{K[t]} M$ が $\mathcal{C}$ において生成する部分淡中圏 (有限回の直和，テンソル積，双対，部分商を取って得られる対象全体) の基本群とする．定義から，Γ_v は $\mathbb{F}_q(t)_v$ 上の代数群である．このとき，以下の定理が成り立つ．これは定理 3 の v 進類似と考えられる．

定理 11 ([Mi, Theorem 4.14, 5.15])**.** M を K 上の t モチーフとし，Ψ_{ijl}，Γ_v を上のようにとる．このとき，任意の l に対して

$$\mathrm{tr.deg}_{K(t)_v} K(t)_v(\Psi_{11l}, \Psi_{12l}, \ldots, \Psi_{rrl}) = \dim \Gamma_v$$

が成り立つ．

注意 12. $\mathcal{C}$ の対象 N に対して，$V(N)$ には K の絶対 Galois 群 $G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ が自然に作用する．G_K の $\mathbb{F}_q(t)_v$ 係数連続表現のなす圏を $\mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_q(t)_v}(G_K)$ とすると，V は圏同値

$$\mathcal{C} \simeq \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_q(t)_v}(G_K)$$

を引き起こす．従って，t モチーフ M に対して Γ_v は $\mathrm{Im}(G_K \to \mathrm{GL}(V(M)))$ の Zariski 閉包と一致する．この事実は定理 11 の証明にも使われる．また，そこが定理 3 の証明と本質的に違う部分でもある．

例 13. M を例 9 の Carlitz t モチーフとする．このとき，$\Gamma_v = \mathbb{G}_m$ であり，超越次数は全て 1 である．

参考文献

[ABP] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values in positive characteristic*, Ann. of Math. **160** (2004) 237–313.

[AT] G. W. Anderson, D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990) 159–191.

[CY] C.-Y. Chang and J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007) 321–345.

[Mi] Y. Mishiba, *On* v*-adic periods of* t*-motives*, preprint, arXiv:1105.6243.

[Pa] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008) 123–174.