数学コ ース　研究の紹介

Mathematics

整数論

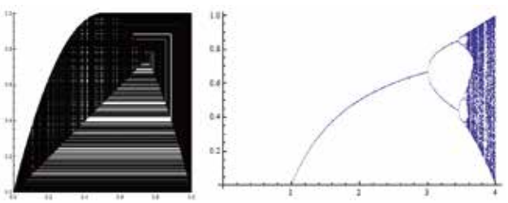
与えられた整数を素数の積に分解するという「素因数分解」というのは、簡単であると思いますか、難しいと思いますか？整数論というのは、このような平易な言葉で説明できる素朴な問題に研究の原点があります。このような素朴な問題と妥協を許さず格闘し徹底的に向き合った時、我々は整数の持つ神秘や魅力に迫ることができるのでしょう。素因数分解をどう思うか？大学で数学を学ぶことを通して見直してみましょう。

群論

足し算、掛け算、写像の合成など、演算というといろいろありますが、一つの演算だけに注目してその演算で閉じた集合を考えてみましょう。その集合と演算にいくつかの簡単な条件を付けたものが群です。群を用いて具体的な図形や立体、もう少し一般に数学的な対象の対称性を記述することができます。群の性質そのものの研究や群で記述される対称性を調べる研究などがあります。

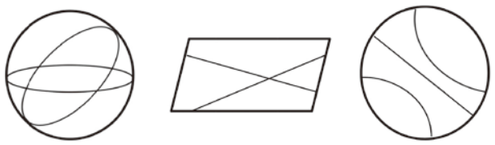
力学系

高校の物理の授業で、物体は運動の法則に従って動くという（ニュートン）力学を学びます。このような一定の法則に従うものの動きを研究する分野のことを力学系といいます。例えば、漸化式で与えられる数列も、一定の規則によって作られる点列ですから、その振る舞いは力学系の 研究対象になります。ここでは、具体的な漸化式 $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ から作られる数列（点列）$\{x_n\}$ を考えてみることにしましょう。２次関数で定義された比較的単純な漸化式であっても、数列 $\{x_n\}$ の振舞いは大変複雑です。しかも定数 a、初期値 x_0 をほんの少しでも変えると全く異なる挙動を示すのも不思議で興味深い現象です。左図は、$a = 4$、$x_0 = 0.5$ のときにパソコンで数列を描かせた図です。折れ線と対角線 $y=x$ との交点達が数列 $\{x_n\}$ に対応しており、$\{x_n\}$ が区間 [0,1] の中で「乱雑に」動き回るカオス状態であることがわかります。また右図は、横軸に a、縦軸を $\{x_n\}$ の値が密集する場所（集積点）を描いたものです。a を 0 から４まで増加させたときに、集積点が複雑に変化していく様子が見て取れます。漸化式のように高校で扱う数学でも、振る舞いが分かっていないことも多く、最先端の研究につながつていくのです。



微分幾何学　空間の曲がり具合いを見る

よく知られているユークリッド幾何は 2000 年以上前に形作られました。ごく当たり前と思われる５つの公準に基づいて、私たちが中学校の数学で出会っただろう図形に関する結果が体系的に解説されています。19世紀に入り、ユークリッド幾何の５つ目の公準である平行線の公準を否定することで、双曲幾何という別の世界が構築されることがわかりました。曲面論に基づいて発生したリーマン幾何はユークリッド幾何、双曲幾何を含む多種多様な空間の幾何の構築を可能にし、その後の空間概念や幾何学思想に大きな影響を及ほしました。微分幾何学はリーマン幾何をはじめとする様々な幾何を研究する分野です。



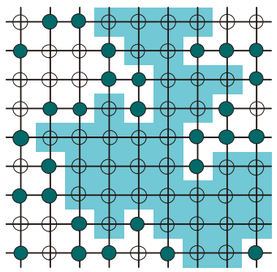
球面、平面および双曲平面（円板モデル）における直線（測地線）

代数幾何学

３直線が一点で交わる、という平面幾何の問題があるとします。純粋に図形的に考えてもよいですが、座標によるアプロ ーチもあります。すなわち、平面に座標を入れ、直線を方程式で表し、方程式を解くことにより交点の座標を計算するという方法です。「方程式を解く」という代数的な考察により、「３直線が１点で交わる」という幾何的な性質が分かるわけです。代数幾何学はこのように、代数的な手法で図形を考察する分野です。直線や曲線だけでなく、曲面やさらに次元の高い図形も研究します。

確率論　自然科学は不規則性の解明にあり

時間に沿って発展、拡散する様子を探る確率過程論を中心に、ランダムネスの法則を探究しています。ブラウン運動の研究を中核に、確率積分、無限次元解析、マルコフ過程などの分野があります。これらは通信、確率制御、ファイナンス、量子統計、数理生物学等に応用されます。



格子上の電子の配置 (+スピンの連結成分)
パーコレー ションモデル

解析学

人類は自然の中の存在であり、自然の脅威と恩恵の下で生き続けています。そして人類は知性によって、自然の動きをあらかじめ予測しようと努めてきました。そのための一つの手段は経験を積み重ねて教訓を導くことですが、もう一つ、自然がどのような仕組みで動くのか、そのからくりを見出そうという営みも続けてきました。そのためには、自然の本質は変化ですから、変化をつかまえて記述することが必須です。変化を記述することが可能になったのは、人類が 4000 年前にそのような営みを始めたのからすると、ごく最近の17世紀(400年前)になってからです。ニュ ー トンとライプニッツが「微分」を発見したのです。微分は変化を表す量で、単に速いとか遅いとかではなく、どれくらい速いかという変化の様子を定量的に（つまり数値として）表すことができます。さらにニュ ー トンは微分を用いて、万物の運動を支配する「運動法則」を発見しました。これによって、自然の動きは運動方程式と呼ばれる微分方程式を解けばわかる、ということになりました。たとえば太陽の周りを回る惑星の運行は、

$$r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2 = -\frac{GM}{r(t)^2}$$

という微分方程式の解で表されます。また波の伝わり方は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

という微分方程式，熱の伝わり方は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

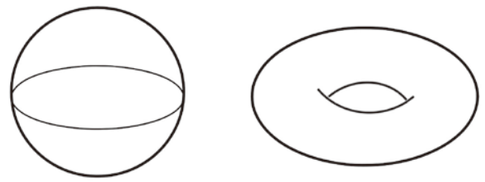
という微分方程式に支配されます。

このような微分方程式の解は具体的に求められるだろうか、というところから近代の解析学がスタートしました。そのうちに、微分方程式の解は普通は具体的に表すことができない難しい関数になる、ということがわかってきました。そこで解析学のテーマは、微分方程式の解を具体的に求めるというものから、具体的には表せない解がどのような振る舞いをするのかをできる限り記述する、という問題に移りました。

解析学は様々なアイデアや概念を発見して、そのような問題に取り組む学問です。その成果は、星の運行・大気の流れといったような大きなスケールの現象や、素粒子物理学のような極小のスケールの現象、液体の水が固体の氷になるといった相転移現象、あるいは細菌の増殖の仕方など、ほとんどあらゆる自然現象の解明に結びつきます。さらには整数を並べたときに素数が現れる頻度というように、数学的現象の解明にも解析学は活躍します。

位相幾何学　連続変形で不変な性質に着目する

正四面体の頂点の数 a、辺の数 b、面の数 c はそれぞれ 4、6、4 です。従って a-b+c =4－6 +4 =2 がわかります。正四面体の代わりに正八面体や正二十面体で同じことを考えてみると、やはり a-b+c =2 がわかります。このように必ず2という数が現れるのは、以上の正多面体の表面は球面を連続変形して得られるからです。それでは幾つかの三角形を組み合わせて一人乗りの浮き袋のような形を作ってみましょう。そのとき、a-b+c はいくつになるでしょう。これは2にはならず、球面を連続変形によって一人乗りの浮き袋にはできないことの数学的な根拠を与えます。以上のことは Euler-Poincaré の公式とよばれる一般の結果からわかります。位相幾何学は、図形或いは空間の連続変形で不変な性質や 連続変形でうつり合わないものの分類について調べる分野です。位相幾何学の基本問題を提示していた Poincaré 予想は、３次元の閉じた空間に関するもので、21 世紀に入り解決されました。



球面とトーラス（一人乗りの浮き袋）

組合せ論

数学の原初形態は「モノを数える」ということでしょう。リンゴが三つといった素朴な「集まり」の抽象化として「集合」の概念が生まれ、個数を加えるなどの「演算」を付与することで「群論」などの代数学に成長しました。つまり数え上げの数学である組合せ論は代数学の源泉と言ってもいいでしょう。何かの個数を勘定する、という作業が実は数学の深遠な部分に触れているのだ、という体験を一度でもすればもうあなたは数学の虜になること間違いありません。