

平成 26 年度後期代数幾何講義

- 楕円曲線と平面 3 次曲線入門 -

古島幹雄（和上大雪）

November 25, 2014

1 第 1 講 記号および準備

記号

- ▶ $\mathbb{C}$ を複素平面（または，単に， $\mathbb{C}$ -平面）
- ▶ $z = x + \sqrt{-1}y = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) を $\mathbb{C}$ -平面の複素座標
- ▶ $\mathbb{C}_{(z)}$: 複素座標 z をもつ複素平面
- ▶ $\operatorname{Re} z$: z の実部
- ▶ $\operatorname{Im} z$: z の虚部
- ▶ $z = (\operatorname{Re} z) + (\operatorname{Im} z)i$
- ▶ $\bar{z} = x - yi$: 共役複素数 (z の共役)
- ▶ $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$
- ▶ $\arg z$: z の偏角.
- ▶ $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k$ ($0 \leq k \in \mathbb{Z}$), 但し, $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$
- ▶ $z = |z|e^{i \arg z} (= |z|e^{i \operatorname{Arg} z})$: z の極形式

2 格子点・格子群

2.1

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ($\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$) とする.

補題 1. ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次独立 $\iff \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$

証明. $(\implies)$ $\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$ ならば, $\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \lambda \omega_1 + (-1) \omega_2 = 0$$

よって, ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次従属である. 従って, $\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$.

$(\impliedby)$ ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次従属とする. そのとき, $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ s.t. $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = 0$.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$$

ここで, $\lambda_2 = 0$ ならば, $\lambda_1 = 0$ となり, 仮定に反する. よって, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}$
 $\therefore \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$. □

注意 1. この証明の別証明を与える.

まず, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の 3 点 $0, a \neq 0, z \neq 0$ が一直線上にあるための必要十分条件は

$$\operatorname{Im}(\bar{a} \cdot z) = 0 \quad \therefore \operatorname{Im}\left(|a|^2 \cdot \frac{z}{a}\right) = 0 \quad \therefore \operatorname{Im}\left(\frac{z}{a}\right) = 0$$

である. ω_1, ω_2 が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるためには $0, \omega_1, \omega_2$ が一直線上にないことであるから, $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \neq 0$ を得る.

そこで, $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$ としても一般性は失わない.

補題 2. $\arg \omega_2 > \arg \omega_1$ (ω_2 . 即ち, ω_1 に対して, 反時計回りの位置にある).

証明. $\omega_1 = |\omega_1|e^{i \arg \omega_1}, \quad \omega_2 = |\omega_2|e^{i \arg \omega_2}$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|} e^{(\arg \omega_2 - \arg \omega_1)}$$

$$0 < \operatorname{Im} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \operatorname{Im} e^{(\arg \omega_2 - \arg \omega_1)} = \sin(\arg \omega_2 - \arg \omega_1) \\ \therefore \arg \omega_2 - \arg \omega_1 > 0$$

必要とあれば $\arg \omega_2 = \operatorname{Arg} \omega_2 + 2\pi$ とせよ. □

2.2

$\operatorname{Im} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) > 0$ とする.

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

を ω_1, ω_2 で生成される $\mathbb{Z}$ 加群 (加法 $+$ に関してアーベル群ことは自明) とするそのとき,

注意 2. 以下を注意しよう:

► $\Lambda(\omega_1, \omega_2) \subset V_{\mathbb{R}} = \{a\omega_1 + b\omega_2 : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{C}.$

($\because$) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として, $2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$ よって, ベクトル空間として $V_{\mathbb{R}} = \{a\omega_1 + b\omega_2 : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{C}$ を得る.

—— 注意 ——

$0 \neq \omega_1 = p + qi, 0 \neq \omega_2 = r + si$ とおく.

$$0 \neq \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \operatorname{Im} \left(\frac{pr + qs + i(ps - qr)}{p^2 + q^2} \right) = \frac{ps - qr}{p^2 + q^2} \therefore ps - qr \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2 = \mathbb{R} + \mathbb{R}i = \mathbb{C}. \quad \forall z \in \mathbb{C}, z = \exists x\omega_1 + \exists y\omega_2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

► $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ は $\mathbb{C}$ (加法に関するアーベル群) の部分群より $\mathbb{C}$ の正規部分群となり, その商群

$$\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C} / \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

はアーベル群の構造をもつ。商写像

$$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) : z \mapsto [z] = z \bmod \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

は全射準同型写像である。また、 $\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\pi(z) = [z] = \{z' \in \mathbb{C} : z' - z \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)\}$$

であり、

$$z - z' \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \implies \pi(z) = \pi(z')$$

が成立する。

—— 事実 ——

G を群とし H を G の正規部分群とすると G/H は群になる。商写像 $\varphi : G \longrightarrow G/H$ は全射準同型写像である。

次に、 $\mathbb{C}$ を位相空間と見て、 $z, z' \in \mathbb{C}$ に対し、関係 $\sim$ を

$$z \sim z' \stackrel{\text{def}}{\iff} z - z' \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

で定義すれば、この関係 $\sim$ は $\mathbb{C}$ 上の同値関係を与える。この同値関係による商空間 (quotient space) を $\mathbb{T} := \mathbb{C}/\sim$ で表し、商写像を同じ記号 π を用いて、 $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{C}/\sim$ で表す。このとき、集合として

$$\mathbb{C}/\sim =: \mathbb{T} = \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{C}/\Lambda(\omega_1, \omega_2) \quad (\text{as a set})$$

が成立する。

- ▶ 位相空間 $\mathbb{T}$ には商位相を入れる。即ち、自然な全射写像 $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}$ を連続にする最強の位相を入れる。

—— 事実 ——

位相空間 X 上の位相 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ に対し、 $\mathfrak{A}_2$ が $\mathfrak{A}_1$ より強いとは、 $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ のとき。位相空間 X から集合 Y への写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、 $\mathfrak{B}$ を f を連続にするような Y 上の位相とする。そのとき、 $\mathfrak{A} = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ は } X \text{ の開集合}\}$ は f を連続にする最強の位相。

補題 3. 自然な全射写像 $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ について以下が分かる.

▶ $\mathbb{T}$ はコンパクトハウスドルフ空間である.

▶ π は被覆写像である.

証明.

$$\Pi_0 = \{\epsilon\omega_1 + \delta\omega_2 : 0 \leq \epsilon < 1, 0 \leq \delta < 1\} \subset \mathbb{C}$$

を周期平行四辺形という. 任意の $a \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ に対して,

$$\Pi_{a+\omega} = a + \omega + \Pi_a = \{a + \omega + \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2 : 0 \leq \epsilon < 1, 0 \leq \delta < 1\}$$

を a 中心の周期平行四辺形という. 平行移動 (線形同型写像)

$$\lambda_{a+\omega} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z + a + \omega \quad \forall \omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

に対し,

$$\lambda_{a+\omega}(\Pi_0) = \Pi_{a+\omega}$$

補題 4. $\mathbb{C} = \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} \Pi_{a+\omega}$ (disjoint union).

証明. $\mathbb{C} \subset \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} \Pi_{a+\omega}$ を示す. $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$z - a = x\omega_1 + y\omega_2 \in \mathbb{C}, (x, y \in \mathbb{R})$$

と表される. そのとき,

$$x = m + \epsilon \quad (\exists m \in \mathbb{Z}, 0 \leq \epsilon < 1), \quad y = n + \delta \quad (\exists n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \delta < 1)$$

と一意的に表されるので,

$$\therefore z - a = m\omega_1 + n\omega_2 + (\epsilon\omega_1 + \delta\omega_2)$$

を得る. $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ とおくと,

$$z = \underline{a + \omega} + \underline{\epsilon\omega_1 + \delta\omega_2} \in \Pi_{a+\omega} \subset \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} \Pi_{a+\omega}$$

Claim 1. $\omega \neq \omega' \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ に対し, $\Pi_{a+\omega} \cap \Pi_{a+\omega'} = \emptyset$

($\because$) $z \in \Pi_{a+\omega} \cap \Pi_{a+\omega'}$ とする. $z = a + \omega + \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2 = a + \omega' + \epsilon'\omega_1 + \delta'\omega_2$.

$$\therefore \Lambda(\omega_1, \omega_2) \ni \omega' - \omega = (\epsilon - \epsilon')\omega_1 + (\delta - \delta')\omega_2$$

$-1 < \epsilon - \epsilon' < 1$, $-1 < \delta - \delta' < 1$ かつ $\epsilon - \epsilon', \delta - \delta' \in \mathbb{Z}$ より, $\epsilon = \epsilon'$, $\delta = \delta'$
これは $\omega \neq \omega'$ に反する. $\square$

こうして, Claim 1 より $\mathbb{C} = \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} \Pi_{a+\omega}$ (disjoint union) を得る.

特に, $a = 0$ とおくと,

系 1.

$$\mathbb{C} = \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} \Pi_{\omega} \quad (\text{disjoint union})$$

を得る.

Claim 2. $z, z' \in \Pi_{a+\omega}$ に対し, $z \sim z' \iff z = z'$

($\because$) $z \sim z' \implies z - z' \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$.

$$z - z' = (a + \omega + \epsilon_1\omega_1 + \delta_1\omega_2) - (a + \omega + \epsilon'_1\omega_1 + \delta'_1\omega_2), \quad (0 \leq \epsilon_i, \delta_i < 1)$$

$$\therefore z - z' = (\epsilon_1 - \epsilon'_1)\omega_1 + (\delta_1 - \delta'_1)\omega_2 \in \Lambda(\omega_1, \omega_2).$$

$-1 < \epsilon_1 - \epsilon'_1 < 1$, $-1 < \delta_1 - \delta'_1 < 1$ かつ $\epsilon_1 - \epsilon'_1, \delta_1 - \delta'_1 \in \mathbb{Z}$ ゆえ,
 $\epsilon_1 = \epsilon'_1, \delta_1 = \delta'_1$. 故に, $z = z'$. $\square$

Claim 3. 制限写像 $\pi_0 = \pi|_{\Pi_0} : \Pi_0 \longrightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は全単射連続写像

($\because$) $\pi_0(\Pi_0) = \pi(\Pi_0) \subset \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$. よって, π_0 は中への連続写像. 逆に,
 $[z] \in \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ をとると, $z \in \mathbb{C}$ かつ $\pi(z) = [z]$. $z = x\omega_1 + y\omega_2$ とおくと,
 $x = m + \epsilon$, $y = n + \delta$ なる $\exists m, n \in \mathbb{Z}, \exists \epsilon, \delta; (0 \leq \epsilon, \delta < 1)$ が存在する.
 $\therefore z = m\omega_1 + n\omega_2 + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = m\omega_1 + n\omega_2 + z^*$, $z^* \in \Pi_0$. 特に,
 $z - z^* = m\omega_1 + n\omega_2 \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ ゆえ, $\pi(z^*) = \pi(z) = [z]$ ゆえ, π_0 は全射.
 一方, $\exists z^*, z^{**} \in \Pi_0$ が存在して $\pi_0(z^*) = \pi_0(z^{**})$ ならば, $z^* \sim z^{**}$ ゆえ,
 Claim 2 より $z^* = z^{**}$. よって, $\pi_0 : \Pi_0 \longrightarrow \mathbb{T}$ は全単射連続写像である. $\square$

Claim 4. $\mathbb{T}$ はコンパクトである.

($\because$) $\pi_0 : \bar{\Pi}_0 \rightarrow \mathbb{T}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 内の有界閉集合 (コンパクト集合) $\bar{\Pi}_0$ から位相空間 $\mathbb{T}$ への全射連続写像ゆえ, その像 $\pi(\bar{\Pi}_0) = \mathbb{T}$ はコンパクトである.

—— 事実 ——

$f : X \rightarrow Y$ を位相空間 X から位相空間 Y への連続写像とする. X の任意のコンパクト部分集合 K に対して, その像 $f(K) \subset Y$ は Y のコンパクト部分集合である.

Claim 5. $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は開写像である.

($\because$) $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. そのとき,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} (\omega + U)$$

ここに, 線形写像 $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z + \omega$ は位相同型写像でもあるので,

$$\omega + U = \{\omega + z : z \in U\} = \lambda_\omega(U)$$

は開集合である. 故に, 開集合の和集合として $\pi^{-1}(\pi(U))$ は開集合. 商位相の定義より $\pi(U)$ は $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ の開集合である. ゆえに, $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は開写像である.

Claim 6. $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は被覆写像 (covering map) である.

($\because$) 任意の点 $[z] \in \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2); (z \in \mathbb{C})$ に対し, $\exists z^* \in \Pi_0$ が唯一存在して $\pi(z^*) = [z]$ を満たす. ここで, z^* が原点 O と ω_i ($i = 1, 2$) を結ぶ線分上にあれば, 原点 O に十分近い点 $a \in \mathbb{C}$ をとって, z^* は Π_a の内点としてよい. $\Pi_a \cong \mathbb{T}$ (homeo.) であったので, $[z]$ の近傍 V および z^* の近傍 $U \subset \Pi_a$ (但し, U は Π_a の内点に含まれる) が存在して, $U \xrightarrow{\pi|_U} V$ (homeo.) を満たす. このとき,

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)} (\omega + U) \text{ (disjoint union)}$$

かつ、各 $\omega + U \subset \Pi_{a+\omega}$ について、 $\omega + U \cong U \xrightarrow{\sim} V$ が分かる。こうして、 π は被覆写像である。 $\square$

—— 定義 ——

位相空間 X, Y に対し、写像 $f : X \longrightarrow Y$ が被覆写像であるとは、

- (a) f は全射連続写像
- (b) 任意の点 $y \in Y$ に対して、 y の近傍 $V(y)$ が存在して、

$$f^{-1}(V(y)) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \text{ (disjoint union)}$$

かつ 各 U_{α} に対し、

$$f|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \xrightarrow{\cong} V(y) \text{ は位相同型}$$

特に、各 $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}(y)$ は離散集合 (discrete set) である。

命題 1. $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ はコンパクト・ハウスドルフ位相アーベル群である。

証明. 集合として $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ である。一方、 $\mathbb{T}$ はコンパクト位相空間であり、 $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ はアーベル群である。また、商写像 $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は被覆写像でありアーベル群の準同型写像でもある。ハウスドルフである事は、任意の2点 $[p] \neq [q] \in \mathbb{T}$ ($p \neq q \in \mathbb{C}$ に対し、近傍 U_p, U_q を互いに交わらない、かつ、 $U_p \cong \pi(U_p), U_q \cong \pi(U_q)$ となるように選べる。 π が開写像より、開近傍により $\pi(U_p) \cap \pi(U_q) = \emptyset$ とできる。

2.2.1

$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ とおくと、 $\text{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) > 0$ ゆえ、 $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ (上半平面) である。線形写像

$$\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \omega_1 \cdot z$$

は双正則同型写像を与える。

$$\Lambda(1, \tau) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau = \{m + n\tau : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

とおくと,

$$\lambda : \Lambda(1, \tau) \cong \Lambda(\omega_1, \omega_2) \quad (\text{isomorphism})$$

ゆえ,

$$\mathbb{T}(1, \tau) \xrightarrow{\bar{\lambda}} \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) : [z] \mapsto [\omega_1 \cdot z]$$

は位相同型写像である.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(1, \tau) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}(1, \tau) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \lambda \downarrow & & \lambda \downarrow & & \bar{\lambda} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda(\omega_1, \omega_2) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

注意

$\mathbb{T}$ の位相 (商位相) を $\mathfrak{U}_{\mathbb{T}}$ とする. 周期平行四辺形 Π_0 上の集合族

$$\mathfrak{U}_{\Pi_0} = \{\pi^{-1}(V) \cap \Pi_0 : V \in \mathfrak{U}_{\mathbb{T}}\}$$

は位相の公理を満たす. そのとき, 位相空間 $(\Pi_0, \mathfrak{U}_{\Pi_0})$ はコンパクト位相空間で $(\Pi_0, \mathfrak{U}_{\Pi_0}) \cong (\mathbb{T}, \mathfrak{U}_{\mathbb{T}})$ (homeo) である.

2.3

定理 1. $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ はリーマン面の構造をもち, 写像 $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は正則写像である. 換言すれば, 自然な写像 $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ が正則写像になるように $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ にリーマン面の構造を入れることができるということである. リーマン面としての $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ を一次元複素トーラスという.

リーマン面の定義

位相空間 R がリーマン面であるとは:

- ▶ R は局所コンパクトハウスドルフ空間である.
- ▶ $\forall p \in R$ に対し, p の連結近傍 U_p および座標 z_p をもつ複素平面 $\mathbb{C}_{(z_p)}$ の連結開集合 Ω_p への位相同型写像 $\varphi_p : U_p \rightarrow \Omega_p \subset \mathbb{C}_{(z_p)}$ が存在し,

$U_p \cap U_{p'} \neq \emptyset$ なる p, p' に対し, 位相同型写像

$$\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1} : \varphi_{p'}(U_p \cap U_{p'}) \rightarrow \varphi_p(U_p \cap U_{p'}) : z_{p'} \mapsto z_p = \varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}(z_{p'})$$

は連結開集合 $\varphi_p(U_p \cap U_{p'}) \subset \mathbb{C}_{(z_p)}$ から連結開集合 $\varphi_{p'}(U_p \cap U_{p'}) \subset \mathbb{C}_{(z_{p'})}$ への双正則写像を与える. $\mathfrak{U} = \{(U_p, \varphi_p)\} \stackrel{\text{or}}{=} \{(\Omega_p, z_p)\}$ を R の (連結) 局所座標系という.

正則写像

$f : R \rightarrow S$ をリーマン面 R から S への連続写像とする. そこで, (V_q, w_q) を点 q の周りの連結な局所座標近傍とし, $\mathfrak{V} = \{(V_q, w_q)\}$ を S の連結局所座標系とする. 点 $q \in S$ に対し, $\varphi(p) = q \in V_q$ となる点 $p \in R$ をとる. p の連結近傍 U_p を $U_p \subset f^{-1}(V_q)$ となるように選ぶ. そのとき, $f(U_p) \subset V_q$. U_p を十分小さく取ることにより, (U_p, z_p) が p の周りの連結な局所座標近傍となるようにでき, $\{(U_p, z_p)\}_{p \in R}$ は R の連結な局所座標系である. そのとき, f は局所的に

$$f_p := f|_{U_p} : U_p \rightarrow V_q \quad z_p \mapsto f_p(z_p) = w_q$$

と表示されるが, 関数 $w_q = f_p(z_p)$ は z_p の正則関数であるとき, f を正則写像という. R にこのような局所座標系を指定することで, 正則写像は局所的に複素平面の領域間の正則写像とみなすことができるのである. そこで, 正則写像の定義を次のようにする. R, S をリーマン面とし, $f : R \rightarrow S$ を連続写像とする. このとき, 連続写像 f が正則写像であるとは, R, S の連結な局所座標系 $\mathfrak{U} = \{(U_i, z_i)\}$, $\mathfrak{V} = \{(V_j, w_j)\}$ で, 各 U_i に対して $f(U_i) \subset V_j$ なる $V_j = V_{j(i)}$ なるものに対し (存在する)

$$w_j = f|_{U_i} : w_j(z_i) : U_i \rightarrow V_j$$

は複素平面 $\mathbb{C}_{(z_i)}$ の領域 U_i 上の正則関数でその値域は $\mathbb{C}_{(w_j)}$ 内の連結開集合 V_j である.

$\Pi_0 \cong \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ より, Π_0 にリーマン面の構造を入れよう.

(i) Π_0 の内点 $z_0 = \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2$ ($0 < \epsilon, \delta < 1$) を中心とする半径 $r > 0$ の開円板 $U \subset \overset{\circ}{\Pi}_0$ (Π_0 の内点集合) を取り, $\phi: U \rightarrow U$ は恒等写像とする.

(ii) 点 $\epsilon\omega_1$ ($0 < \epsilon < 1$) $\in \Pi_0$ に対して,

- ▶ $U_1: \epsilon\omega_1$ 中心の半径 $r > 0$ の小円板とし,
- ▶ $U_2: \epsilon\omega_1 + \omega_2$ 中心の半径 $r > 0$ の小円板とする.
- ▶
$$\begin{cases} U := (U_1 \cap \Pi_0) \cup (U_2 \cap \Pi_0) \subset \mathbb{C} \\ \Delta := U_1 \subset \mathbb{C} \end{cases}$$
- ▶ $\phi: U \rightarrow \Delta: \quad \phi(z) = \begin{cases} z & \text{if } z \in U_1 \cap \Pi_0 \\ z - \omega_2 & \text{if } z \in U_2 \cap \Pi_0 \end{cases}$

(iii) $\delta\omega_2 \in \Pi_0$ についても同様に

- ▶ $U_1: \delta\omega_2$ 中心の半径 $r > 0$ の小円板とし,
- ▶ $U_2: \delta\omega_2 + \omega_1$ 中心の半径 $r > 0$ の小円板とする.
- ▶
$$\begin{cases} U := (U_1 \cap \Pi_0) \cup (U_2 \cap \Pi_0) \subset \mathbb{C} \\ \Delta := U_1 \subset \mathbb{C} \end{cases}$$
- ▶ $\phi: U \rightarrow \Delta: \quad \phi(z) = \begin{cases} z & \text{if } z \in U_1 \cap \Pi_0 \\ z - \omega_1 & \text{if } z \in U_2 \cap \Pi_0 \end{cases}$

(iv) ▶ $0 \in \mathbb{C}$ に対して, $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ 中心の半径 $r > 0$ の十分小さい円板をそれぞれ U_1, U_2, U_3, U_4 をとり,

- ▶
$$\begin{cases} U := (U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4) \cap \Pi_0 \subset \mathbb{C} \\ \Delta := U_1 \subset \mathbb{C} \end{cases}$$
- ▶ $\phi: U \rightarrow \Delta: \quad \phi(z) = \begin{cases} z & \text{if } z \in U_1 \cap \Pi_0 \\ z - \omega_1 & \text{if } z \in U_2 \cap \Pi_0 \\ z - \omega_2 & \text{if } z \in U_3 \cap \Pi_0 \\ z - \omega_1 - \omega_2 & \text{if } z \in U_4 \cap \Pi_0 \end{cases}$

各点 $p \in \Pi_0$ に対し, (i) $\sim$ (iv) で構成した近傍 U_p および $\phi_p: U_p \rightarrow \Delta_p$ をとり, $\pi(U_p) = V_q$ とおくと, U_p が十分小さければ $U_p \cong V_q$ である. $\varphi_q = \phi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1}: V_q \rightarrow \Delta_p$ とおく. そのとき, $\{(V_q, \varphi_q)\}$ が $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ の局所座標系である. こうして, $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ にはリーマン面の構造入る. $\square$

実は、 $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ の局所座標は、商写像 π が正則写像になるように構成している。こうして、

系 2. 商写像 $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ は正則写像である。

2.4

定理 2. 連結なコンパクトリーマン面 R 上の正則関数は定数である。

証明. f を R 上の正則関数とする。 f は R 上連続なので、 R 上最大絶対値 M をとる。即ち、 R の内点 $p_0 \in R$ が存在して、任意の点 $p \in R$ に対して、

$$|f(p)| \leq |f(p_0)|.$$

よって、 p_0 の座標近傍 $U_0 \subset \mathbb{C}$ 上、 f は最大絶対値の定理より、 f は U_p 上定数。 R は連結より弧状連結、 よって、任意の $p \in R$ に対し、 p_0 と p を結ぶ連続な弧 $\gamma_{p_0}^p \subset R$ が存在する。 $\gamma_{p_0}^p$ はコンパクトゆえ、 $\gamma_{p_0}^p$ の座標近傍による有限個の開被覆 $\{U_0, U_1, \dots, U_N\}$ が存在し、

- ▶ $p \in U_N$
- ▶ $\gamma_{p_0}^p \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$
- ▶ $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ ($0 \leq i \leq N$)
- ▶ $U_i \cap U_j = \emptyset$ ($|i - j| \geq 2$)

一致の定理を繰り返し適用して、 f は $p \in U_N \subset \mathbb{C}$ の開部分集合 $U_{N-1} \cap U_N \neq \emptyset$ で定数関数 $f = f(p_0)$ 。一致の定理より f は U_N 上で $f = f(p_0)$ 。故に、 f は R 上定数関数。

定理 3. 一次元複素トーラス $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ 上に有理型関数が存在する。

任意のコンパクトリーマン面に有理型関数が存在する。これは、コンパクトリーマン面の基本定理である。証明には準備を要する。

2.4.1 リーマン球面 $\mathbb{P}^1$

二つの複素平面 $U_0 \cong \mathbb{C}_{(z_0)}$, $U_1 \cong \mathbb{C}_{(z_1)}$ を考える. ここに, z_0, z_1 はそれぞれ複素平面の座標関数である. リーマン球面 (射影直線) $\mathbb{P}^1$ とは次をみたすリーマン面である:

- ▶ $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$
- ▶ $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$
- ▶ $z_1 = \frac{1}{z_0}$ on $U_0 \cap U_1$
- ▶ $U_0 = \mathbb{C}, U_1 = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\}$

容易に次もわかる.

命題 2. $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\varphi([z])$ をトーラス $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ 上の有理型関数とする (存在すると仮定する). そのとき, $\varphi([z])$ は正則写像 $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を定める. $\mathbb{T}$ はコンパクトで $P(\varphi)$ は孤立点からなるので

$$\varphi^{-1}(\infty) = P(\varphi) = \{[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_t]\},$$

即ち, $P(f)$ は有限個の点からなる集合である. 今, $f(z) = \varphi(\pi(z))$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で, $f(z)$ の極の集合

$$P(f) = \bigcup_{i=1}^t (\pi^{-1}([\alpha_i]) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ \omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)}}^t (\alpha_i + \omega)$$

である. さらに, $f(z)$ は 2 重周期性をもつ:

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{for } \forall \omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2).$$

上記の 2 重周期性をもつ有理型関数を ω_1, ω_2 を周期に持つ 2 重周期関数または楕円関数とよぶ. 特に, $\infty = f(\alpha_i) = f(\alpha_i + \omega) \quad \forall \omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ より, 極 $z = \alpha_i$ に対しても 2 重周期性は保たれる. 逆に, ω_1, ω_2 を 2 重周期にもつ楕円関数 $f(z)$ に対し, $\varphi([z]) = f(z)$ で定義すれば, $\varphi([z])$ は $[z]$ の代表元 z の取り方によらない (well-defined) $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ 上の有理型関数である.

3 複素解析概観

3.1 複素微分可能性と正則性

記号

- ▶ $D \subset \mathbb{C}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 (連結開集合) .
- ▶ $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, ただし, $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
- ▶ $a = \alpha + \beta i \in D$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
- ▶ $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

定義 1. $z = a = \alpha + \beta i$ の近傍で定義された連続関数 $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ が $z = a$ で**複素微分可能**であるとは,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) < \infty \quad (\text{有限確定値})$$

のときをいう.

命題 3. (1) $f(z)$ は $z = a$ で $\mathbb{C}$ -diff. である.

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0.$$

$$(4) \quad (CR) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(\alpha, \beta) = \frac{\partial Q}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(\alpha, \beta) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (\text{コーシー・リーマンの関係式})$$

注意 3.

$$(1) \implies (2) \iff (3) \iff (4).$$

補題 5. (i) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が $z = a$ で連続. (ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

$\implies f(z)$ は $z = a$ で複素微分可能.

定義 2. ▶ $f(z)$ が $z = a$ で**正則**とは $f(z)$ は $z = a$ のある近傍の各点で複素微分可能のとき、即ち、 $\exists U(a)$ nbd of a ; $f(z)$ は $U(a)$ の各点で複素微分可能のとき。

▶ 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が D で正則であるとは、 $f(z)$ が D の各点 $a \in D$ で正則のとき。

定理 4 (ローマン・メンショフ). $f(z)$ は D で連続かつ D の各点で $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ とする。そのとき、 $f(z)$ は D の各点で複素微分可能、即ち、 D で正則である。

注意 4. $\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}$ の連続性を仮定すれば補題 5 より、 $f(z)$ は D の各点での複素微分可能性は従う、即ち、 D で正則となる。定理 4 は $\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}$ の連続性の仮定は不要であることを主張している点で意義深い。

3.2 解析性

定義 3. $z = a$ の近傍 $U(a)$ で定義された関数 $f(z)$ が $z = a$ で**解析的**であるとは、 $z = a$ 中心、半径 $r > 0$ の閉円板 $\overline{\Delta}(a; r) \subset U$ が存在し、 $f(z)$ は $\overline{\Delta}(a; r)$ で一様収束する冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

と (一意的に) 表される。ここに、 $\frac{1}{r} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 。

注意 5 (アーベルの定理). $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ が一点 $z = z_0 \neq a$ で絶対収束するならば、 $f(z)$ は $\Delta(a; |z_0 - a|)$ で絶対一様収束する。

Proof. $|z - a| < |z_0 - a|$ なら、 $\left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right| < 1$ より、

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z_0 - a|^n \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z_0 - a|^n < +\infty$$

□

命題 4. 冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ が開円板 $\Delta(a; R)$ で (広義一様) 収束するとする. そのとき,

(1) $f(z)$ は $\Delta(a; R)$ で複素微分可能, 即ち, $f(z)$ は $\Delta(a; R)$ で正則である.

(2) $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1} < \infty$, $z \in \Delta(a; R)$ (広義一様収束). 特に, 冪級数 $f(z)$ は無限回複素微分可能である.

定義 4. $z = a$ の近傍 $U(a)$ で定義された関数 $f(z)$ が $z = a$ で**解析的**であるとは, $z = a$ 中心, 半径 $r > 0$ の円板 $\Delta(a; r) \subset U(a)$ が存在して, $f(z)$ は $\Delta(a; r)$ で広義一様収束する冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ で表されるとき. また, 領域 D 上の関数が解析的であるとは, $f(z)$ が D の各点で解析的であるとき.

定理 5 (コーシーの積分定理+積分公式). 単純閉曲線 C で囲まれた領域 D で正則かつ $\bar{D}$ で連続な関数 $f(z)$ について

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

また, $z \in D$ に対し,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

証明. 実際は複素平面内の三角形 T の内部で正則かつ $\bar{T}$ で連続な正則関数 $f(z)$ に対して $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ を示す (グルサの方法). 次に, 領域 D を多角形で近似し, 多角形領域に対してコーシーの積分定理を示し, 最後に極限操作を行うことにより求める定理を得る.

定理 6. $f(z)$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された関数とする. そのとき,

$$f(z) \text{ は } D \text{ で正則} \iff f(z) \text{ は } D \text{ で解析的}$$

証明. $f(z)$ が D で正則ならば $\forall a \in D$ に対して, 閉円板 $\bar{\Delta}(a; r) \subset D$ が存在し, $\int_C f(z) dz = 0$ (コーシーの積分定理), 但し, $C = \{|z-a| = r\}, |z-a| < r$

なる z に対し, コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

を得る. $C = \{|\zeta-a|=r\}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a) \left\{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right\}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \left(c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0,1,2,\dots) \right) \end{aligned}$$

は $\Delta(a; r)$ で広義一様収束. ゆえに, $f(z)$ は解析的. 逆に, 解析性から正則性は命題 4 による.

定義 5. 点 $z = a$ が関数 $f(z)$ の**解析的特異点**であるとは, 開円板 $\Delta(a; r)$ が存在し, $f(z)$ が $\Delta^*(a; r) = \Delta(a; r) \setminus \{a\}$ で正則のときをいう. または, 開円板 $\Delta(a; r)$ が存在し, $\forall r' < |z-a| < \forall r'' < r$ で一様収束する級数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

で表されるとき (ローラン展開という)

注意 6.

- ▶ 第 1 種解析的特異点 (除去可能特異点) $\iff c_{-n} = 0 \ (n \geq 1)$
- ▶ 第 2 種解析的特異点 (極) $\iff \exists N; c_{-n} = 0 \ (\forall n > N), c_{-N} \neq 0$
- ▶ 第 3 種解析的特異点 (真性特異点) $\iff$ 第 1 種, 第 2 種以外の特異点

3.2.1 有理型関数

$f(z)$ が開集合 $a \in D \subset \mathbb{C}$ で有理型 (meromorphic) とは, $\exists \epsilon > 0$ が存在して

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (0 < |z-a| < \epsilon)$$

とローラン展開されるときをいう。但し、 $c_{-N} \neq 0$. この $z = a$ を $f(z)$ の極という。 $P(f)$ にて $f(z)$ の極全体の集合とすると、 $P(f)$ は孤立点からなる。また、 $z = a$ が $f(z)$ の極ならば

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

今、 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N}$ ($g(a) \neq 0$) と表せるので、 $f(z)$ は円板 $|z-a| < \epsilon$ から拡張された複素平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ への正則写像

$$f : \Delta(a; \epsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \epsilon\} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

を与える。 w を $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ の周りの局所座標とすれば、

$$w = \frac{(z-a)^N}{g(z)}, \quad (g(a) \neq 0)$$

と表され、 w は z の正則関数である。 こうして、 D 上の有理型関数 $f(z)$ は拡張された複素平面 $\overline{\mathbb{C}}$ への正則写像

$$f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$$

と同一視できる。 また、 写像 $\varphi : \Delta(a; \epsilon) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を $\varphi(z) = (g(z) : (z-a)^N)$ で定義すると φ は (well-defined) 正則写像である。

注意 7. $\Delta^*(a; \epsilon) = \Delta(a; \epsilon) \setminus \{a\}$ とおく。

- (1) $f(z)$ が $\Delta^*(a; \epsilon)$ で有界ならば $z = a$ は除去可能特異点で $f(a) = c_0$.
- (2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ならば $z = a$ は極.
- (3) $z = a$ が真性特異点 ならば $\overline{f(\Delta^*(a; \epsilon))} = \mathbb{C}$ (カソラーチ・ヴァリエルストラスの定理)
- (4) $z = a$ が真性特異点 ならば $f(\Delta^*(a; \epsilon))$ は高々一つの値を除き全ての値をとる (ピカールの大定理)

3.3 正則関数の風景

定理 7. $f(z)$ を領域 D で 定数でない 正則関数とする.

- (1) $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ は開写像である.
- (2) $f(z)$ のゼロ点集合 $N(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}$ は孤立点からなる (集積点をもたない).
- (3) $|f(z)|$ は D の内点で最大値を取らない. D で $f(z) \neq 0$ ならば $|f(z)|$ は内点で最小値も取らない.
- (4) 全平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数は定数関数しかない.

注意 8. 複素関数論の三種神器はコーシーの積分定理と正規族と等角写像

4 楕円関数

$f(z)$ は ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数とする。即ち,

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \quad \text{for } \forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

定義 6. $f(z)$ の位数とは, ある $a \in \mathbb{C}$ に対し, 周期平行四辺形

$$\Pi_a = \{a + \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2 \mid 0 \leq \epsilon < 1, 0 \leq \delta < 1\}$$

内にある重複を許した極の数をいう。

但し, a は $f(z)$ の零点や極が Π_a の境界に来ないように原点 0 から少しずらして取った。これは, $f(z)$ の極や零点の集合が孤立していることから可能である。

補題 6. $f(z)$ を ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数とする。 $\Lambda := \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ とおく。 $f(z)$ を Π_a での有理型関数とみて, $f(z)$ の極および零点は Π_a の境界上にこないように点 $a \in \mathbb{C}$ を選ぶ。

- (1) $a \neq a'$ に対し, Π_a における $f(z)$ の極の数と $\Pi_{a'}$ における $f(z)$ の極の数は同じである。
- (2) $f(z)$ が極をもたなければ定数関数である (極をもたない楕円関数は定数に限る)。
- (3) $f(z)$ の留数の和は零である (楕円関数の留数の和は 0 である)。
- (4) $f(z)$ の極の位数は 1 でない (位数 1 の楕円関数は存在しない)。
- (5) $f(z)$ は極と同じ個数だけ零点 (重複許す) を持つ。 $f(z)$ の極集合を $P(f)$, 零点集合を $N(f)$ とおくと,

$$P(f) - N(f) \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

証明. (1) $b_1, \dots, b_k$ を Π_a 内の極とする。そのとき, $b_j - a' = m\omega_1 + n\omega_2 + \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2$ をみたす $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $0 \leq \epsilon, \delta < 1$ が存在する。 $b_j^* =$

$a' + \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2$ とおくと $b_j^* \in \Pi_{a'}$ を得る. また, $b_j^* - b_j = m\omega_1 + n\omega_2$ より, $f(b_j^*) = f(b_j) = \infty$. よって, $b_j^* \in \Pi_{a'}$ は $f(z)$ の極である. 故に, $\{b_1^*, b_2^*, \dots, b_k^*\}$ は $f(z)$ の $\Pi_{a'}$ 内の極である. $\square$

- (2) $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則かつ, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $\exists z^* \in \Pi_a$ があって, $f(z) = f(z^*)$ を得る.

$$|f(z)| \leq \max_{z^* \in \Pi_a} |f(z^*)| < +\infty \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

より, $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有界な正則関数である. リューヴィルの定理より $f(z)$ は定数である.

- (3) $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ を $f(z)$ の極で Π_a の境界 $\partial\Pi_a$ 上にないとする. $\partial\Pi_a = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, 但し

$$\begin{cases} C_1 : z(t) = a + t\omega_1 & (0 \leq t \leq 1) \\ C_2 : z(t) = a + \omega_1 + t\omega_2 & (0 \leq t \leq 1) \\ C_3 : z(t) = a + \omega_1(1-t) + \omega_2 & (0 \leq t \leq 1) \\ C_4 : z(t) = a + (1-t)\omega_2 & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

留数定理より

$$\sum_{j=1}^k \text{Res}(f; b_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Pi_a} f(z) dz$$

$f(z)$ の周期性 $f(a + (1-t)\omega_1 + \omega_2) = f(a - (1-t)\omega_1 + \omega_2) = f(a + (1-t)\omega_1)$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \int_{C_3} f(z) dz &= \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_1 + \omega_2)(-\omega_1 dt) \\ &= \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_1)(-\omega_1 dt) \\ &= - \int_0^1 f(a + s\omega_1)(\omega_1 dt) \quad \because s = 1-t \\ &= - \int_{C_1} f(z) dz \end{aligned}$$

を得る同様に $\int_{C_2} f(z) dz = - \int_{C_4}$

$$\therefore \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z) dz = \int_{\partial \Pi_a} f(z) dz = 0$$

(4) $f(z)$ を一位の極をもつ楕円関数とすれば, 点 $\alpha \in \Pi_a$ が存在し,

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - \alpha)^k \quad (c_{-1} \neq 0) \quad \text{near } z = a$$

$$\therefore \text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} \neq 0$$

これは (3) に反する.

(5) $f(z)$ の Π_a 内の (重複を許した) 極集合を $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, 零点集合を $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ とする. これらの点は a を適当に選ぶことにより境界 $\partial \Pi_a$ 上にはないとしてよい. $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とおく. 留数定理より,

$$n - m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

および

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

今,

$$\begin{aligned} f'(z + \omega) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + \omega + h) - f(z + \omega)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= f'(z) \end{aligned}$$

よって, $f'(z)$ もまた楕円関数である. こうして, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ もまた楕円関数である. 故に

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= \int_0^1 \frac{(a + (1-t)\omega_1 + \omega_2)f'(a + (1-t)\omega_1 + \omega_2)}{f(a + (1-t)\omega_1 + \omega_2)} (-\omega_1 dt) \\
&= \int_0^1 \frac{(a + (1-t)\omega_1 + \omega_2)f'(a + (1-t)\omega_1)}{f(a + (1-t)\omega_1)} (-\omega_1 dt) \\
&= \int_1^0 \frac{(a + s\omega_1 + \omega_2)f'(a + s\omega_1)}{f(a + s\omega_1)} (-\omega_1) (-ds) \\
&= \int_0^1 \frac{(a + s\omega_1 + \omega_2)f'(a + s\omega_1)}{f(a + s\omega_1)} (-\omega_1 ds) \\
&= -\int_0^1 \frac{(a + s\omega_1)f'(a + s\omega_1)}{f(a + s\omega_1)} (\omega_1 ds) - \omega_2 \int_0^1 \frac{f'(a + s\omega_1)}{f(a + s\omega_1)} (\omega_1 ds) \\
&= -\int_{C_1} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz - \omega_2 \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_3} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = -\omega_2 \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz
\end{aligned}$$

同様に,

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+C_4} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = -\omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

従って,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= -\omega_2 \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= -\omega_2 \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz
\end{aligned}$$

同様の計算により,

$$\int_{C_1+C_3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0, \quad \int_{C_2+C_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

を得る.

$$\therefore \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

であることが容易に確かめられる. これより, 零点と極の位数は等しいことが分かる. よって, $m = n$. 以上の事から

$$\therefore \sum_{k=1}^m \beta_k - \sum_{k=1}^m \alpha_k = -\omega_2 \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$w = f(z)$ とおき, $\begin{cases} \gamma_1(t) = f(C_1) = f(a + t\omega_1) & (0 \leq t \leq 1) \\ \gamma_2(t) = f(C_2) = f(a + \omega_1 + t\omega_2) & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$ とおく. このとき, $f'(z)$ の極や零点は孤立点ゆえ, $C = \partial\Pi_a$ 上 $f'(z) \neq 0$ となるように, 予め a を選んでおけば, $\gamma_i = f(C_i)$ は滑らかな閉曲線である. 実際,

$$\begin{aligned}\gamma_1(0) &= f(a) = f(a + \omega_1) = \gamma_1(1) \\ \gamma_2(0) &= f(a + \omega_1) = f(a + \omega_1 + \omega_2) = \gamma_2(1) = f(a)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} = n_1 \in \mathbb{Z}$$

同様に

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = n_2 \in \mathbb{Z}$$

故に,

$$\sum_{k=1}^m \beta_k - \sum_{k=1}^m \alpha_k = -n_1\omega_2 + n_2\omega_1 \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

4.1 Weierstrass の p-関数

4.1.1

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

は形式的には $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 (Weierstrass の p-関数) である.

補題 7. $p(z)$ は $\mathbb{C}$ で広義一様収束する.

証明. $K \subset \mathbb{C}$ を任意のコンパクト集合とする. そのとき, $R > 0$ が存在し, $K \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ とできる. よって, $p(z)$ が $|z| \leq R$ で一様収束することを示せばよい. $\sum_{\substack{\omega \neq 0 \\ \omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)}} = \sum_{|z| \leq 2R} + \sum_{|z| > 2R}$ であり, $\{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) : |\omega| \leq 2R\}$ は有限個の元からなる集合ゆえ, $\sum_{|z| \leq 2R}$ は有限和である (有理関数).

Claim 7. 無限級数 $\sum_{|\omega| > 2R}$ は $|z| \leq R$ で一様収束する.

$$\blacktriangleright \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega-z)}{(z-\omega)^2\omega^2} \right|$$

- $|\omega| > 2R \geq 2|z| \quad \therefore |z| < \frac{1}{2}|\omega|$
- $|z-\omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{1}{2}|z|$
- $|2\omega-z| \leq 2|\omega| + |z| < 2|\omega| + \frac{1}{2}|\omega| = \frac{5}{2}|\omega|$

$$\blacktriangleright \therefore \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega-z)}{(z-\omega)^2\omega^2} \right| \leq \frac{|z| \frac{5}{2}|\omega|}{\frac{1}{4}|\omega|^2 |\omega|^2} \leq \frac{10R}{|\omega|^3}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ |\omega| > 2R}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right| &\leq \left| \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ |\omega| > 2R}} 10R \cdot \frac{1}{|\omega|^3} \right| \\ &\leq 10R \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^3} \end{aligned}$$

そこで

$$A_k := \{m\omega_1 + n\omega_2 : |m| \leq k, |n| \leq k\}$$

とおく.

補題 8. A_k 内の格子点の数は $(2k+1)^2$ 個である. $A_k - A_{k-1} = \partial A_k = m\omega_1 + n\omega_2 : |m| = k, |n| \leq k$. 特に, ∂A_k 上の格子点の数は $\#(\partial A_k) = 8k$. また, $d := \min\{|\omega| : \omega \in \partial A_1\}$ とおくと, $\omega \in \partial A_k \implies |\omega| \geq kd$.

$$(\spadesuit) \quad \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in \partial A_k} \right)$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^3} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in \partial A_k} \frac{1}{|\omega|^3} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in \partial A_k} \frac{1}{(kd)^3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{(kd)^3} = \frac{8}{d^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \end{aligned}$$

よって, $|z| \leq R$ で $p(z)$ は一様収束する. こうして, $p(z)$ は $\mathbb{C}$ で広義一様収束する.

4.1.2 $p(z)$ の性質

補題 9. (1) $p(z)$ は周期 ω_1, ω_2 をもつ楕円関数である.

(2) $p(z)$ の極は格子点 $\Lambda := \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ で, 極の位数は 2 である.

(3) $p(z)$ は偶関数である.

(4) $p(z) = p(z') \iff z \equiv \pm z' \pmod{\Lambda(\omega_1, \omega_2)}$

(5) $p'(z)$ は位数 3 の楕円関数で, 特に, 奇関数である

(6) $p'(z)$ の極は格子点 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ であり, 零点は, $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ である.

証明. (1) $\{\omega_0 - \omega : \omega \in \Lambda\} = \{-\omega : \omega \in \Lambda\} = \Lambda$ (for $0 \neq \omega_0 \in \Lambda$)
より,

$$\begin{aligned} p(z + \omega_0) &= \frac{1}{(z + \omega_0)^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \\ &= \frac{1}{(z - (-\omega_0))^2} + \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{0 \neq \omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq \omega_0}} \left\{ \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \\ &= p(z) \end{aligned}$$

(2) a を原点 $z = 0$ に十分近く取り, 周期平行四辺形 Π_a を考える. そのとき, $p(z)$ は Π_a の内部において原点 $z = 0$ を位数 2 の極に持つ.

(3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - (-\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{-\omega \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - (-\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega' \in \Lambda(\omega_1, \omega_2) \\ \omega' \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - \omega')^2} - \frac{1}{\omega'^2} \right\} \\
&= \mathbf{p}(z)
\end{aligned}$$

よって、 $\mathbf{p}(z)$ は偶関数である。ここで、 $\Lambda = \{-\omega : \omega \in \Lambda\}$ を用いた。

(4) $\mathbf{p}(z') = \infty$ ならば $\pm z' \in \Lambda \therefore \mathbf{p}(-z') = \infty$. $\mathbf{p}(z) = \mathbf{p}(z')$ ならば、 $\mathbf{p}(z) = \infty$ ゆえ、 $z, \pm z' \in \Lambda$. よって、 $z \pm z' \in \Lambda \therefore z \equiv \pm z' \pmod{\Lambda}$. 次に $\mathbf{p}(z') \neq \infty$ とする。 $f(z) = \mathbf{p}(z) - \mathbf{p}(z')$ とおく。 $\mathbf{p}(z)$ は 2 位の楕円関数より、 $f(z)$ は 2 位の楕円関数である。 よって、 $f(z) = 0$ となる点は π_a 内に 2 個ある。 $f(z') = f(-z') = 0$ ゆえ、 $\Pi_a \ni \exists z \sim \pm z'$.

(5)

$$\mathbf{p}'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{\Lambda \ni \omega \neq 0} \frac{2}{(z - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

よって、 $\mathbf{p}'(z)$ は格子点 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ を極に持ち、極の位数は 3 位である。

$$\mathbf{p}'(z + \omega_0) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3} = \mathbf{p}'(z)$$

より, $\mathfrak{p}'(z)$ もまた ω_1, ω_2 を周期とする 3 位の楕円関数である. また,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{p}'(-z) &= -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(-z - \omega)^3} \\
 &= 2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega)^3} \\
 &= 2 \sum_{-\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - (-\omega))^3} \\
 &= -(-2) \sum_{\omega' \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega')^3} \\
 &= -\mathfrak{p}'(z)
 \end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{p}'(z)$ は奇関数である.

- (6) $a \in \overset{\circ}{\Pi}_0$ で $\mathfrak{p}'(a) = 0$ とすれば, $z = a$ は $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a) = 0$ の重根である. $\mathfrak{p}(z)$ は $z = 0$ を 2 位の極にもつので, $a + a \equiv 0 + 0 = 0 \pmod{\Lambda}$ $\therefore 2a \in \Lambda$. $a = \epsilon\omega_1 + \delta\omega_2$ ($0 < \epsilon, \delta < 1$) と表されるので, $2a = 2\epsilon\omega_1 + 2\delta\omega_2 \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$. よって, $(\epsilon, \delta) = (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})$.
 こうして, $a = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$. $\mathfrak{p}'(z)$ は 3 位の楕円関数より, $\mathfrak{p}'(z)$ の Π_0 での零点の個数は重複も許して 3 個 (留数定理) である. よって, 各 a での $\mathfrak{p}'(z)$ の零点の位数は 1 である. 即ち, $\mathfrak{p}'(z)$ は Π_0 内で 3 個の位数 1 の零点 $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ をもつ.

$$e_1 = \mathfrak{p}(\frac{\omega_1}{2}), e_2 = \mathfrak{p}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}), e_3 = \mathfrak{p}(\frac{\omega_2}{2})$$

とおく.

補題 10. e_1, e_2, e_3 は互いに相異なる. 即ち, $e_1 \neq e_2, e_2 \neq e_3, e_3 \neq e_1$.

証明. $e_1 = e_3$ とする. $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\frac{\omega_1}{2}) = \mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\frac{\omega_2}{2})$ ゆえ, $\frac{\omega_1}{2}$ は $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\frac{\omega_2}{2})$ の重根であり, 結果, 2 位の楕円関数 $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\frac{\omega_2}{2})$ は重複も許して 4 個の零点 $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ (各 2 重根) をもつことになり矛盾. 同様の議論により $e_1 \neq e_2, e_2 \neq e_3$ を得る.

注意 9. $\forall a \in \left\{ \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2} \right\}$ をとる. そのとき, $z = a$ は $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a) = 0$ の 2 位の零点で, それ以外の a に対しては 1 位の零点である. $\{b \in \mathbb{C} : \mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(b) = 0; b \neq a\} = \{\pm b \bmod \Lambda\}$.

命題 5. 次の関係式が成り立つ.

$$\{\mathfrak{p}'(z)\}^2 = 4 \{\mathfrak{p}(z) - e_1\} \cdot \{\mathfrak{p}(z) - e_2\} \cdot \{\mathfrak{p}(z) - e_3\}$$

証明. 周期平行四辺形 Π_0 の内部で考える.

$$f(z) = \{\mathfrak{p}(z) - e_1\} \cdot \{\mathfrak{p}(z) - e_2\} \cdot \{\mathfrak{p}(z) - e_3\}$$

とおくと $f(z)$ は楕円関数である. $\left\{ \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2} \right\}$ はそれぞれ $f(z)$ の 2 位の零点で, $z = 0$ を 6 位の極にもつ. 一方, $\mathfrak{p}'(z)$ は $z = 0$ を 3 位の極にもつので, $(\mathfrak{p}'(z))^2$ は $z = 0$ を 6 位の極にもつ. 従って, $\frac{(\mathfrak{p}'(z))^2}{f(z)}$ は極が相殺されて $z = 0$ で正則である. また, $\left\{ \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2} \right\}$ は $\mathfrak{p}'(z)$ の位数 1 の零点ゆえ, これらは $(\mathfrak{p}'(z))^2$ の位数 2 の零点である. 従って, $f(z)$ の零点が $\frac{(\mathfrak{p}'(z))^2}{f(z)}$ の極である事を考慮すれば, 結果的に $\frac{(\mathfrak{p}'(z))^2}{f(z)}$ は極をもたない楕円関数である事が分かる. こうして, リューヴィルの定理から

$$\frac{\mathfrak{p}'(z)^2}{f(z)} = c \text{ (const.)} \quad \therefore \quad (\mathfrak{p}'(z))^2 = cf(z)$$

次に,

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + (\text{holomorphic near } z = 0)$$

より, $f(z)$ の $z = 0$ でのローラン展開は $f(z) = \frac{1}{z^6} + \dots$ と表される.

$$\mathfrak{p}'(z) = -\frac{2}{z^3} + (\text{holomorphic near } z = 0)$$

より, $(\mathfrak{p}'(z))^2$ の $z = 0$ でのローラン展開は $(\mathfrak{p}'(z))^2 = \frac{4}{z^6} + \dots$ と表される.

こうして, 係数を比較すれば $c = 4$ を得る. 以上により,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}'(z)^2 &= 4(\mathfrak{p}(z) - e_1) \cdot (\mathfrak{p}(z) - e_2) \cdot (\mathfrak{p}(z) - e_3) \\ &= 4\{\mathfrak{p}(z)^3 - (e_1 + e_2 + e_3)\mathfrak{p}(z)^2 + (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)\mathfrak{p}(z) - e_1e_2e_3\} \end{aligned}$$

が示された.

命題 6.

$$g_2 = 60 \sum_{\omega} ' \frac{1}{\omega^4} = 60 \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^4} \quad , \quad g_3 = 140 \sum_{\omega} ' \frac{1}{\omega^6} = 140 \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^6}$$

とおくと，関係式

$$(\mathfrak{p}'(z))^2 = 4(\mathfrak{p}(z))^3 - g_2 \mathfrak{p}(z) - g_3$$

が成り立つ.

補題 11.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

は $\mathbb{C}$ で有理型，極は Λ の点でそれは留数 1 の 1 位の極である．任意の

証明. 任意に $R > 0$ をとり， $|z| < R$ で考える． $|z| < |\omega|$ で

$$\frac{1}{z - \omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = -\frac{1}{\omega} - \frac{z}{\omega^2} - \frac{z^2}{\omega^3} - \dots$$

$$\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} = \frac{z^2}{\omega^2(z - \omega)}$$

となる． $|z| < R$, $|\omega| > 2R$ とすると， $2|z| < 2R < |\omega|$ より， $|z - \omega| \geq |\omega| - |z| > \frac{|\omega|}{2}$. よって，

$$\left| \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z^2}{\omega^2(z - \omega)} \right| < \frac{2R^2}{|\omega|^3}$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ 0 \neq |\omega| \leq 2R}} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ 2R < |\omega|}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

$$\left| \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ 2R < |\omega|}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \right| < \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ 2R < |\omega|}} \frac{2R^2}{|\omega|^3} < +\infty$$

よって， $\zeta(z)$ は $|z| < R$ で一様収束する． $R > 0$ は任意より， $\zeta(z)$ は $\mathbb{C}$ で収束する．

特に,

補題 12. $\mathfrak{p}(z) = -\zeta(z)$.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

は $z = 0$ を 1 位の極にもつ. そこで, $z = 0$ の周りでローラン展開する. このとき, 任意の $\omega \neq 0$ に対し, $|z| < |\omega|$ なる原点の近傍を考える. $G_n = \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ 0 \neq \omega}} \frac{1}{\omega^n}$

とおくと,

$m\omega \in \Lambda$ および n が奇数なら $\omega^n + (-\omega)^n = 0$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{z^2}{\omega^3} + \frac{z^3}{\omega^4} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z} - G_3 z^2 - G_4 z^3 + \cdots \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - g_4 z^3 - G_6 z^5 - \cdots \\ \mathfrak{p}(z) &= -\zeta(z) = \frac{1}{z^2} + 3 G_4 z^2 + 5 G_6 z^4 + \cdots + \\ \mathfrak{p}'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6 G_4 z + 20 G_6 z^3 + \cdots \\ \mathfrak{p}'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 24 \frac{G_4}{z^2} - 80 G_6 + \cdots \\ \mathfrak{p}(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 9 \frac{G_4}{z^2} + 15 G_6 + \cdots \end{aligned}$$

を得る.

$$\therefore \mathfrak{p}'(z)^2 - 4 \mathfrak{p}(z)^3 = -60 \frac{G_4}{z^2} - 140 G_6 + \cdots$$

$$\therefore \mathfrak{p}'(z)^2 - 4 \mathfrak{p}(z)^3 + 60 G_4 \mathfrak{p}(z) = -140 G_6$$

右辺は $z = 0$ で正則関数, 左辺は $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ を極にもつ楕円関数であるので, リューヴィルの定理より右辺は定数関数である. 以上より,

$$\mathfrak{p}'(z)^2 - 4 \mathfrak{p}(z)^3 + 60 G_4 \mathfrak{p}(z) + 140 G_6 = 0$$

そこで,

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2) = 60G_4, \quad g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2) = 140G_6$$

とおけば, 最終的に

$$(\spadesuit) \quad \mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}(z) - g_3 = 0$$

を得る. 一方,

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}(z) - g_3 = 4(\mathfrak{p}(z) - e_1)(\mathfrak{p}(z) - e_2)(\mathfrak{p}(z) - e_3)$$

より,

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4} \\ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4} \end{cases}$$

簡単な計算により

$$\Delta = (e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$$

を得る. 各 e_i ($i = 1, 2, 3$) は相異なるので,

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}'(z) - g_3, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

を得る.

4.1.3

$\mathfrak{p}(z)$ を $\mathbb{C}$ 上 $0 \neq \omega_1$, $0 \neq \omega_2$ ($\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$) を 2 重周期にもつ Weierstrass の $\mathfrak{p}$ 関数とする.

$$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{C}/\Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

を商正則写像とする.

補題 13. (1) 楕円曲線 (1 次元複素トーラス) $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ 上の有理型関数.

(2) $\mathfrak{p}([z])$ は正則写像 $\mathfrak{p} : \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を定める.

(3) $p : \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は分岐 2 重被覆 ($2 : 1$ 全射正則写像) で分岐点は $[0], [e_1] = [\frac{\omega_1}{2}], [e_2] = [\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}], [e_3] = [\frac{\omega_2}{2}]$ の相異なる 4 点である.

証明. (1) $[z] \in \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ に対して, $p([z]) := p(z)$ で定義すれば,

$$p(z + \omega) = p(z) \quad \text{for } \omega \in \Lambda$$

より, $p([z])$ は代表元の取り方に関係なく定義される (well-defined) 有理型関数である. $p([0]) = \infty \in \overline{\mathbb{C}} \quad ([0] = \pi(\Lambda))$.

$$(2) \quad p([z]) = \begin{cases} (p(z) : 1) \in \mathbb{P}^1 & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \\ (1 : 0) \in \mathbb{P}^1 & \text{if } z = \omega \in \Lambda \end{cases} \quad \text{と定義すれば}$$

$$\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$$

は正則写像を与える.

リーマン面上の有理型関数はリーマン球面 (射影直線) $\mathbb{P}^1$ への正則写像を定める.

(3) $p(z)$ は格子点 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ を 2 位の極のもつ. 即ち, $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : p(z) = \infty\}$. この事は $p^{-1}(1 : 0) = [0]$ (2 重点) を意味する. 一方, 周期平行四辺形 Π_0 において $a \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ に対して $p(z) = p(a)$ となる点は $a \in \{\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}\}$ で 2 重根でそれ以外は重根でない (異なる 2 つの根). この事から, $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$ は $\{[e_\infty], [e_1], [e_2], [e_3]\}$ を分岐点にもつ 2 重被覆である.

4.1.4

$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{H}$ とおく. $(\times \frac{1}{\omega_1}) : \Lambda(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\tau) := \Lambda(1, \tau) := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ より, 以後, 簡単のため $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau \in \mathbb{H}$ とする.

命題 7. $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ に対して,

$$\mathbb{T}(\tau) \cong \mathbb{T}(\tau') \iff \tau' = \tau^\sigma = \frac{p + q\tau}{r + s\tau}$$

但し,

$$\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

証明. $0 \neq \omega'_1, 0 \neq \omega'_2, \operatorname{Im}(\frac{\omega'_1}{\omega'_2}) > 0$ に対し,

$$\Lambda(\omega'_1, \omega'_2) = \Lambda(\omega_1, \omega_2) \iff \mathbb{T}(\omega'_1, \omega'_2) = \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$$

$$\Lambda(\omega'_1, \omega'_2) = \Lambda(\omega_1, \omega_2) \iff \begin{cases} \omega'_2 = p\omega_2 + q\omega_1 \\ \omega'_1 = r\omega_2 + s\omega_1 \end{cases}$$

但し, $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ $ps - qr = \pm 1$.

$$\tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1}, \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

に注意すれば,

$$\tau' = \frac{p\omega_2 + q\omega_1}{r\omega_2 + s\omega_1} = \frac{p\tau + q}{r\tau + s}$$

ここで,

$$0 < \operatorname{Im} \tau' = \frac{(ps - rq) \operatorname{Im} \tau}{|r\tau + s|^2}$$

かつ $\operatorname{Im} \tau > 0$ ゆえ, $ps - rq = 1$. 即ち,

$$\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$$

である. 一方, $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ に対し, $\mathbb{T}(\tau) \cong \mathbb{T}(\tau')$ ならば, 双正則写像 $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を誘導する. $\varphi(0) = 0$ としてよい. このとき, $\varphi(z) = \lambda \cdot z$ ($\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$) と表される.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(1, \tau') & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}(1, \tau') \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \bar{\varphi} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda(1, \tau) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}(1, \tau) \longrightarrow 0 \end{array}$$

よって, $\exists p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ ($ps - qr = \pm 1$)

$$\begin{cases} \varphi(\tau') = \lambda \cdot \tau' = p\tau + q \\ \varphi(1) = \lambda = r\tau + s \end{cases}$$

$$\therefore \tau' = \frac{p\tau + q}{r\tau + s}$$

$\operatorname{Im} \tau' > 0$ より, $ps - qr = 1$. $\therefore \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$

4.1.5

- ▶ $\mathfrak{p}(z) := \mathfrak{p}_\tau(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda(\tau) \\ \omega \neq 0}} \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$
- ▶ $\mathbb{T}(\tau) := \mathbb{T}(1, \tau)$
- ▶ $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}(\tau)$
- ▶ $\pi(\Lambda(\tau)) = [0] \in \mathbb{T}(\tau)$
- ▶ $[0], [e_1] = [\frac{1}{2}], [e_2] = [\frac{1+\tau}{2}], [e_3] = [\frac{\tau}{2}]$
- ▶ $g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^4}$
- ▶ $g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^6}$
- ▶ $\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2(\tau)\mathfrak{p}(z) - g_3(\tau), \quad g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 \neq 0$

命題 8. $g_2(\tau), g_3(\tau)$ は上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数である.

証明. $g_2(\tau)$ の正則性を示す. そのため, $g_2(\tau)$ が $\mathbb{H}$ 上広義一様収束する事を示す. $\mathbb{H}$ コンパクト集合はある矩形

$$K := \{\tau \in \mathbb{H} : -a \leq \operatorname{Re} \tau \leq a, 0 < b \leq \operatorname{Im} \tau \leq c\}$$

に含まれるので, この矩形 K 上で一様収束する事を示す. $\forall \tau \in K$ をとる. 原点 $z = 0$ と $-1 + \tau, -1, 1, 1 + \tau$ を頂点とする平行四辺形

$$\{\epsilon + \delta\tau : |\epsilon| < 1, |\delta| < 1\}$$

の周との最短距離を $d(\tau) > 0$ とする. $d(\tau) = \min\{\operatorname{Im} \tau, \frac{\operatorname{Im} \tau}{|\tau|}\} > 0$ とおき, $\rho := \rho(K) := \min\{d(\tau) : \tau \in K\}$ とおく. K はコンパクト集合で $\mathbb{H}$ に含まれるので $d(\tau) \geq \rho > 0$.

- ▶ $A_k = \{\omega : \omega = m + n\tau, |m| \leq k, |n| \leq k\}$

$$\blacktriangleright \#(A_k - A_{k-1}) = 8k$$

$$\blacktriangleright \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda(\tau)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{0 \neq \omega \in A_k - A_{k-1}} \right)$$

$\forall \omega \in A_k - A_{k-1}$ に対し, $|\omega| > kd \geq k\rho$.

$$\sum_{\omega \in A_k - A_{k-1}} \frac{1}{|\omega|^4} \leq \sum_{\omega \in A_k - A_{k-1}} \frac{1}{\rho^4} \cdot \frac{1}{k^4} < \frac{8k}{\rho^4} \cdot \frac{1}{k^4} = \frac{8}{\rho^4} \cdot \frac{1}{k^3}$$

$$g_2(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in A_k - A_{k-1}} \frac{1}{|\omega|^4} \right) < \frac{8}{\rho^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < +\infty$$

よって, K 上一様収束する. こうして $g_2(\tau)$ は上半平面 $\mathbb{H}$ で広義一様収束する. 故に, $g_2(\tau)$ は $\mathbb{H}$ で正則である.

そこで, $\Phi([z]) = \begin{cases} (\mathfrak{p}([z]) : \mathfrak{p}'([z]) : 1) \in \mathbb{P}^2 & \text{if } [z] \neq [0] \\ (0 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2 & \text{if } [z] = [0] \end{cases}$ で定義すると,

Φ は正則写像 $\Phi : \mathbb{T}(\tau) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を定める.

Claim 8. $\Phi : \mathbb{T}(\tau) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ は単射である.

実際, $\mathfrak{p}([z]) = \mathfrak{p}([a])$, & $\mathfrak{p}'([z]) = \mathfrak{p}'([a])$ とする.

$$\mathfrak{p}([z]) = \mathfrak{p}([a]) \iff \mathfrak{p}(z) = \mathfrak{p}(a) \iff z \equiv \pm a \pmod{\Lambda(1, \tau)}.$$

この z に対し, $\mathfrak{p}'([z]) = \mathfrak{p}'([a])$ を満たす. $\therefore \mathfrak{p}'(-a) = -\mathfrak{p}'(a) = \mathfrak{p}'(a)$. よって, $\mathfrak{p}'(a) = \mathfrak{p}(-a) = 0$. よって, $\pm a$ は $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a)$ の重根. これは, $\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(a)$ が 2 位の楕円関数であることに反する. 故に, $\Phi([z]) = \Phi([a])$ ならば $[z] = [a]$. $\square$

今, $C_\tau := \Phi(\mathbb{T}(\tau))$ とおくと,

$$C_\tau = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : z_1^2 z_2 = 4z_0^3 - g_2(\tau)z_0 z_2^2 - g_3(\tau)z_2^3, g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0\}$$

より, C_τ は $\mathbb{T}(\tau) \xrightarrow{\Phi} C_\tau$ (双正則同型) なる $\mathbb{P}^2$ 内の 非特異 3 次曲線である.

4.1.6

$$e_1 = \mathfrak{p}\left(\frac{1}{2}\right), \quad e_2 = \mathfrak{p}\left(\frac{1+\tau}{2}\right), \quad e_3 = \mathfrak{p}\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

とすれば, e_i ($i = 1, 2, 3$) は上半平面 $\mathbb{H}$ で正則な関数である. そこで,

$$\lambda = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}$$

とおけば, 各, e_i は互いに相異なるので, $\lambda = \lambda(\tau)$ はやはり上半平面で $\mathbb{H}$ で正則な関数である. 特に, $\lambda \neq 0, 1$, 即ち, λ は正則写像

$$\lambda : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

を定める.

$$\begin{cases} g_2(\tau) = (e_1 - e_3)^2 \cdot \frac{4}{3}(\lambda^2 - \lambda + 1) \\ g_3(\tau) = (e_1 - e_3)^3 \cdot \frac{4}{27}(\lambda + 1)(\lambda - 2)(2\lambda - 1) \end{cases}$$

$1 - \lambda = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$ に注意すれば

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2} \\ &= \frac{(e_1 - e_3)^6 \cdot \frac{64}{27}(\lambda(\tau)^2 - \lambda(\tau) + 1)^3}{16(e_2 - e_1)^2(e_3 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2} \\ &= \frac{4}{27} \frac{(\lambda(\tau)^2 - \lambda(\tau) + 1)^3}{\left(\frac{e_2 - e_1}{e_1 - e_3}\right)^2 \left(\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_3}\right)^2} \\ &= \frac{4}{27} \frac{(\lambda(\tau)^2 - \lambda(\tau) + 1)^3}{\lambda(\tau)^2(1 - \lambda(\tau))^2} \\ &=: \frac{4}{27} j(\lambda(\tau)) \end{aligned}$$

但し, $j(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理関数より, 正則写像 $j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を定める. 特に,

$$J : \mathbb{H} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \xrightarrow{j} \mathbb{C}$$

と分解される.

補題 14. $J(\tau)$ は上半平面 $\mathbb{H}$ で正則かつ $\forall \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対し

$$J(\tau^\sigma) = J(\tau)$$

が成立する。即ち、 $J(\tau)$ は商空間 $\mathfrak{H} = \mathbb{H} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ (リーマン面の構造が入る!) 上の正則関数 $J([\tau])$ を与える

$J : \mathfrak{H} \cong \mathbb{C} : [\tau] \mapsto J([\tau])$ は双正則同型であることが知られている。
また,

$$\lambda(\tau) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} : \tau \mapsto \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

は全射正則写像であることも知られている。

証明. $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対し $\tau^\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$.

$$\begin{aligned} g_2(\tau^\sigma) &= 60 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{\left(m + n \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)^4} \\ &= 60(c\tau + d)^4 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{\{(md + nb) + (mc + na)\tau\}^4} \\ &= (c\tau + d)^4 g_2(\tau) \\ g_3(\tau) &= (c\tau + d)^6 g_3(\tau) \\ J(\tau^\sigma) &= \frac{(c\tau + d)^{12}}{(c\tau + d)^{12}} \cdot \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2} = J(\tau) \end{aligned}$$

ここに,

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(md + nb, mc + na) : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\}$$

および $ad - bc = 1$ より

$$(md + nb, mc + na) = (0, 0) \iff (m, n) = (0, 0)$$

であることを用いた。

5 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の3次曲線

5.1 射影平面

$(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ に対して連比 $[z_0 : z_1 : z_2]$ の集合

$$\mathbb{P}^2 := \{[z_0 : z_1 : z_2] : (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3\}$$

を2次元射影空間 (射影平面) という. $(z_0, z_1, z_2) \neq (0, 0, 0)$ より,

$$U_i = \{z_i \neq 0\} \cap \mathbb{P}^2 \quad (0 \leq i \leq 2)$$

とおくと,

$$U_0 = \left\{ \left(1 : \frac{z_1}{z_0} : \frac{z_2}{z_0}\right) : (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3, z_0 \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}^2 \left(\frac{z_1}{z_0} : \frac{z_2}{z_0} \right) = \mathbb{C}(u_0, v_0)$$

$$U_1 = \left\{ \left(\frac{z_0}{z_1} : 1 : \frac{z_2}{z_1}\right) : (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3, z_1 \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}^2 \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1} \right) = \mathbb{C}(u_1, v_1)$$

$$U_2 = \left\{ \left(\frac{z_0}{z_2} : \frac{z_1}{z_2} : 1\right) : (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3, z_2 \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}^2 \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) = \mathbb{C}(u_2, v_2)$$

— $\mathbb{P}^2$ の多様体としての構造 —

$\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ は2次元 (コンパクト) 複素多様体で $\mathfrak{U} = \{(U_i, (u_i, v_i))\}$ は局所座標系で座標変換は:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{v_0} \\ v_1 = \frac{u_0}{u_0} \end{cases} \quad \text{on } U_0 \cap U_1 \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} u_2 = \frac{u_1}{v_1} \\ v_2 = \frac{1}{v_1} \end{cases} \quad \text{on } U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{v_2} \\ v_0 = \frac{u_2}{u_2} \end{cases} \quad \text{on } U_2 \cap U_0 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

1次元複素トーラス $\mathbb{T}(\tau)$ は平面3次曲線

$$C_\tau = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : z_1^2 z_2 = 4z_0^3 - g_2(\tau)z_0 z_2^2 - g_3(\tau)z_2^3, g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 \neq 0\}$$

と解析的に同型であった． $\mathbb{P}^2$ の座標の 1 次変換 $\mathbb{P}^2(z_0 : z_1 : z_2) \longrightarrow \mathbb{P}^2(w_0 : w_1 : w_2)$

$$\begin{cases} u_0 = z_0 - e_3 z_2 \\ u_1 = z_1 \\ u_2 = z_2 \end{cases}$$

$$C_\tau : z_1^2 z_2 = 4(z_0 - e_3 z_2)(z_0 - e_2 z_2)(z_0 - e_1 z_2)$$

と表されるので,

$$u_1^2 u_2 = 4u_0(u_0 - (e_2 - e_3)u_2)(u_0 - (e_1 - e_3)u_2)$$

$$\therefore \frac{u_1^2 u_2}{(e_1 - e_3)^3} = 4 \frac{u_0}{e_1 - e_3} \left(\frac{u_0}{e_1 - e_3} - \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} u_2 \right) \left(\frac{u_0}{e_1 - e_3} - \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_3} u_2 \right)$$

を得る．更に，1 次変換

$$\begin{cases} w_0 = \frac{u_0}{e_1 - e_3} \\ w_1 = \frac{u_1}{\sqrt{(e_1 - e_3)^3}} \\ w_2 = u_2 \end{cases}$$

により,

$$C(\lambda) : w_1^2 w_2 = 4w_0(w_0 - w_2)(w_0 - \lambda w_2)$$

を得る．以上より,

$$\tau = \omega_2 \omega_1 \in \mathbb{H}, \lambda = \frac{e_2(\tau) - e_3(\tau)}{e_1 - e_3(\tau)}$$

とおけば, $\lambda : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ は正則写像である．また, 単連結領域 $\mathbb{H}$ 上で $e_1 - e_3(\tau) \neq 0$ ゆえ, $\sqrt{e_1 - e_3(\tau)}$ は 1 価正則関数である．更に, 正則同型

$$\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \cong C_\tau \cong C(\lambda) \subset \mathbb{P}^2$$

を得る．ここで, $\tau \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

5.1.1

$\mathbb{P}^2$ の同次座標を $(z_0 : z_1 : z_2)$ とし,

$$\begin{cases} U_0 = \{z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) =: \mathbb{C}^2(x_0, y_0) \\ U_1 = \{z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2\left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right) =: \mathbb{C}^2(x_1, y_1) \\ U_2 = \{z_2 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) =: \mathbb{C}^2(x_2, y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{x_0} \\ y_1 = \frac{y_0}{x_0} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = \frac{x_1}{y_1} \\ y_2 = \frac{1}{y_1} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{y_2}{x_2} \\ y_1 = \frac{1}{x_2} \end{cases}$$

$P(z_0, z_1, z_2) = \sum_{i+j+k=d} z_0^i z_1^j z_2^k$ を d 次の同次多項式とする. $d = \deg P$ を P の次数という. そのとき,

$$P(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^d P(z_0, z_1, z_2) \quad \text{for } \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$$

また, 次の関係式が成り立つ.

命題 9 (Euler の関係式).

$$z_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(z_0, z_1, z_2) + z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(z_0, z_1, z_2) + z_2 \frac{\partial P}{\partial z_2}(z_0, z_1, z_2) = dP(z_0, z_1, z_2)$$

P が可約であるとは, $P = P_1 \cdot P_2$ ($0 < \deg P_i < d$) と分解されるときをいう. 可約でないとき既約という. 今, $P(z_0, z_1, z_2)$ は $\mathbb{P}^2$ 上の関数として意味をなさないが, 零点集合

$$C_d := \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

は集合として意味をなす. この C_d を d 次の (射影) 代数曲線とよぶ. また, P が既約な同次多項式 $P_1, P_2, \dots, P_r$ の積:

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdots P_r \quad (0 < \deg P_i = d_i < d)$$

に分解されるとき

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_r = d$$

が成り立つ. このとき, C_d も

$$C_d = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$$

と射影曲線の和集合に分解される (既約分解という). 各 C_i を C_d の既約成分という.

5.1.2

$$C = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

を既約な射影代数曲線とする. C 上の点 $\alpha := (a_0 : a_1 : a_2) \in C$ をとる. 特に $a_2 \neq 0$ と仮定する.

$$C_0 = C \cap \{z_2 \neq 0\} \subset \mathbb{C}^2(u, v) \quad u = \frac{z_0}{z_2}, \quad v = \frac{z_1}{z_2}$$

とおく. そのとき,

$$z_2^d P(u, v, 1) = P(z_0, z_1, z_2).$$

C_0 が $(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1)$ で特異性をもつ, または, C_0 が $(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1)$ を特異点にもつとは,

$$(*) \quad \frac{\partial P}{\partial u}(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1) = \frac{\partial P}{\partial v}(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1) = 0$$

を満たす時をいう.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial u}(u, v, 1) = z_2 \frac{\partial P}{\partial z_0}(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}, 1) \\ \frac{\partial P}{\partial v}(u, v, 1) = z_2 \frac{\partial P}{\partial z_1}(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}, 1) \end{cases}$$

に注意すれば, $(*)$ より,

$$a_2 \frac{\partial P}{\partial z_0}(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1) = a_2 \frac{\partial P}{\partial z_1}(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1) = 0$$

を得る.

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0, a_1, a_2) = \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0, a_1, a_2) = 0$$

一方, Euler の関係式より,

$$a_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0, a_1, a_2) + a_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0, a_1, a_2) + a_2 \frac{\partial P}{\partial z_2}(a_0, a_1, a_2) = 0.$$

今, $a_2 \neq 0$ より,

$$\frac{\partial P}{\partial z_2}(a_0, a_1, a_2) = 0$$

こうして, 最終的に特異性の定義:

$$(a_0 : a_1 : a_2) \in C \quad \text{が特異点} \stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0, a_1, a_2) = \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0, a_1, a_2) = \frac{\partial P}{\partial z_2}(a_0, a_1, a_2) = 0.$$

を得る.

5.1.3

一方, $(a_0 : a_1 : a_2) \in C$ を非特異点とする. この場合も $a_2 \neq 0$ とする. 点 $(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1)$ での接線の方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u - \frac{a_0}{a_2}) + \frac{\partial P}{\partial v}(v - \frac{a_1}{a_2}) = 0$$

である. 同様の議論により,

$$z_2 \frac{\partial P}{\partial z_0}(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1)(\frac{z_0}{z_2} - \frac{a_0}{a_2}) + z_2 \frac{\partial P}{\partial z_1}(\frac{z_1}{z_2} - \frac{a_1}{a_2}) = 0$$

よって,

$$z_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1) + z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1) - \frac{z_2}{a_2} \left(a_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1) + a_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1) \right) = 0$$

を得る. 両辺に a_2^{d-1} を乗じて,

$$z_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0 : a_1 : a_2) + z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0 : a_1 : a_2) - \frac{z_2}{a_2} \left(a_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0 : a_1 : a_2) + a_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0 : a_1 : a_2) \right) = 0.$$

Euler の関係式から

$$z_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0 : a_1 : a_2) + z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0 : a_1 : a_2) - \frac{z_2}{a_2} \left(-a_2 \frac{\partial P}{\partial z_2}(a_0, a_1, a_2) \right) = 0$$

こうして, 最終的に C 上の点 $(a_0 : a_1 : a_2) \in C$ での接線の方程式は

$$z_0 \frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0 : a_1 : a_2) + z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0 : a_1 : a_2) + z_2 \frac{\partial P}{\partial z_2}(a_0 : a_1 : a_2) = 0$$

と表される.

5.1.4 非特異曲線と陰関数の定理

2 複素変数既約多項式 $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ に対し, 複素アフィン曲線 $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ を考える. $(a, b) \in C$ を非特異な点 (通常点) とする. そのとき,

$$\begin{cases} f(a, b) = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) \neq (0, 0) \end{cases}$$

特に, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ としてよい. $f(a, y)$ は y の正則関数として $y = b$ を孤立零点にもつ (一致の定理). また, $y = b$ の周りのテーラー展開は $f(a, b) = 0$ より,

$$f(a, y) = f_y(a, b)(y-b) + c_2(y-b)^2 + \cdots = (y-b) \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + c_2(y-b) + \cdots \right) =: (y-b) g(a, y)$$

と表される. 但し, $g(a, y)$ は $y = b$ のある近傍 $\exists V(b; r_2) := \{|y - b| < r_2\}$ で正則な関数で, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ より, $g(a, b) \neq 0$. よって, $\delta_2 < r_2$ を十分小さく取れば, $f(a, y)$ は $V(b, \delta_2)$ に於いて, $y = b$ を一位の零点にもつ. 特に, 境界 $\gamma = \{|y - b| = \delta_2\}$ 上 $g(a, y) \neq 0$ とできる. $a \times \gamma$ はコンパクトゆえ, $x = a$ の近傍 $U(a, \delta_1)$ が存在し, $U(a, \delta_1) \times \gamma$ 上, $f(x, y) \neq 0$ とできる. そこで, $|x - a| < \delta_1$ なる任意の x に対し,

$$(*) \quad N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_y(x, y)}{f(x, y)} dy$$

$$(**) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{y f_y(x, y)}{f(x, y)} dy$$

とおく. そのとき, $f(x, y)$ は $\{|x - a| \leq \delta_1\} \times \gamma$ で非零かつ一様有界なので, 積分と微分の順序が交換される (フビニの定理)

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_y(x, y)}{f(x, y)} \right) dy$$

を得る. 被積分項は x の正則関数なので 0 である. よって, $\frac{\partial N(x)}{\partial x} = 0$ となり, $N(x)$ は $U(a, \delta_1)$ で正則な関数である. 一方, $N(x)$ は x を固定した時の $f(x, y) = 0$ の $V(b, \delta_2)$ 内の零点の個数ゆえ整数値である. $N(a) = 1$ (一位の零であった) ゆえ, 一致の定理から $N(x) \equiv 1$ である. よって, $x \in U$ を固定した時, $f(x, y) = 0$ は V 内に唯一つの一位の零点をもつ. それを $\varphi(x)$ と表すと $(**)$ が成立する. このとき, $f(x, y) = 0$ を y について解いたときの解より, $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ である. この時点では $\varphi(x)$ は単なる x の関数に過ぎないが, 同様の議論 (フビニの定理) から $\varphi(x)$ は $x \in U$ の正則関数である事がわかる. 特に, $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$ を得る. $\varphi(a) = b$ なので, 結果として,

補題 15. $(a, b) \in C$ に対し, $f_y(a, b) \neq 0$ ならば, $y = b$ の近傍 $V, x = a$ の近傍 U および U で正則な関数 $\varphi(x)$ が存在して $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ が成立する. 即ち

$$C \cap (U \times V) = \{(x, y) \in U \times V : y = \varphi(x)\}$$

を得る. 特に, $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$

要するに C は局所的に x の正則関数 $\varphi(x)$ のグラフ $y = \varphi(x)$ として表されるという事. よって, $(a, b) = (a, \varphi(a))$ での接線の方程式は

$$y = \varphi'(a)(x - a) + \varphi(a) \quad \therefore \quad y = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}(x - a) + b$$

$$\therefore \quad f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

が求める接線の方程式である.

5.1.5

$\mathbb{P}^2$ の座標の 1 次変換 $\varphi: \mathbb{P}^2(w_0 : w_1 : w_2) \longrightarrow \mathbb{P}^2(z_0 : z_1 : z_2)$:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

に対し,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_0} \\ \frac{\partial}{\partial w_1} \\ \frac{\partial}{\partial w_2} \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_0} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix}$$

を得る. そこで, 変数 $z = (z_0 : z_1 : z_2)$, $w = (w_0 : w_1 : w_2)$ に関する Hessian Matrix をそれぞれ

$$H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{0 \leq i, j \leq 2}, \quad H_w = \left(\frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j} \right)_{0 \leq i, j \leq 2}$$

とする. $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_i}$ より, Hessian Matrix は対称行列である. そのとき, 簡単な計算により

$$H_z = {}^t A \cdot H_w \cdot A$$

が成り立つ。よって,

$$\det H_z = 0 \iff \det H_w$$

今, $C_z = \{P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$ とし, $C_w = \varphi^{-1}(C_z)$ とおく。そのとき,

$$\varphi^{-1}(C_z \cap \{\det H_z = 0\}) = C_w \cap \{\det H_w = 0\}$$

を得る。

5.1.6

$R = \bigcup_{i \in I} U_i$ をリーマン面とし, $\{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$ を局所座標系とする。

$$\{\omega_i = f_i dz_i : f_i \text{ は } U_i \text{ で正則}\}$$

を U_i 上の正則 1 形式とし,

$$f_i dz_i = f_i \frac{dz_i}{dz_j} dz_j = f_j dz_j$$

を満たすとせよ。そのとき,

$$f_j = f_i \frac{dz_i}{dz_j}$$

を得る。 $\{f_i\}_{i \in I}$ は $\{\frac{dz_i}{dz_j}\}$ を転移関数にもつ R 上の直線束 $\pi : K \rightarrow R$ の正則断面と見なせる。

m が R 上の有理型関数とは U_i 上に制限した関数 $m|_{U_i} = m_i$ が U_i 上有理型関数のとき。このとき,

$$\frac{dm}{dz_i} dz_i = \frac{dm}{dz_j} \frac{dz_j}{dz_i} dz_i = \frac{dm}{dz_j} dz_j$$

よって, $\Phi = \left\{ \frac{dm}{dz_i} dz_i \right\}$ は R 上の大域的有理型 1 形式である。

—— コンパクトリーマン面の基本定理 ——

コンパクトリーマン面 R 上には非定数有理型関数 f が存在する。 f は正則写像

$$f : R \rightarrow \mathbb{P}^1$$

を与える。特に, $\left\{ \frac{df}{dz_i} dz_i \right\}$ は R 上定義された有理型 1 形式である。

定理 8 (留数定理). f をコンパクトリーマン面上の有理型函数とする. そのとき, f は有限個の零点と極をもち, 重複も許した零点の個数 N と極の個数 P は等しい. 即ち, $N = P$.

証明. $N(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, $P(f) = \{\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{s+t}\}$ をそれぞれ f の零点集合および極の集合とする. 局所座標系 $\{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$ を適当に取り直し, $\alpha_i \in U_i$ ($1 \leq i \leq s+t$) とする. 各 α_i 中心の円板 Δ_i ($1 \leq i \leq s+t$) を互いに交わらないように取る. γ_i を Δ_i の境界円 (向きは α_i から見て正の向き) とし,

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_s + \gamma_{s+1} + \dots + \gamma_{s+t}$$

とおく. また, $D = R \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq s+t} \bar{\Delta}_i$ とおく. そのとき, $\partial D = -\gamma$ である.

$$\frac{df}{f} = \frac{\frac{df(z_i)}{dz_i}}{f(z_i)} dz_i = \frac{\frac{df(z_j)}{dz_j}}{f(z_j)} dz_j$$

は R 上で定義された有理型 1 形式である.

$$\sum_{i=1}^{s+t} \int_{\gamma_i} \frac{df}{f} = - \sum_{i=1}^{s+t} \int_{-\gamma_i} \frac{df}{f} = - \int_{\partial D} \frac{df}{f} = 0$$

実際, $\frac{df}{f}$ は D では極をもたない正則 1 形式ゆえ 0 である (実際は D を三角形分割して, 各三角形に対してコーシーの積分定理を適用すればよい.) 一方, $\int_{\gamma_i} \frac{df}{f}$ は Δ_i 内の零点の位数 ($1 \leq i \leq s$) または極の位数 ($s+1 \leq i \leq s+t$).

$$\therefore 0 = \sum_{i=1}^{s+t} \int_{\gamma_i} \frac{df}{f} = N - P$$

故に $N = P$.

5.1.7

$\mathbb{P}^2$ 内の d 次の既約曲線

$$C_d = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : F(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

を考える。但し、 $F(z_0, z_1, z_2) = (f(z_0, z_1, z_2))^k$ ($k > 1$) の形でない (重複因子をもたない) d 次同次多項式とする。特に、次数 1 の曲線を射影直線という。 L を射影直線とすれば $(p_0 : p_1 : p_2) \in \mathbb{P}^2$ が存在して、

$$L = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : p_0 z_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2 = 0\}$$

と表される。比として $(p_0 : p_1 : p_2) \neq (q_0 : q_1 : q_2)$ ならば、2 つの直線

$$L = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : p_0 z_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2 = 0\}$$

$$L_q = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : q_0 z_0 + q_1 z_1 + q_2 z_2 = 0\}$$

は異なる射影直線である。特に、 L_p と L_q は 1 点で交わる、即ち、交点数 $(L \cdot L_q) = 1$ である。

$$L^d = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : (p_0 z_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2)^d = 0\}$$

とすれば、交点数 (交点重複度) は $(L^d \cdot L_q) = d$ となる。

Claim 9. $(C_d \cdot L) = d$

($\because$) $p_2 \neq 0$ としてよい。 $z_2 = -\frac{p_0 z_0 + p_1 z_1}{p_2}$ を $F(z_0, z_1, z_2)$ に代入した $(z_0 : z_1)$ の d 次同次多項式 $g(z_0, z_1) = F(z_0, z_1, -\frac{p_0 z_0 + p_1 z_1}{p_2})$ の $\mathbb{P}^1(z_0 : z_1)$ 上の零点の重複も許した個数を求める。 $g(z_0, z_1)$ は d 次同次多項式ゆえ

$$g(z_0, z_1) = a_1(\alpha_1 z_0 - \beta_1 z_1)^{k_1}(\alpha_2 z_0 - \beta_2 z_1)^{k_2} \cdots (\alpha_r z_0 - \beta_r z_1)^{k_r},$$

但し、 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = d$ と分解できる。よって、 $\{(\beta_i : \alpha_i)\}_{i=1}^r$ が相異なる解であり、重複度を考慮に入れれば、 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = d$ 個の解がある。よって、 $(C_d \cdot L) = d$. □

定理 9. C_m, C_n をそれぞれ m, n ($m \leq n$) 次の異なる既約曲線とする。そのとき、 $(C_m \cdot C_n) = mn$.

証明.

$$C_m = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : F(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

$$C_n = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : G(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

とおく. 但し, F, G は $\deg F = m, \deg G = n$ なる同次多項式とする. 簡単のため C_m, C_n は非特異曲線とする. まず, $C_m \cap C_n$ は内点をもたない閉集合である. これは, 一致の定理よりわかる. 実際, 内点をもてば $C_m = C_n$ となり仮定に反する. よって, $\mathbb{P}^2$ がコンパクトゆえ $C_m \cap C_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ (有限個の点からなる). $H(z_0, z_1, z_2)$ を 1 次多項式とし,

$$W_i = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 : H(\alpha_i) \neq 0\} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

とおく. $\mathbb{P}^2$ の開集合である. $\bigcap_{i=1}^r W_i$ は開集合であるので, 内点 $q = (q_0, q_1, q_2) \in \bigcap_{i=1}^r W_i$ をもつ. 射影直線 $L_q = \{H(z_0, z_1, z_2) = q_0 z_0 + q_1 z_1 + q_2 z_2 = 0\}$ に対し, $(C_m \cdot L_q) = m$ であり, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ は L_q 上にない. そこで, 有理関数 $f = \frac{G}{H_q^n}$ の C_m への制限 $f|_{C_m}$ を考えると, $f|_{C_m}$ の零点と極は相異なる点であるが, 位数は同じであった (定理 4). 極の位数は $P(f) = (C_m \cdot L_q^n) = mn$ より, 零点の位数も $N(f) = mn$ である. 実は, 特異点があっても, $(C_m \cdot C_n) = mn$ であることが示せる.

射影平面の自己同型

$\mathbb{P}^2$ の自己同型写像 $\varphi = (\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2) : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ を

$$\begin{cases} w_0 = \varphi_0(z_0, z_1, z_2) \\ w_1 = \varphi_1(z_0, z_1, z_2) \\ w_2 = \varphi_2(z_0, z_1, z_2) \end{cases}$$

と表す. 但し, $\varphi_i(z_0, z_1, z_2)$ ($i = 0, 1, 2$) は同次多項式とする. $\mathbb{P}^2$ 内の直線 $H_i = \{w_i = 0\}$ の引き戻し $\varphi^* H_i$ は $\mathbb{P}^2$ の既約な非特異曲線である. φ は双正則より $(\varphi^* H_i \cdot \varphi^* H_j) = (H_i \cdot H_j) = 1$. よって $\deg \varphi^* H_i = 1$. よって, φ は一次変換である.

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^2) = \text{PGL}(3; \mathbb{C})$$

5.1.8 変曲点 (points of inflexion)

$C = \{f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$ を既約な d 次非特異曲線とする. $p = (a_0 : a_1 : a_2) \in C$ に於ける接線を L_p とする.

$$L_p : z_0 \frac{\partial f}{\partial z_0}(p) + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}(p) + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}(p) = 0$$

C と L_p の点 p での交点数 $(C \cdot L_p)_p \geq 3$ のとき, 点 $p \in C$ を変曲点という. 座標の一次変換により $p = (1 : 0 : 0) \in C$ としてよい. 更に p を固定する一次変換により, $L_p = \{z_1 = 0\}$ とできる.

$$f = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} z_0^i z_1^j z_2^k$$

とおく. $f(1 : 0 : 0) = 0$ より, 単項式 z_0^d は含まない.

$$f(z_0, z_1, z_2) = az_0^{d-1}z_1 + bz_0^{d-1}z_2 + cz_0^{d-2}z_1^2 + dz_0^{d-2}z_1z_2 + ez_0^{d-2}z_2^2 + g(z_0, z_1, z_2),$$

(但し, $g(z_0, z_1, z_2)$ は z_1, z_2 に関し 3 次以上の d 次同次多項式である) と表す. $f(z_0, 0, z_2)$ は $p = (1 : 0 : 0)$ を 3 位以上の零点にもつので, $b = e = 0$. また $p = (1 : 0 : 0)$ は C の非特異点より, $a \neq 0$. 係数を取り替えて

$$\therefore f(z_0, z_1, z_2) = az_0^{d-1}z_1 + bz_0^{d-2}z_1^2 + cz_0^{d-2}z_1z_2 + g(z_0, z_1, z_2).$$

$$g_0 = \frac{\partial g}{\partial z_i}, \quad g_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_0} = a(d-1)z_0^{d-2}z_1 + (d-2)(b+c)z_0^{d-3}(z_1^2 + z_1z_2) + g_0 \\ \frac{\partial f}{\partial z_1} = az_0^{d-1} + z_0^{d-2}(2bz_1 + cz_2) + g_1 \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} = cz_0^{d-2}z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2}(p) = 0 + g_{00}(p) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_1}(p) = a(d-1) + g_{01}(p) = a(d-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_2}(p) = 0 + g_{02}(p) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(p) = 2b + g_{11}(p) = 2b \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(p) = c + g_{12}(p) = c \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}(p) = 0 + g_{22}(p) = 0 \end{cases}$$

より

$$H(f)(p) = H(f)(1:0:0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial z_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a(d-1) & 0 \\ a(d-1) & 2b & c \\ 2b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

を得る.

定理 10. $C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異射影代数曲線で $\deg C = d \geq 3$ とし, $f(z_0, z_1, z_2)$ を C を定義する既約 d 次同次多項式とする. そのとき,

$$\left\{ \text{points of inflection on } C \right\} = C \cap \left\{ \text{zeros of Hessian } H = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \right) \right\}$$

C がアッフィン座標 (x, y) を用いて, $p \in C$ の近くで, 解析的に $C := \{y = f(x)\}$ と表せるとき (陰関数の定理)

$$\left\{ \text{points of inflection near } p \right\} = \left\{ \text{points } (a, f(a)) \text{ where } f''(a) = 0 \right\}$$

実際, $x = a$ でのテーラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o(x, a; 2)$$

$f''(a) = 0$ は $y = f(x)$ と $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ が $x = a$ で 3 次以上の接触を意味する.

系 3. 非特異 d ($d \geq 3$) 次平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ の変曲点の個数は有限個である.

5.2 平面3次曲線と複素トーラス

5.2.1

$$C = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

を非特異平面3次曲線とする. 但し, $f(z_0, z_1, z_2) = \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} z_0^i z_1^j z_2^k$ は3次同次多項式で, 任意の $(a_0 : a_1 : a_2) \in C$ に対し

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z_0}(a_0, a_1, a_2), \frac{\partial P}{\partial z_1}(a_0, a_1, a_2), \frac{\partial P}{\partial z_2}(a_0, a_1, a_2) \right) \neq (0, 0, 0).$$

が成立する. f のヘッシアン $H(f)$ は次数 $\deg H(f) = 3$ ゆえ, 交点数は重複を許して $(C \cdot H(f)) = 9$ は (Bezout の定理). そこで, $\mathbb{P}^2$ の同次座標 (z_0, z_1, z_2) を $p = (0 : 0 : 1) \in C$ が変曲点で直線 $z_0 = 0$ が C と変曲点 p での3重接線とする. このとき,

$$\begin{aligned} -f(z_0, z_1, z_2) &= -z_1^3 + z_0 \cdot (z_1, z_2 \text{ の 2 次形式}) \\ &= -z_1^3 - z_0 \cdot (-a_0 z_2^2 + a_1 z_2 z_1 + a_2 z_2 z_0 + a_3 z_1^2 + a_4 z_1 z_0 + a_5 z_0^2) \\ &= a_0 z_0 z_2^2 - z_0 z_2 (a_1 z_1 + a_2 z_0) - (z_1^3 + a_3 z_1^2 z_0 + a_4 z_1 z_0^2 + a_5 z_0^3) \\ &= z_0 \cdot \left(\sqrt{a_0} z_2 - \frac{1}{2\sqrt{a_0}} (a_1 z_1 + a_2 z_0) \right)^2 - z_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{a_0}} (a_1 z_1 + a_2 z_0) \right)^2 \\ &\quad - (z_1^3 + a_3 z_1^2 z_0 + a_4 z_1 z_0^2 + a_5 z_0^3) \\ &= u_0 u_2^2 - (u_1^3 + b_1 u_1^2 u_0 + b_2 u_1 u_0^2 + b_3 u_0^3) \end{aligned}$$

$$w_1 = u_1 + \frac{b_1}{3} u_0 \text{ とおくと,}$$

$$f' = w_0 w_2^2 - (w_1^3 + c_1 w_1 w_0^2 + c_1 w_0^3)$$

以上より, $\mathbb{P}^2$ の座標の一次変換により, C の定義方程式は

$$C := \{z_0 z_2^2 = z_1^3 + a z_1 z_0^2 + b z_0^3\}$$

と表される. これを3次曲線の Weierstrass の標準形という.

5.2.2

Claim 10. 曲線 C は無限直線 $z_0 = 0$ 上に特異点を持たない.

証明. $C \cap \{z_0 = 0\} = \{(0 : 1 : 0)\}$. アフィン部分

$$C^{(1)} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : uv^2 = 1 + au^2 + bu^3\} ; u = \frac{z_1}{z_0}, v = \frac{z_2}{z_1}$$

は $(u, v) = (0, 0)$ で非特異である. □

Claim 11. C のアフィン部分

$$C^{(0)} = C \cap \{z_0 \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}; \quad x = \frac{z_1}{z_0}, y = \frac{z_2}{z_0}$$

上の特異点を持たないための必要十分条件は

$$4a^3 + 27b^2 = 0$$

証明. $f = f(x, y) = x^3 + ax + b - y^2$ とおく.

$$\begin{cases} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + a \\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{cases}$$

$f_x = f_y = 0$ とおくと, $x^2 = -\frac{a}{3}$, $x^3 = -\frac{b}{2}$. よつて, $4a^3 + 27b^2 = 0$ ならば特異点持つ. 一方, 3次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の根を α, β, γ とする. そのとき, 判別式

$$\Delta = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 = 4a^3 + 27b^2$$

より, $\Delta = 0$ ならば,

$$C^{(0)} = \{y^2 = x^3\} \text{ または } C^{(0)} = \{y^2 = (x - \alpha)^2(x + 2\alpha)\}.$$

故に, $C^{(0)}$ は $(0, 0)$ または $(\alpha, 0) = (\frac{3b}{2a}, 0)$ 但し, $(a \neq 0)$, で特異点持つ. □

そこで, 座標変換 $\lambda = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ とおく. $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ より $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

$$\begin{cases} u = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \\ v = \frac{y}{\sqrt{(\beta - \alpha)^3}} \end{cases}$$

により, Weierstrass の標準形: $y^2 = x^3 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ は

$$v^2 = u(u - 1)(u - \lambda)$$

と変換される.

5.2.3

$\mathbb{P}^2$ の非特異 3 次曲線 $C : y^2 = x^3 + ax + b$, $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ について, 3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ は異なる 3 つの解をもつ.

Claim 12. $\omega = \frac{dx}{y}$ は曲線 C 上の正則 1 形式である.

証明. $y^2 = x^3 + ax + b$ の両辺を微分して,

$$2ydy = (3x^2 + a)dx \implies \frac{dx}{y} = \frac{2dy}{3x^2 + a} = \omega$$

C 上 $y \neq 0$, $3x^2 + a \neq 0$ より, ω は C 上の正則 1 形式である. 無限遠点 $(0 : 0 : 1)$ での局所方程式は $u = v^3 + au^2v + bv^3$, 但し, $u = \frac{1}{y}$, $v = \frac{x}{y}$ よって,

$$\omega = \frac{dx}{y} = \frac{2}{2auv + 3bv^2 - 1} dv$$

となり, ω は $(u, v) = (0, 0)$ で正則 1 形式である. こうして, ω は C 上の大域的な正則 1 形式, 即ち, $\omega \in H^0(C, \Omega_C^1) \cong H^1(C, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}$.

そこで, 複素積分

$$E(P) = \int_{P_0}^P \omega$$

を考える. 但し, 積分路は P_0 と P を結ぶ C 内の道をとる. 局所的には $E(P)$ は一価正則関数である. C は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる 4 点 e_1, e_2, e_3, ∞ を分岐点にもつ

2重被覆と見なせるので、フルヴィッツの定理から $\chi(C)$ を C のオイラー数とすれば,

$$\chi(C) = 2\chi(\mathbb{P}^1) - 4 = 4 - 4 = 0$$

また, $\chi(C) = 2 - \beta_1(C)$, 但し, $b_1(C) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(C; \mathbb{R})$ より $b_1(C) = 2$. レフシツの超平面切断定理から $H_2(\mathbb{P}^2 \setminus C, \zeta)$ は torsion free である. このことから, $H_1(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である. $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ に対し,

$$\pi(\gamma) = \int_{\gamma} \omega \in \mathbb{C}$$

とおく. $\pi(\gamma_1 + \gamma_2) = \pi(\gamma_1) + \pi(\gamma_2)$ かつ, γ がコチェインならば, 即ち, $\gamma = \partial\sigma$

$$\int_{\gamma} \omega = \iint_{\sigma} d\omega = 0$$

より, π は $\pi: H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ は準同型写像を定める.

$$\Gamma = \{\pi(\gamma) : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\}$$

とおく.

補題 16. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ は格子群である.

証明. Γ が $\mathbb{C}$ の実 1 次元部分空間 (原点を通る直線) に含まれるとすれば, この直線の法線方向の複素数を $\alpha \in \mathbb{C}$ とおけば, 任意の $\forall \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ に対し,

$$\operatorname{Re}(\alpha \cdot \pi(\gamma)) = 0$$

が成り立つ.

$$E(P) = \int_{P_0}^P \omega \left(= \int_{x(P_0)}^{x(P)} \frac{dx}{y} = \int_{x(P_0)}^{x(P)} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax + b}} \right)$$

であった. $P_0 \rightarrow P \rightarrow P_0$ なるサイクルを $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ とすれば

$$E(P) = \int_{P_0}^P \omega + \int_{\gamma} \omega = \int_{P_0}^P \omega + \pi(\gamma)$$

$$\operatorname{Re}(\alpha \cdot E) = \operatorname{Re} \left(\int_{P_0}^P \omega \right) + \operatorname{Re}(\alpha \cdot \pi(\gamma)) = \operatorname{Re} \left(\int_{P_0}^P \omega \right)$$

よって, $\operatorname{Re}(\alpha \cdot E)$ は周期をもたないのでコンパクトリーマン面 C 上の調和関数 (正則関数の実部は調和関数) である. 最大絶対値の定理から定数である. こうして, $\operatorname{Re}(\alpha \cdot E) = c$, 即ち, $\alpha \cdot E$ もまた定数関数. 微分して $\alpha \cdot \omega = 0, \alpha \neq 0$ より, $\omega = 0$. 矛盾. よって, $\exists \gamma_1, \exists \gamma_2 \in H_1(C, \mathbb{Z})$ (基底をとる) が存在して, $\omega_1 = \pi(\gamma_1), \omega_2 = \pi(\gamma_2)$ は一直線上にない ($\mathbb{R}$ 上一次独立).

$$\Gamma = \pi(H_1(C, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$$

□

こうして,

定理 11.

$$E: C \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}/\Gamma: E(P) = \int_{P_0}^P \omega$$

は解析的同型写像. 即ち, *Weierstrass* の標準型を通して, 非特異射影 3 次曲線と複素トーラスは 1 対 1 の対応がつく.

5.3 アーベルの定理と射影 3 次曲線の群構造

定理 12. $X := \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : z_0 z_2^2 = z_1^3 + a z_1 z_0^2 + b z_0^3\}$ を非特異 3 次曲線 (*Weierstrass* の標準形) とする. そのとき, 任意の 3 点 $Q_1, Q_2, Q_3 \in X$ および $P_0 = (0 : 0 : 1)$ に対して

$$\left[\begin{array}{l} \text{a line} \quad \exists \ell \quad \text{such that} \quad \ell \cdot X = Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{array} \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3P_0 \quad \text{in the group law on } X \right]$$

証明. 3 次曲線 X に付随するトーラスを $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}/\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ とし, $\varphi: \mathbb{T}(\omega_1, \omega_2) \cong X$ を双正則同型写像とする. P_0 は X の変曲点であり, $z_0 = 0$ が X の点 P_0 での接線 (3 重接線) である. Q_1, Q_2 を通る直線を ℓ とすれば, ℓ と X のその他の交点は一意的に存在する. それを Q_3 とする. 但し, $Q_1 = Q_2$ なら, ℓ は Q_1 での接線をとる. 有理関数 $\frac{\ell}{z_0}$ の X への制限 $f = \frac{\ell}{z_0}|_X$ の $\mathbb{T}(\omega_1, \omega_2)$ へ

の引き戻し φ^*f は有理型関数で $[0] = \varphi^{-1}(P_0)$ 上で3位の極, $\alpha_i = \varphi^{-1}(Q_i)$ でゼロ点をとる. こうして, アーベルの定理から $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3[0] \in \Lambda(\omega_1, \omega_2)$.
 よって, $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3P_0$.

References

- [1] 笠原乾吉, 複素解析：一変数解析関数, 実教出版株式会社, 1978.
- [2] F. Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, London Mathematical Society, Student Texts 23, 1992.
- [3] D. Mumford, *Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties*, Springer Verlag, 1976.