宇宙論的２次摂動による重力波の生成

高橋慶太郎
京都大学基礎物理学研究所
２００７年６月１日＠東工大

概要

１、宇宙論的摂動の２次の効果
　　による重力波の生成
２、２次摂動によって小スケールの
　　ゆらぎを探りたい

hep-th/0703290

・市來浄輿（RESCEU）
・P. Steinhardt (Princeton)
・D. Baumann (Princeton)

目次

１、宇宙論的摂動：１次
２、宇宙論的摂動：２次
３、重力波の生成
４、２次摂動で初期宇宙を探る

１、宇宙論的摂動：１次

宇宙論的摂動

摂動 ＝ 一様等方からのずれ

・インフレーションで量子的に生成

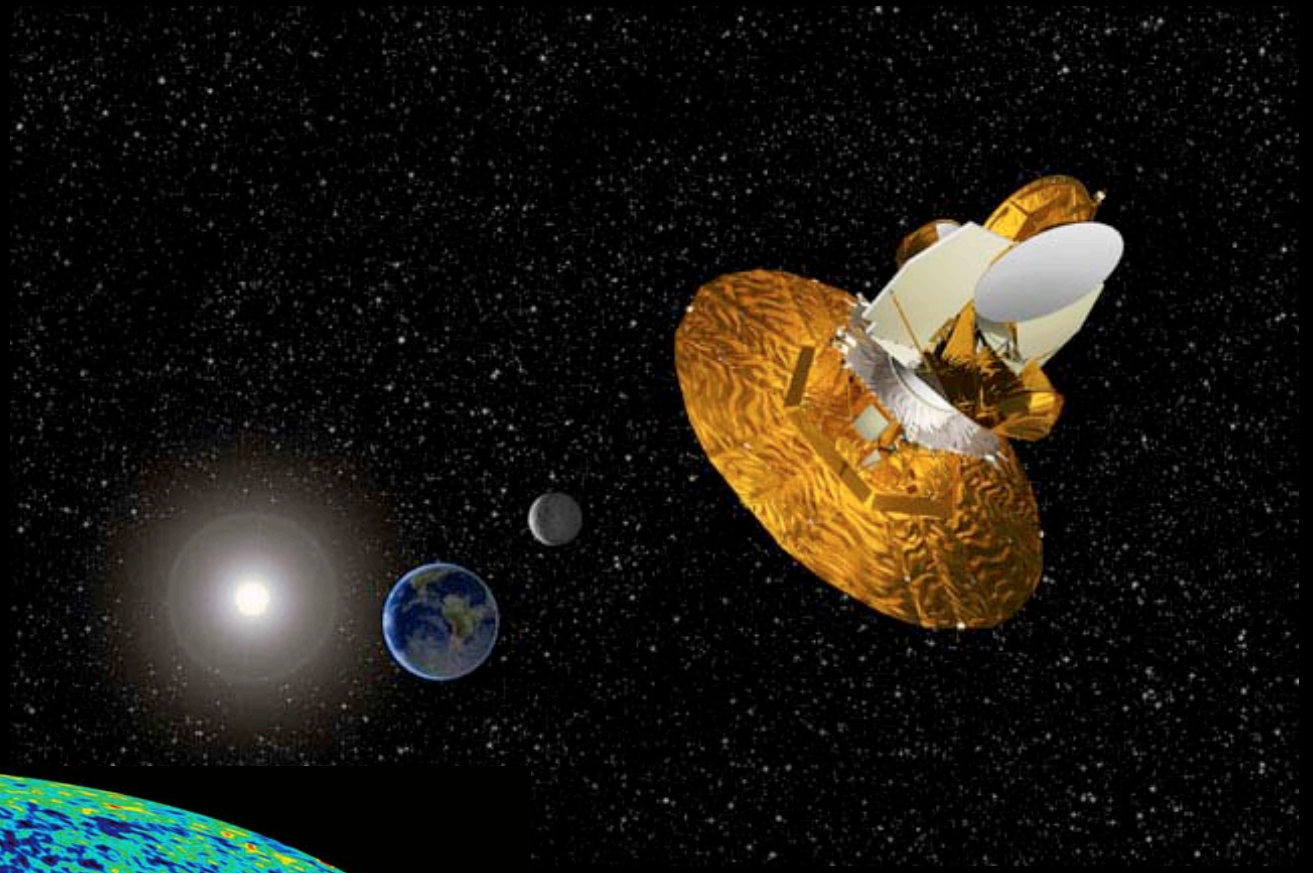
　→　密度ゆらぎ・重力波

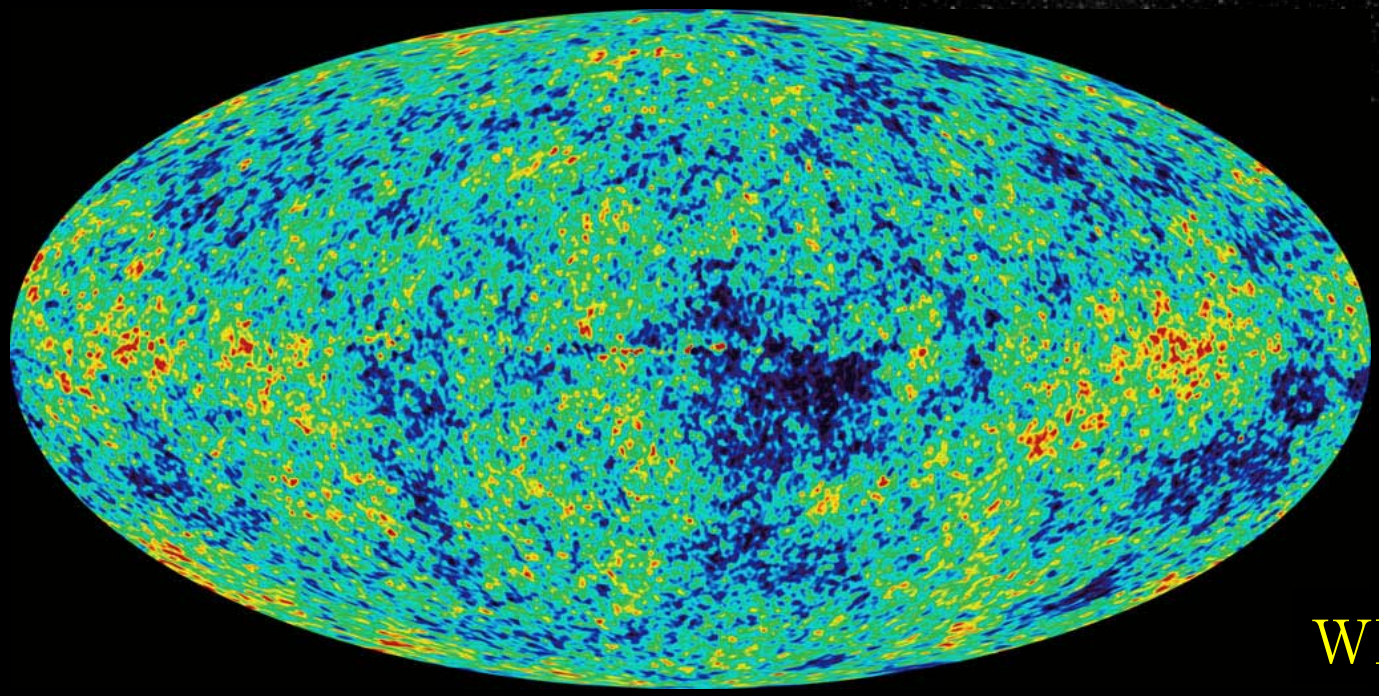
・その後、線形に発展

　→　ＣＭＢ・構造形成

宇宙背景放射

宇宙背景放射の
温度に１０万分
の１のゆらぎ

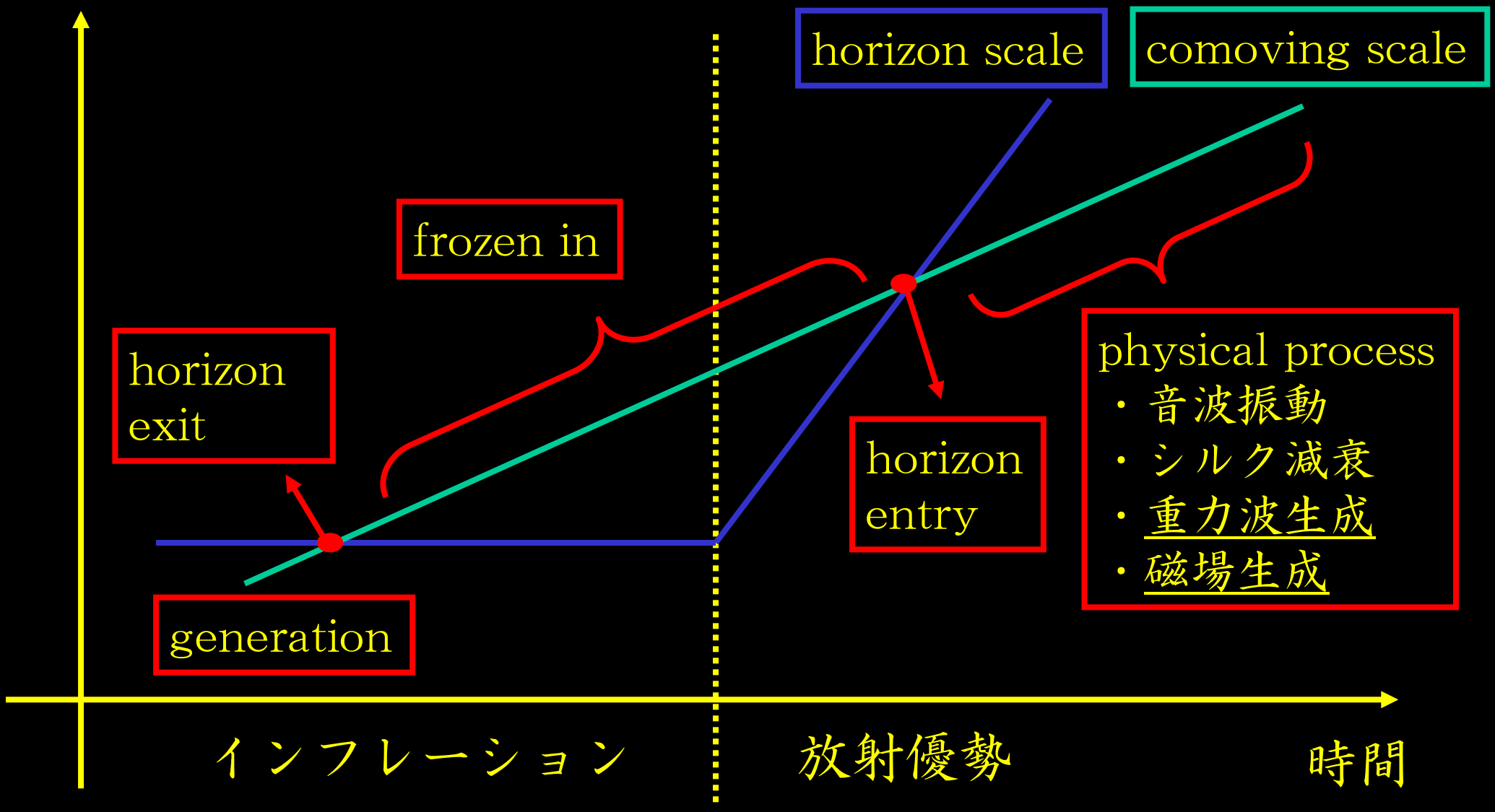




精密宇宙論
の始まり

WMAP

ゆらぎの時系列


大きさ
horizon scale
comoving scale
frozen in
horizon exit
horizon entry
physical process
・音波振動
・シルク減衰
・重力波生成
・磁場生成
generation
インフレーション
放射優勢
時間

ゆらぎの定式化（Ⅰ）

登場人物と解くべき方程式

- ●インフレーション中のゆらぎの生成
  - ・インフラトン
  - ・重力

  } 曲がった時空での量子ゆらぎ
- ●インフレーション後の発展
  - ・光子
  - ・ニュートリノ

  } 一般相対論的ボルツマン方程式
  - ・バリオン
  - ・ダークマター

  } 一般相対論的流体方程式
  - ・重力

これらを線形化して解く

ゆらぎの定式化（II）

一様等方な背景

$$\mathrm{d}s^2 = g^{(0)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)\left[-\mathrm{d}\eta^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j\right]$$

$$\rho = \rho^{(0)}(t), \quad p = p^{(0)}(t), \quad v_i = 0$$

ゆらぎ

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

$$\rho = \rho^{(0)}(t) + \delta\rho(x^\mu), \quad p = p^{(0)}(t) + \delta p(x^\mu), \quad v_i = \delta v_i(x^\mu)$$

摂動展開

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu} + g^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots$$

１次と２次以降ではだいぶ性質が異なる。

ゆらぎの分解

全ての摂動量をスカラー、ベクトル、テンソルに分解

	スカラー	ベクトル	テンソル
イメージ	重力ポテンシャル 速度ポテンシャル	渦度	重力波 粘性・非等方圧力
観測量 CMB	密度ゆらぎ T・E	磁場 T・E・B	重力波 T・E・B
大きさ （1次）	$\sim 10^{-5}$	~ 0	$\sim r^{1/2} \times$スカラー $< 10^{-5}$

１次摂動（Ｉ）

計量の摂動（conformal Newtonian gauge）

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[-\left(1+2\Phi^{(1)}\right)\mathrm{d}\eta^2 + 2V_i^{(1)}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x^i + \left\{\left(1-2\Psi^{(1)}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}^{(1)}\right\}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right]$$

- scalar $\Psi^{(1)},\ \Phi^{(1)}\ \sim 10^{-5}$
- vector $V_i^{(1)}\ (\partial^i V_i^{(1)} = 0)\ \sim 0$
- tensor $h_{ij}^{(1)}\ (h^{(1)i}{}_{i} = \partial^i h_{ij}^{(1)} = 0)\ \sim \sqrt{r}\Phi^{(1)} \lesssim 10^{-5}$

流体の方も分解できる

・速度　→　（スカラー）＋（ベクトル）

・非等方ストレス　→　（スカラー）＋（ベクトル）＋（テンソル）

１次摂動（Ⅱ）

３つのパートの方程式は独立になる

$$G^{(S)}_{\mu\nu} = \kappa^2 T^{(S)}_{\mu\nu}$$
$$G^{(V)}_{\mu\nu} = \kappa^2 T^{(V)}_{\mu\nu}$$
$$G^{(T)}_{\mu\nu} = \kappa^2 T^{(T)}_{\mu\nu}$$

例：スカラーの方程式

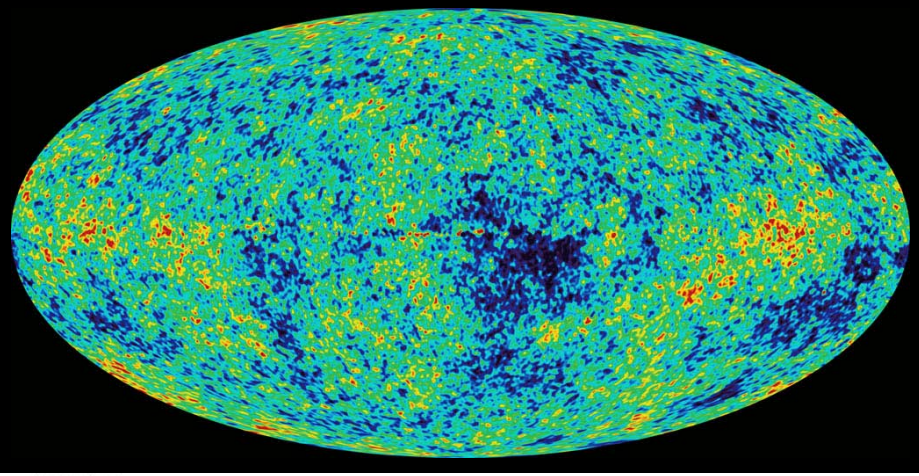
$$\Box\Phi^{(1)} = (\cdots)$$

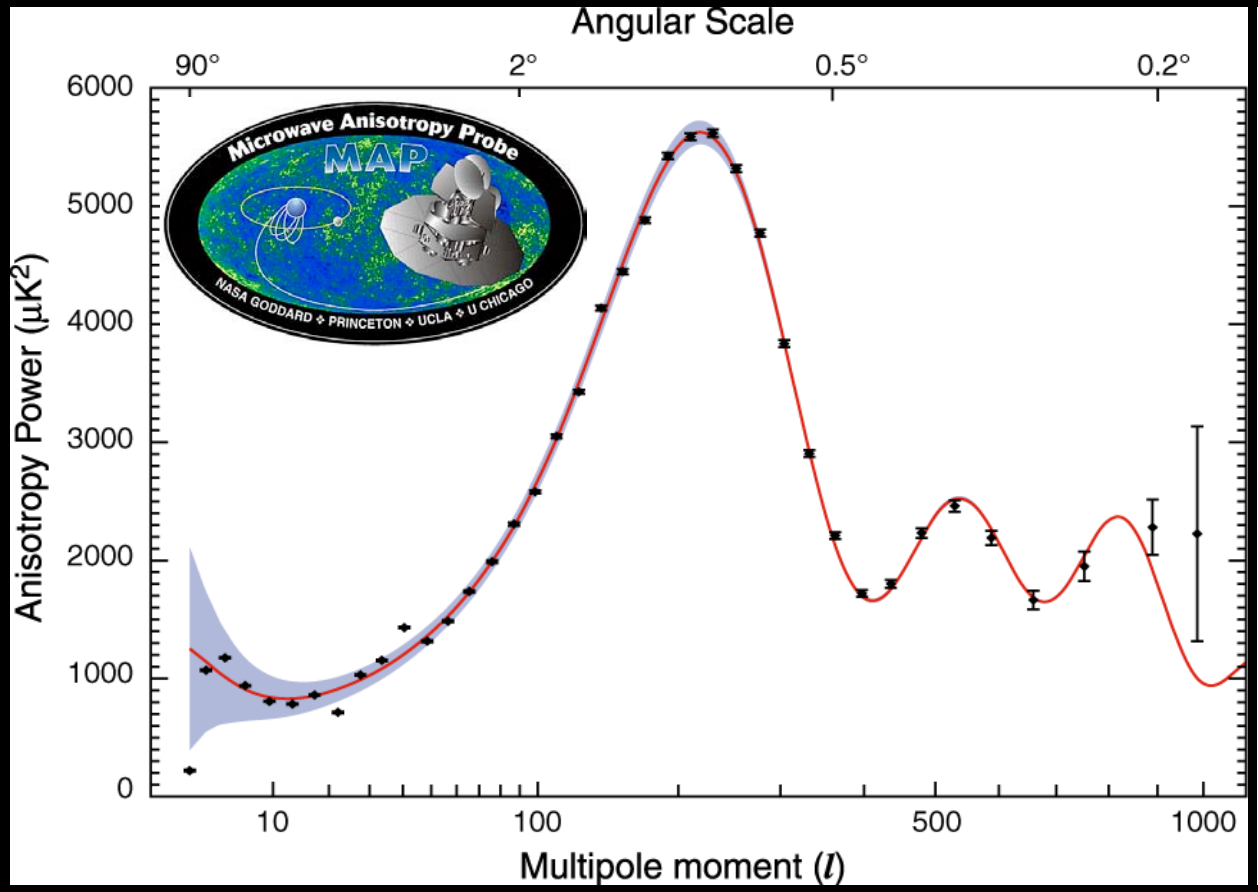
ベクトル・テンソルから
１次で足のない量は作れない

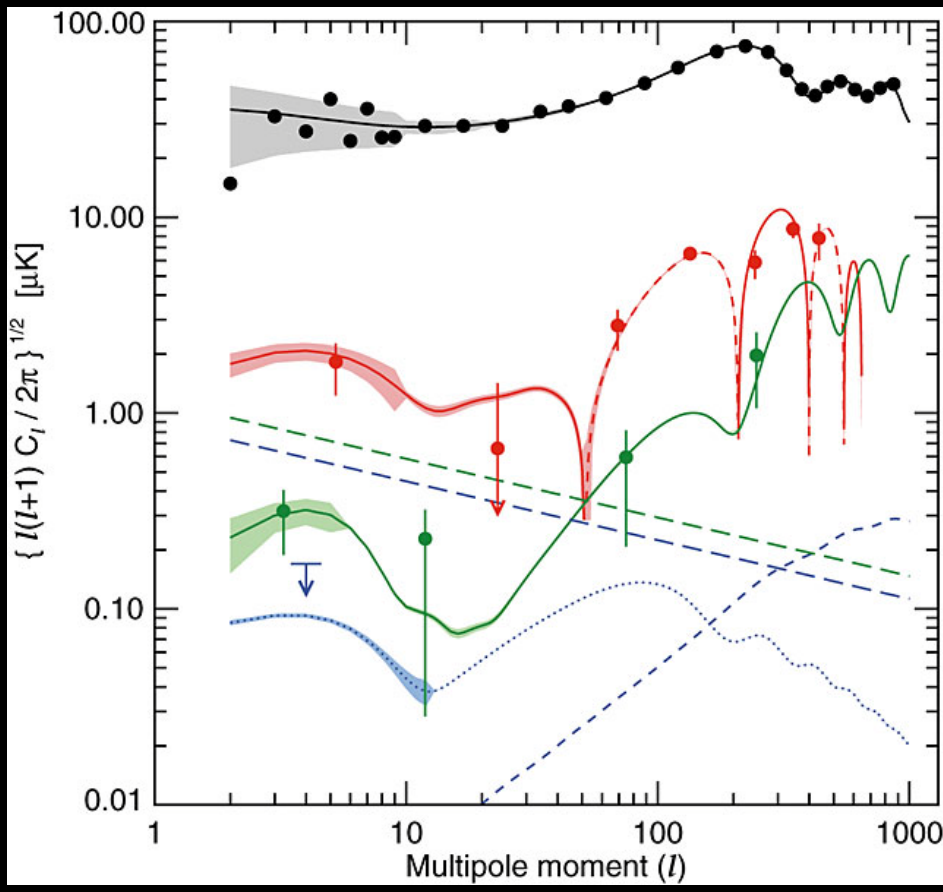
× $\partial^i V^{(1)}_i,\quad V^{(1)i} V^{(1)}_i,\quad h^{(1)i}{}_i,\quad h^{(1)}_{ij}\partial^i\partial^j\Phi^{(1)},\quad V^{(1)i} V^{(1)j} h^{(1)}_{ij}$

１次摂動論の成果：ＣＭＢ

宇宙背景放射のゆらぎの観測
→　１０個程度のパラメータで
　　２０００個のデータを説明

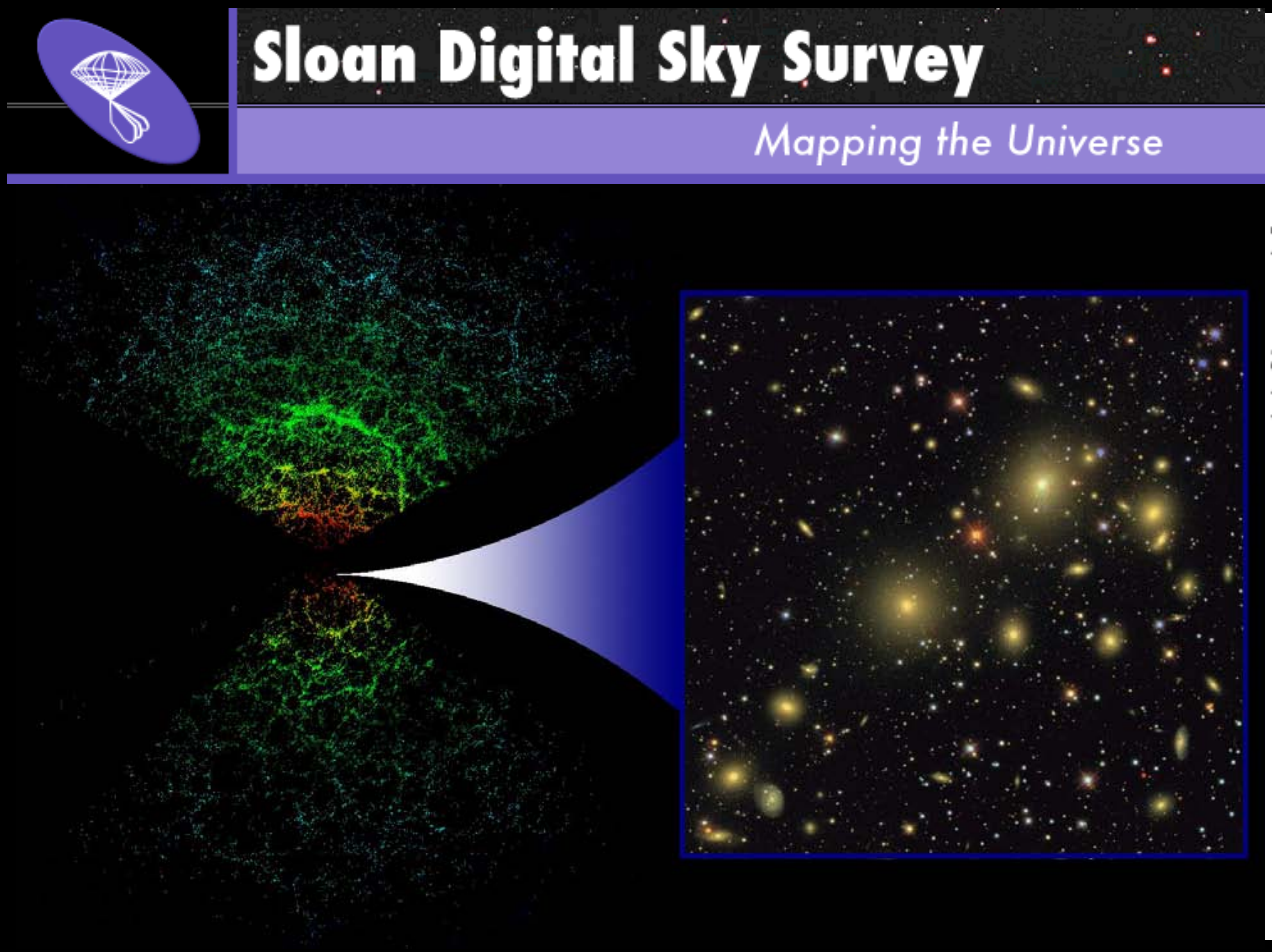


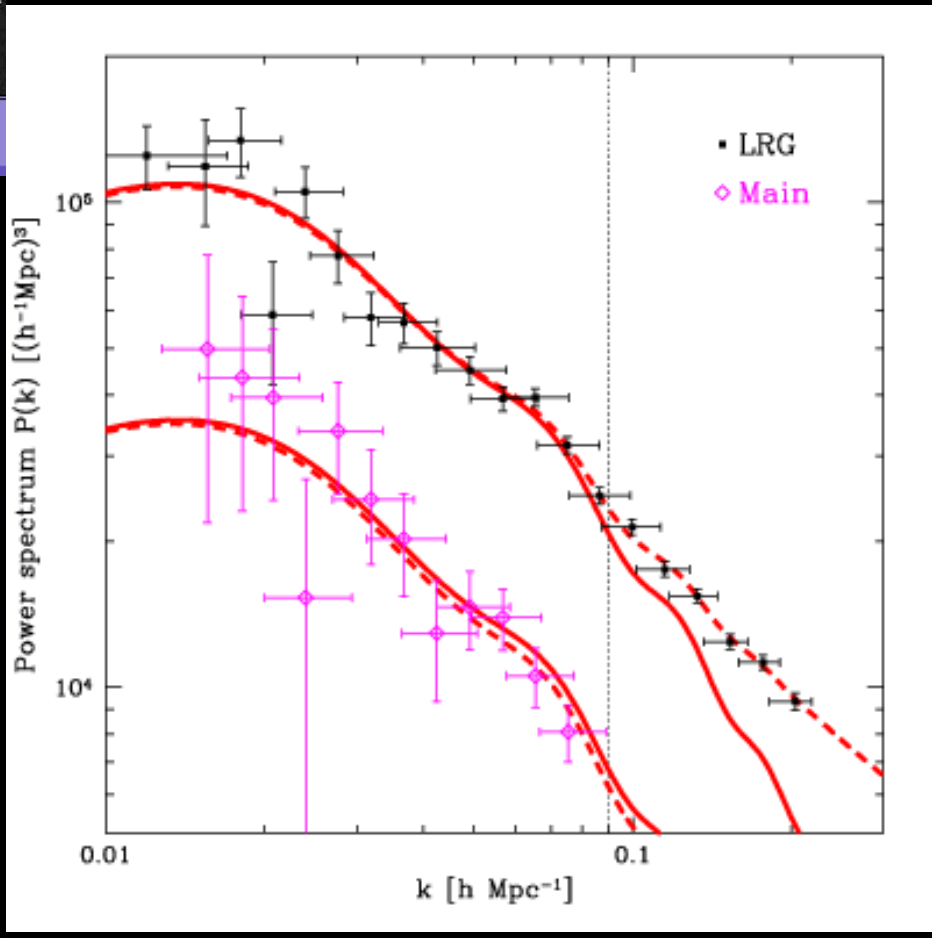


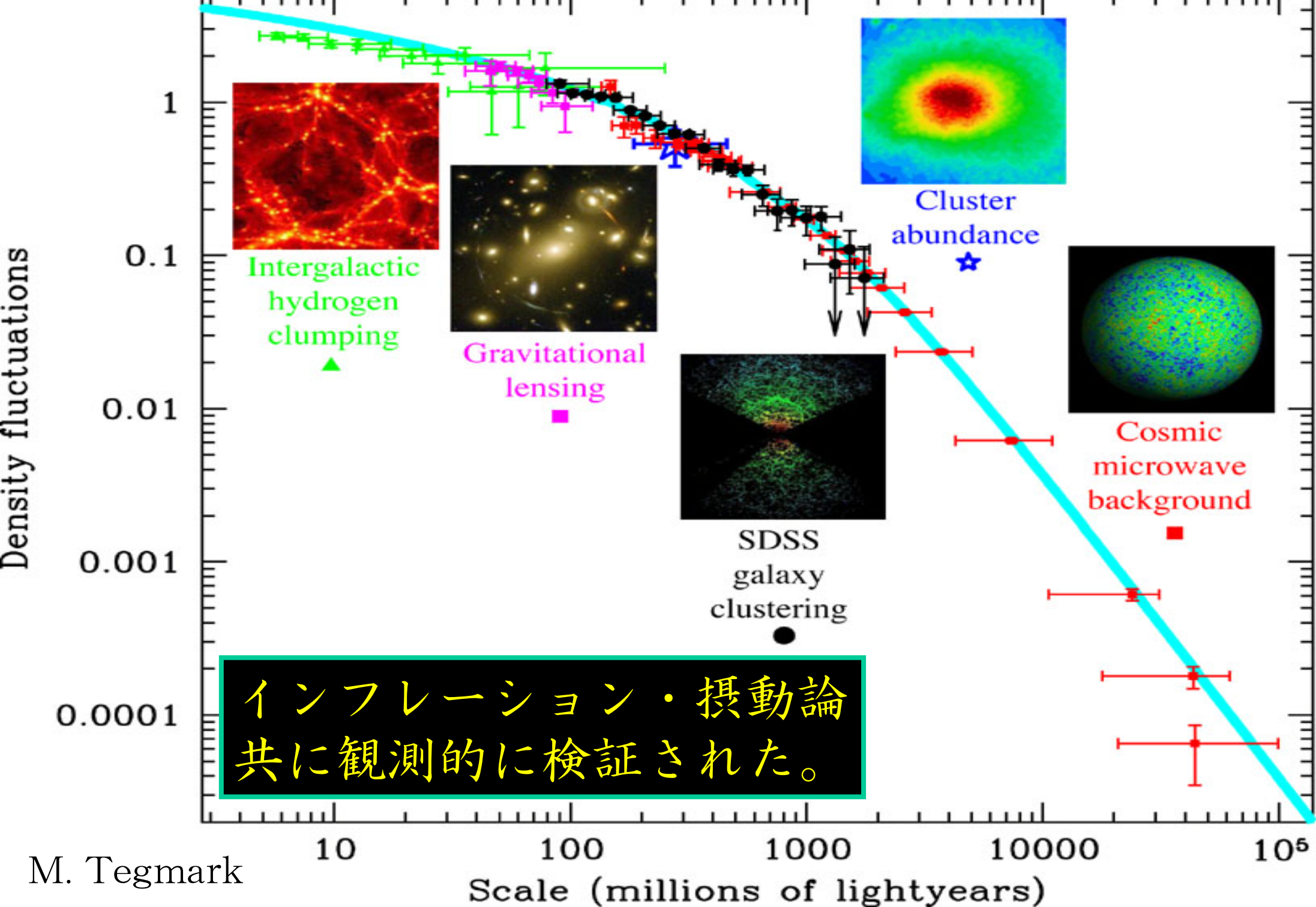


１次摂動論の成果：銀河分布

銀河の分布関数を観測
～ バリオンゆらぎのスペクトル
～ ダークマターゆらぎのスペクトル

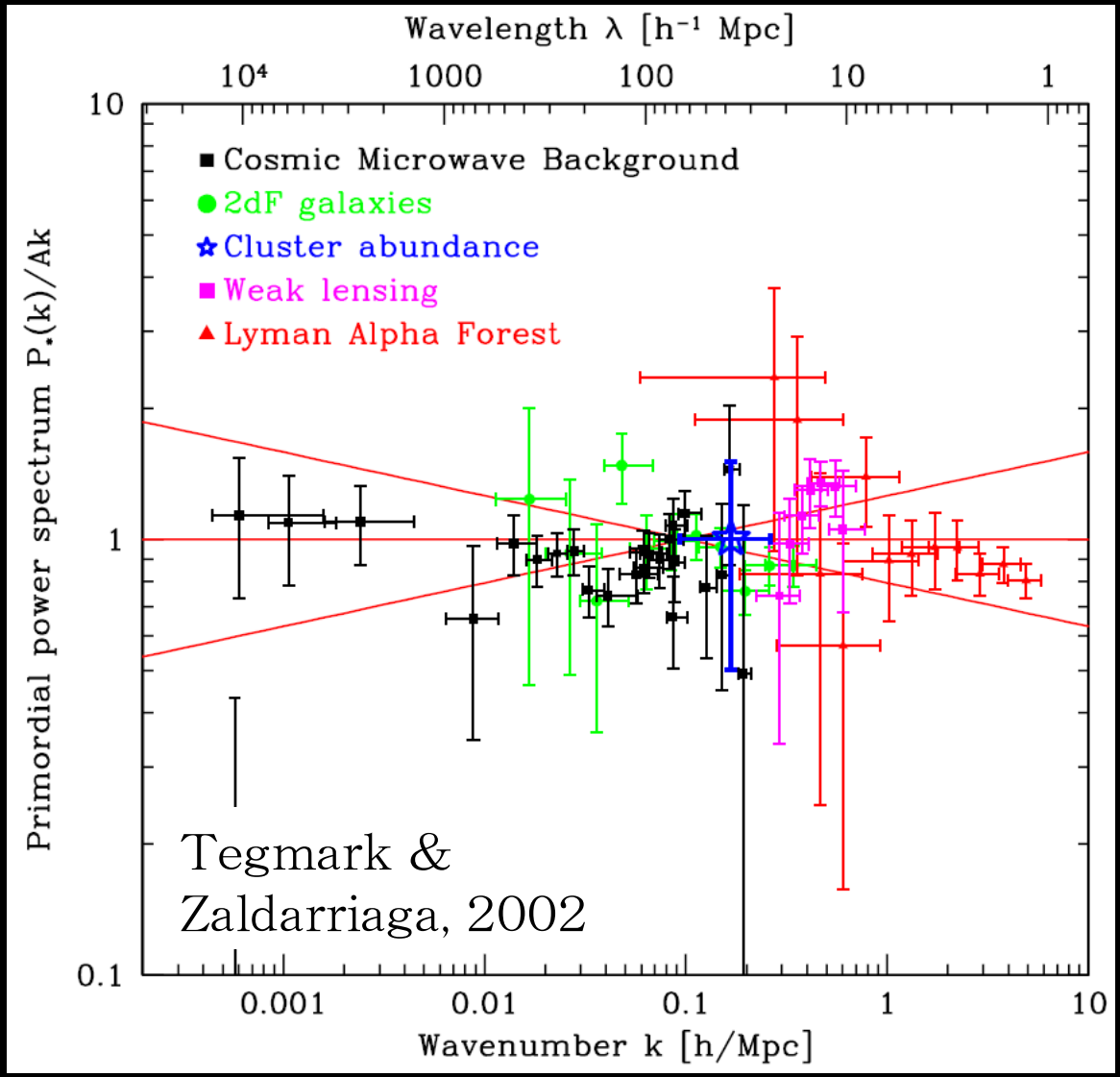





Density fluctuations
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
Intergalactic hydrogen clumping
Gravitational lensing
Cluster abundance
SDSS galaxy clustering
Cosmic microwave background
インフレーション・摂動論
共に観測的に検証された。
10
100
1000
10000
10⁵
Scale (millions of lightyears)
M. Tegmark

ゆらぎに関する情報

- スケール
  10Mpc ～ 10Gpc
- ゆらぎの大きさ
  $\delta \sim 2\times10^{-5}$
- スペクトル
  ほぼスケール不変
  $0.95 < n < 1.05$
  $-0.1 < dn/d\ln k < 0.1$
- 重力波
  $r < 0.1$



宇宙論的摂動１次のまとめ

理論

- 一様等方からのずれに関して摂動
- インフレーションで量子的に生成
- 一般相対論＋ボルツマン方程式＋流体方程式
- スカラー、ベクトル、テンソルに分解

観測

- ＣＭＢ、銀河分布・・・
- スカラーはかなり観測できた
- ベクトルは無し
- テンソルは上限だけ

２、宇宙論的摂動：２次

２次摂動のmotivation

なんで２次を考えるか？

△より精密に　→　今のところ１次で十分精密

○１次では現れない効果

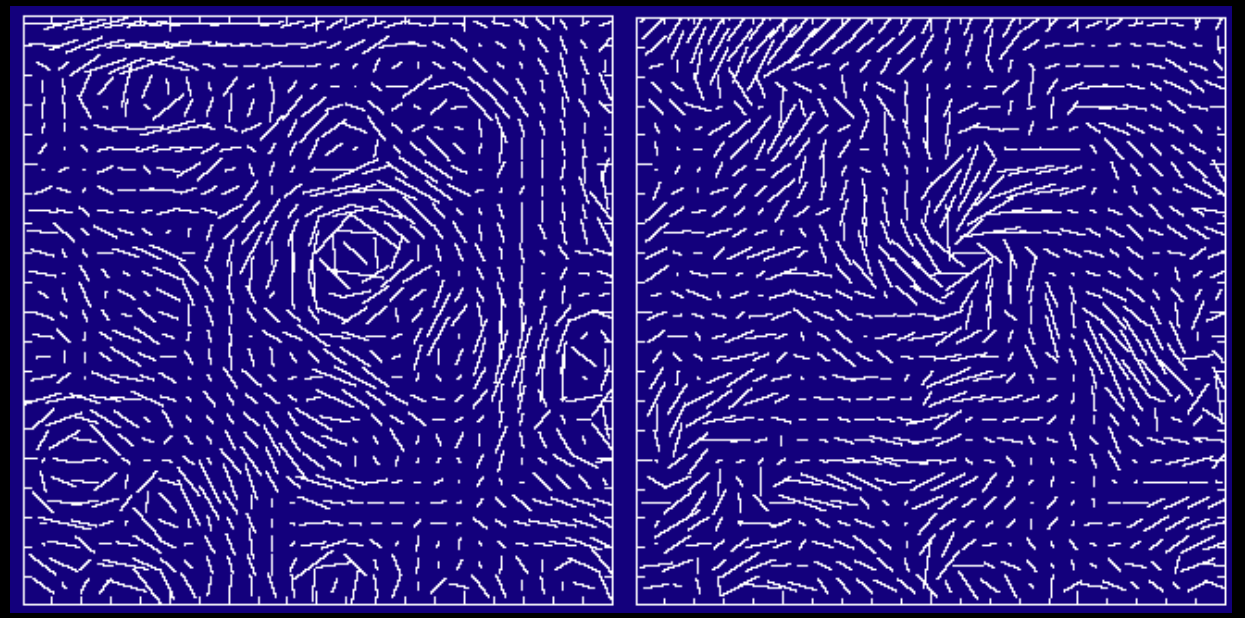
・B mode（１次のテンソルがなければ）

・non Gaussianity

・磁場

・重力波

◎１次をより
よく知る



計量の２次摂動

計量の２次摂動

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 \;=\; a^2(\eta)\Bigg[& -\left(1+2\Phi^{(1)}+2\Phi^{(2)}\right)\mathrm{d}\eta^2 + 2\left(V_i^{(1)}+V_i^{(2)}\right)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x^i \\
& + \left\{\left(1-2\Psi^{(1)}-2\Psi^{(2)}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}\left(h_{ij}^{(1)}+h_{ij}^{(2)}\right)\right\}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\Bigg]
\end{aligned}
$$

２次摂動では２つの意味でmode mixingがある。
なので面白く、複雑になる。

mode mixing ①

２次スカラーの方程式

$$\Box\Phi^{(2)} = (\cdots)$$

$$V^{(1)i}V_i^{(1)},\quad h_{ij}^{(1)}\partial^i\partial^j\Phi^{(1)},\quad h_{ij}^{(1)}\partial^i V^{(1)j}$$

２次のスカラーは１次のベクトル・テンソルから作ることができる　→　mode mixing!!

逆に、２次のベクトル・テンソルのソース項には１次のスカラー（の積）が存在する

- vector $\cdots \partial^j(\partial_i\Phi^{(1)}\partial_j\Psi^{(1)} - \partial_j\Phi^{(1)}\partial_i\Psi^{(1)})$
- tensor $\cdots (\delta_i^k\nabla^2 - \partial_i\partial^k)(\partial_j\Phi^{(1)}\partial_k\Psi^{(1)} - \partial_k\Phi^{(1)}\partial_j\Psi^{(1)})$

ただし純粋に２次の量同士は混合しない

方程式の構造（雰囲気） I

Nakamura, 2007

計量の展開

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu} + g^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots$$

アインシュタインテンソルの展開

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) &= G_{\mu\nu}(g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) \\ \text{テイラー展開} &= G_{\mu\nu}(g^{(0)}_{\mu\nu}) + \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}}(g^{(0)}_{\mu\nu})\delta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_{\mu\nu}}{\partial g^2_{\alpha\beta}}(g^{(0)}_{\mu\nu})(\delta g_{\alpha\beta})^2 + \cdots \\ &\equiv G^{(0)}_{\mu\nu} + G^{(1)}_{\mu\nu} + G^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots \end{aligned}$$

アインシュタイン方程式（真空）

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(g^{(1)}_{\mu\nu}) = 0$$

$$G^{(2)}_{\mu\nu} = G^{(2)}_{\mu\nu}(g^{(2)}_{\mu\nu}) + G^{(2)}_{\mu\nu}((g^{(1)}_{\mu\nu})^2) = 0$$

方程式の構造（雰囲気）Ⅱ

各オーダーのアインシュタイン方程式

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(g^{(1)}_{\mu\nu}) = 0$$

$$G^{(2)}_{\mu\nu}(g^{(2)}_{\mu\nu}) = -G^{(2)}_{\mu\nu}((g^{(1)}_{\mu\nu})^2) \equiv \kappa^2 T^{\rm grav}_{\mu\nu}((g^{(1)}_{\mu\nu})^2)$$

テイラー展開１次
→　同じ構造

テイラー展開２次
→　ソース項

例：テンソル

$$\Box h^{(1)}_{ij} = 0$$

$$\Box h^{(2)}_{ij} = f\left[\left(\Phi^{(1)}\right)^2, \Phi^{(1)} h^{(1)}_{ij}, \left(h^{(1)}_{ij}\right)^2\right]$$

・純２次は分離
・２つの１次の量の積が２次の源になる

mode mixing ② (I)

2次スカラーの方程式

$$\partial_t^2 \Phi^{(2)} - \nabla^2 \Phi^{(2)} = M^2 \Phi^{(1)2}$$

これをフーリエ変換する

$$\Phi(x^i) = \int d^3k \; e^{ik_j x^j} \Phi(k_i)$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x^i)^2 &= \left[\int d^3k \; e^{ik_j x^j} \Phi(k_i) \right] \times \left[\int d^3k' \; e^{ik'_j x^j} \Phi(k'_i) \right] \\
&= \int d^3k \; d^3k' \; e^{i(k_j + k'_j) x^j} \Phi(k_i) \Phi(k'_i) \\
&= \int d^3K \; d^3k' \; e^{iK_j x^j} \Phi(K_i - k'_i) \Phi(k'_i) \qquad (K_i = k_i + k'_i) \\
&= \int d^3K \; e^{iK_j x^j} \left[\int d^3k' \; \Phi(K_i - k'_i) \Phi(k'_i) \right]
\end{aligned}$$

mode mixing ② (II)

$$\partial_t^2 \Phi^{(2)} - \nabla^2 \Phi^{(2)} = M^2 \Phi^{(1)2}$$

$$\int d^3k \, e^{ik_j x^j} \left(\partial_t^2 + k^2\right) \Phi^{(2)}(k_i)$$

$$= M^2 \int d^3k \, e^{ik_j x^j} \left[\int d^3k' \, \Phi^{(1)}(k_i - k_i') \Phi^{(1)}(k_i') \right]$$

$$\left(\partial_t^2 + k^2\right) \Phi^{(2)}(k_i) = M^2 \int d^3k' \, \Phi^{(1)}(k_i - k_i') \Phi^{(1)}(k_i')$$

あるスケールの２次摂動のソースとして
あらゆるスケールの１次摂動が効いてくる
→　mode mixing!!

宇宙論的摂動２次のまとめ

- １次では現れない効果
  - B mode
  - non Gaussianity
  - 磁場
  - 重力波
- mode mixing
  - スカラー、ベクトル、テンソル
    （純２次は分離される）
  - フーリエ波数
- 今日のお話
  - 重力波　→　２次摂動論の単純な応用
  - 磁場　→　２次摂動論＋α

3、重力波の生成

重力波の生成

とにかく物が動けば重力波が出る

4重極公式

- binary
- 超新星爆発
- ＧＲＢ

} 天体起源

- cosmic string
- 相転移時のバブル
- preheating

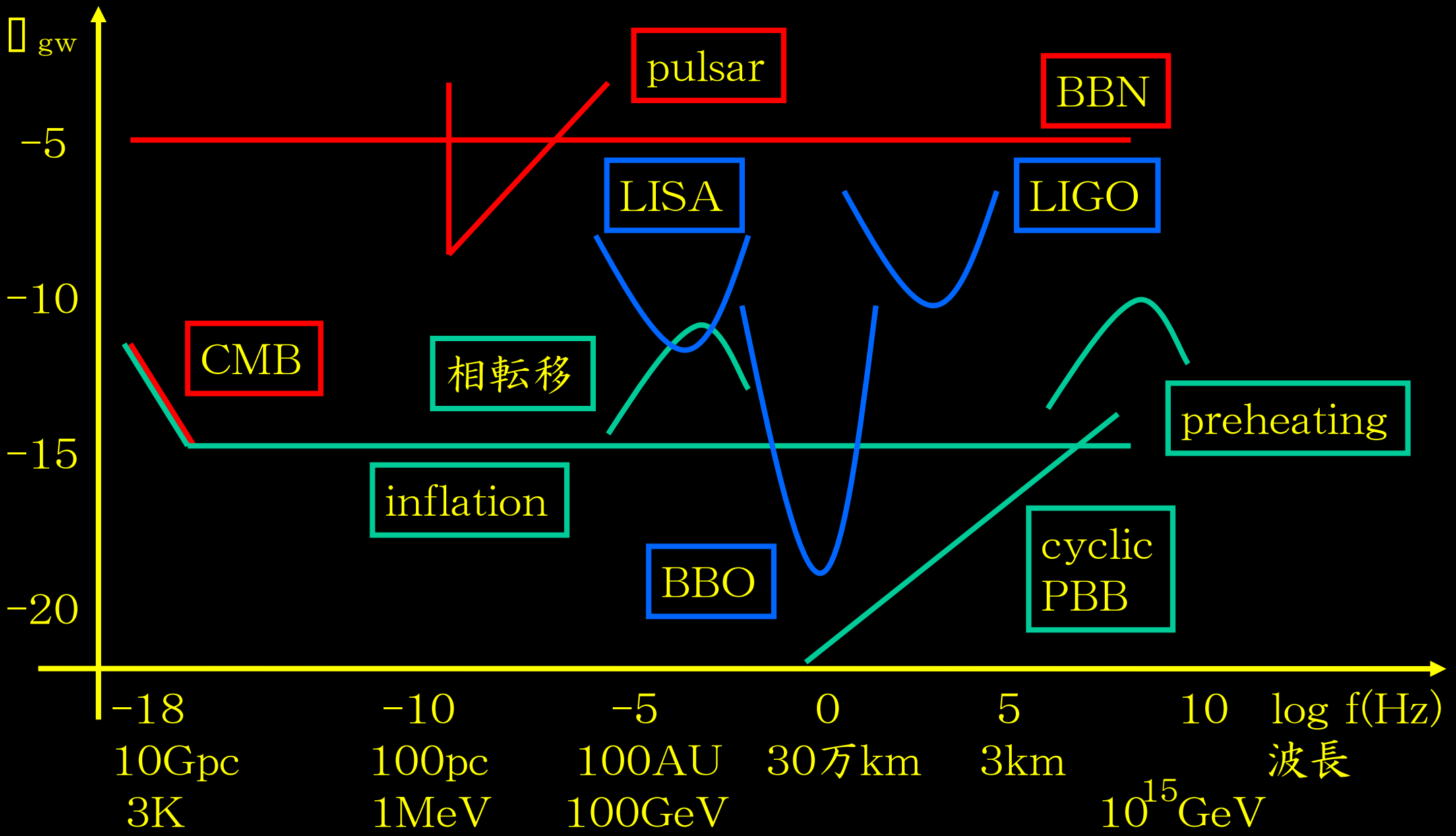
＋

量子論的

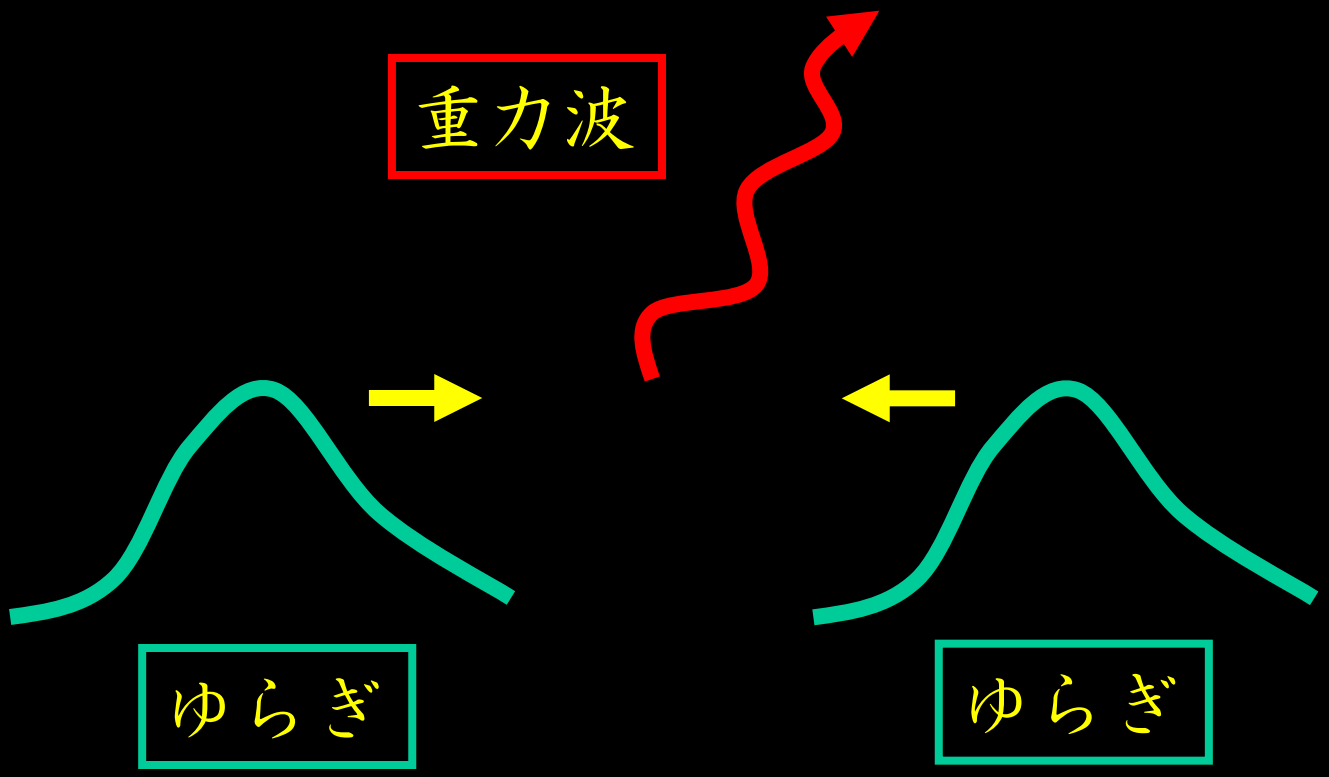
- 初期宇宙

} 宇宙論的

重力波スペクトル


Ω gw
-5
-10
-15
-20
pulsar
BBN
LISA
LIGO
CMB
相転移
preheating
inflation
BBO
cyclic
PBB
-18
-10
-5
0
5
10
log f(Hz)
10Gpc
100pc
100AU
30万km
3km
波長
3K
1MeV
100GeV
10^15GeV

ゆらぎによる重力波生成のイメージ①



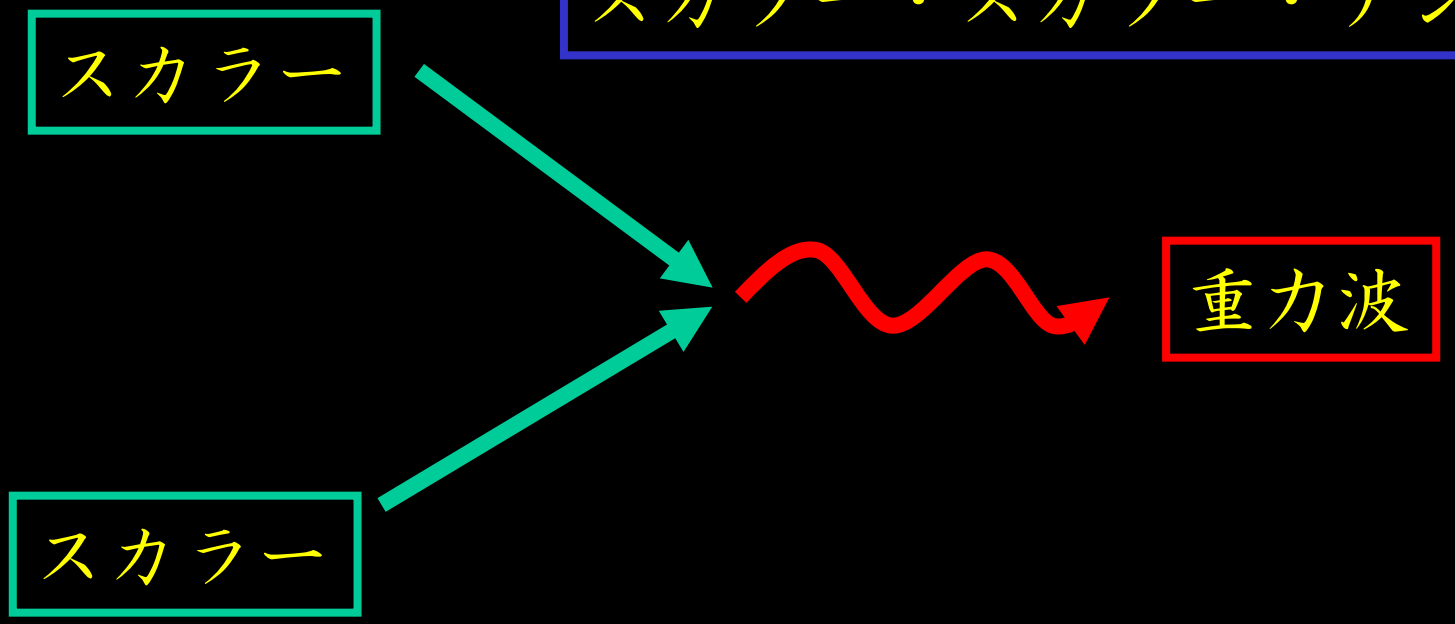
４重極公式的な理解で（たぶん）ＯＫ。

ゆらぎによる重力波生成のイメージ②

作用の摂動展開

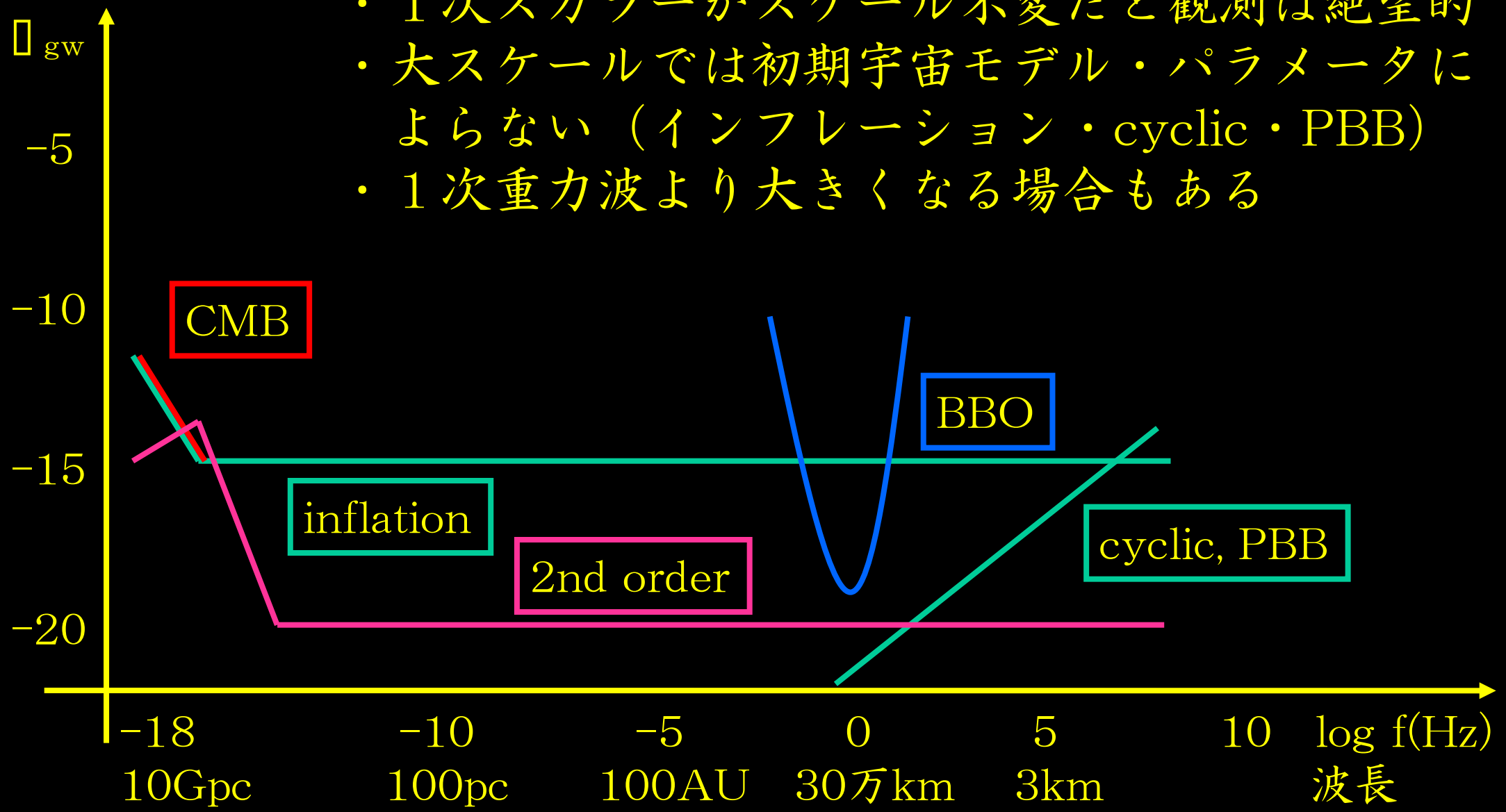
$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2\kappa^2}R \\
&= \int d^4x\frac{1}{2\kappa^2}\left[\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi+\partial_\mu h_{ij}\partial^\mu h_{ij}+h^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

スカラー・スカラー・テンソル結合

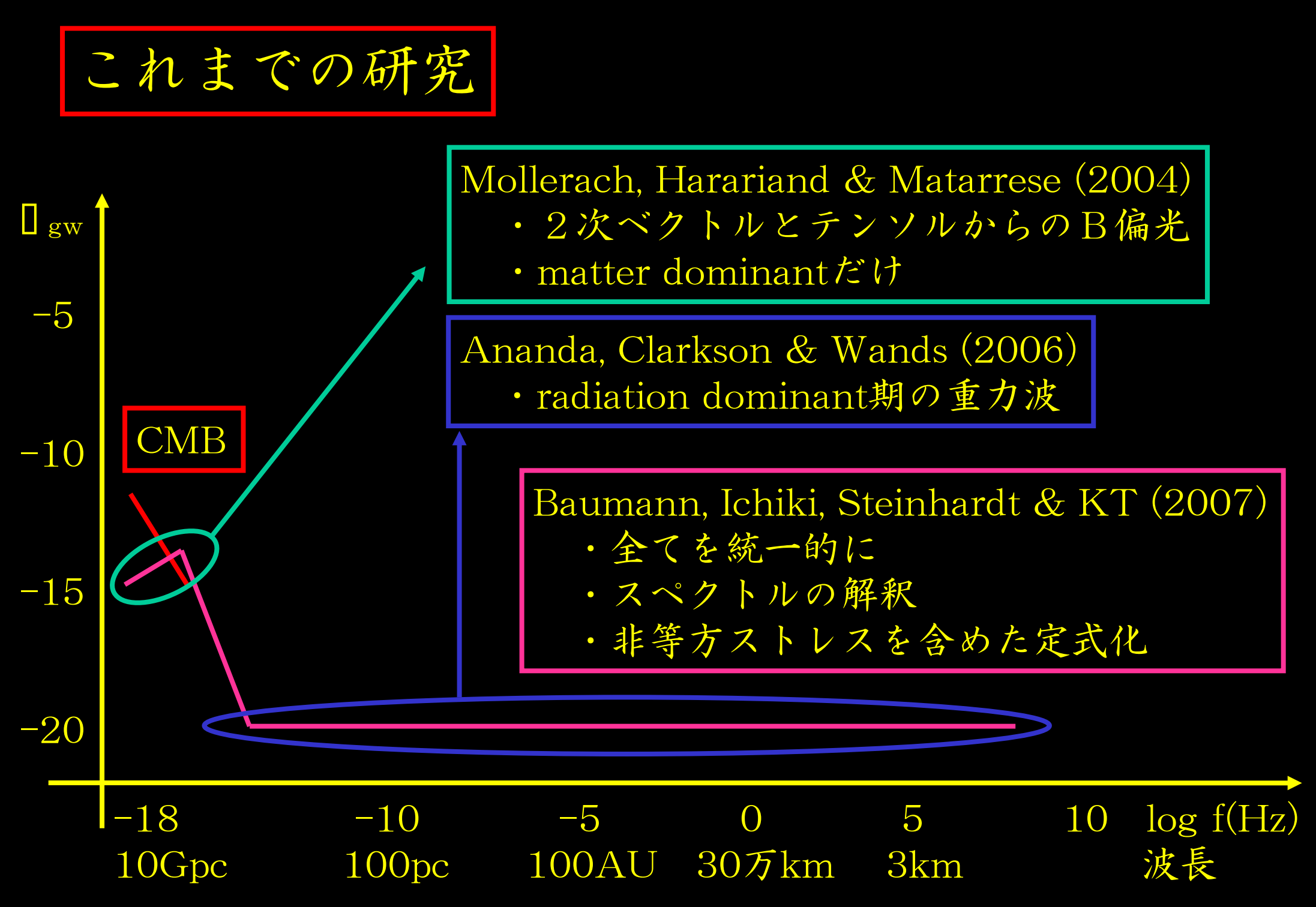


２次の重力波スペクトル

・１次スカラーがスケール不変だと観測は絶望的
・大スケールでは初期宇宙モデル・パラメータによらない（インフレーション・cyclic・PBB）
・１次重力波より大きくなる場合もある



これまでの研究


Mollerach, Hararianda & Matarrese (2004)
・２次ベクトルとテンソルからのＢ偏光
・matter dominantだけ
Ananda, Clarkson & Wands (2006)
・radiation dominant期の重力波
Baumann, Ichiki, Steinhardt & KT (2007)
・全てを統一的に
・スペクトルの解釈
・非等方ストレスを含めた定式化
CMB
−5
−10
−15
−20
−18
10Gpc
−10
100pc
−5
100AU
0
30万km
5
3km
10
log f(Hz)
波長

注意

量子的生成と古典的生成は独立な現象

	量子的生成	古典的生成
時期	inflation	RD (subhorizon)
１次	$h_1 \sim \sqrt{r}\,\delta$	ゼロ
２次	$h_2 \sim r\,\delta^2$	$h_2 \sim \delta^2$

量子的 h_1 ＜ 古典的 h_2
となってもおかしくない。

具体的な計算

計量（１次はスカラーだけ）

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[-\left(1+2\Phi^{(1)}+2\Phi^{(2)}\right)\mathrm{d}\eta^2+2V_i^{(2)}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x^i + \left\{\left(1-2\Psi^{(1)}-2\Psi^{(2)}\right)\delta_{ij}+\frac{1}{2}h_{ij}^{(2)}\right\}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right]$$

アインシュタイン方程式のＴＴ成分を抜き出す

$$\hat{T}_{ij}^{\ lm}G_{lm}^{(2)} = \kappa^2\hat{T}_{ij}^{\ lm}T_{lm}^{(2)}$$

射影テンソル

$$\hat{\mathcal{T}}_{ij}^{\ lm}\mathcal{S}_{lm} = \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[\mathsf{e}_{ij}(\mathbf{k})\mathsf{e}^{lm}(\mathbf{k})+\bar{\mathsf{e}}_{ij}(\mathbf{k})\bar{\mathsf{e}}^{lm}(\mathbf{k})\right]\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}'}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\mathcal{S}_{lm}(\mathbf{x}')$$

アインシュタインテンソル

２次テンソルの
波動方程式の部分

２つの１次スカラーの積

$$G^{(2)i}{}_{j} = a^{-2}\Bigg[\frac{1}{4}\left(h^{i}_{j}{}'' + 2\mathcal{H}h^{i}_{j}{}' - \nabla^2 h^{i}_{j}\right) + 2\Phi^{(1)}\partial^i\partial_j\Phi^{(1)} - 2\Psi^{(1)}\partial^i\partial_j\Phi^{(1)} + 4\Psi^{(1)}\partial^i\partial_j\Psi^{(1)}$$
$$+ \partial^i\Phi^{(1)}\partial_j\Phi^{(1)} - \partial^i\Phi^{(1)}\partial_j\Psi^{(1)} - \partial^i\Psi^{(1)}\partial_j\Phi^{(1)} + 3\partial^i\Psi^{(1)}\partial_j\Psi^{(1)}$$
$$+ \left(\Phi^{(2)}, \Psi^{(2)}, V_i^{(2)} \text{ terms}\right) + (\text{diagonal part})\,\delta^i_j\Bigg],$$

２次のスカラー・ベクトル等　→　射影で消える

エネルギー・運動量テンソル

２つの１次スカラーの積

$$T^{(2)i}{}_{j} = \left(\rho^{(0)} + P^{(0)}\right) v^{(1)i} v^{(1)}_{j} + P^{(0)} \Pi^{(2)i}{}_{j} + P^{(1)} \Pi^{(1)i}{}_{j} + P^{(2)} \delta^{i}_{j}$$

２次のテンソル
→　消えないが
難しいので
今回は無視

射影で消える

もう一工夫

ソースつき波動方程式

$$\Box h_{ij}^{(2)} = T_{ij}^{\rm grav}(\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)}) + T_{ij}^{\rm matter}(\rho^{(1)}, P^{(1)}, v_i^{(1)}, \Pi_{ij}^{(1)})$$

１次のスカラーのconstraintより

$$v_i^{(1)} = -\frac{2}{\kappa^2 a^2(\rho^{(0)} + P^{(0)})}\partial_i\left(\Psi^{(1)\prime} + \mathcal{H}\Phi^{(1)}\right),$$

$$\rho^{(1)} = -\frac{2}{\kappa^2 a^2}\left[3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}\Phi^{(1)} - \Psi^{(1)\prime}\right) + \nabla^2\Psi^{(1)}\right],$$

$$P^{(1)} \equiv c_s^2\rho^{(1)},$$

$$\Pi^{(1)i}{}_j = -\frac{1}{\kappa^2 a^2 P^{(0)}}\left(\partial^i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\right)\left(\Phi^{(1)} - \Psi^{(1)}\right)$$

全てのスカラーは□ と□ で書ける

２次テンソルの方程式

全て合わせて、

$$h''_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}h'_{\mathbf{k}} + k^2 h_{\mathbf{k}} = \mathcal{S}(\mathbf{k},\eta)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathbf{k},\eta) \;=\; & 4\int \frac{\mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{lm}(\mathbf{k})\tilde{k}_l\tilde{k}_m \\
& \left[\left\{ \frac{7+3w}{3(1+w)} - \frac{2c_s^2}{w} \right\} \Phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Phi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) + \left(1 - \frac{2c_s^2\tilde{k}^2}{3w\mathcal{H}^2} \right) \Psi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \right. \\
& + \frac{2c_s^2}{w} \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{3\mathcal{H}^2} \right) \Phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) + \left\{ \frac{8}{3(1+w)} + \frac{2c_s^2}{w} \right\} \frac{1}{\mathcal{H}} \Phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Psi'_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \\
& \left. - \frac{2c_s^2}{w\mathcal{H}} \Psi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Psi'_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) + \frac{4}{3(1+w)\mathcal{H}^2} \Psi'_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Psi'_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \right],
\end{aligned}$$

知っている１次スカラーをソース項とした波動方程式

計算したいもの

重力波のスペクトル

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{K}}(\eta) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{K}) P_h(k,\eta)$$

方程式の解

$$h_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{1}{a(\eta)} \int \mathrm{d}\tilde{\eta}\, g_{\mathbf{k}}(\eta;\tilde{\eta}) \Big[a(\tilde{\eta}) \mathcal{S}(\mathbf{k},\tilde{\eta}) \Big]$$

$$g''_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) g_{\mathbf{k}} = \delta(\eta - \tilde{\eta})$$

すると形式的には

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{K}}(\eta) \rangle = \frac{1}{a^2(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}_1 \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}_2\, a(\tilde{\eta}_1) a(\tilde{\eta}_2) g_{\mathbf{k}}(\eta;\tilde{\eta}_1) g_{\mathbf{K}}(\eta;\tilde{\eta}_2) \langle \mathcal{S}(\mathbf{k},\tilde{\eta}_1) \mathcal{S}(\mathbf{K},\tilde{\eta}_2) \rangle$$

と書ける。では〈SS〉はどんなものか？

ansemble平均の計算①

ソース項の構造

$$\mathcal{S}(\mathbf{k},\eta) \sim \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}\, f(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}},\eta)\, \Phi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)$$

early universeとlate universeの分離

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\eta) \equiv \Phi(k\eta)\,\psi_{\mathbf{k}}, \quad \Psi_{\mathbf{k}}(\eta) \equiv \Psi(k\eta)\,\psi_{\mathbf{k}}$$

transfer function：horizonに入ってからの発展

primordial fluctuation：ゆらぎの初期条件
　インフレーションでできたゆらぎの統計的情報

$$\langle \psi_{\mathbf{k}}\psi_{\tilde{\mathbf{k}}}\rangle = \frac{2\pi^2}{k^3}P(k)\,\delta(\mathbf{k}+\tilde{\mathbf{k}})$$

$$P(k) = \frac{4}{9}\Delta^2_{\mathcal{R}}(k_0)\left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s-1}$$

ansemble平均の計算②

すると、

$$\mathcal{S}(\mathbf{k},\eta) \sim \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}\, F(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}},\eta)\, \psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}\psi_{\tilde{\mathbf{k}}}$$

transfer function とかいろいろ

primordialな部分

$$\langle \mathcal{S}(\mathbf{k},\eta_1)\mathcal{S}(\mathbf{K},\eta_2)\rangle \sim \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}\, \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{K}}\, F(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}},\eta_1)\, F(\mathbf{K},\tilde{\mathbf{K}},\eta_2)\, \langle \psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}\psi_{\tilde{\mathbf{k}}}\psi_{\mathbf{K}-\tilde{\mathbf{K}}}\psi_{\tilde{\mathbf{K}}}\rangle$$

ウィックの定理

$$\sim \delta(\mathbf{k}+\mathbf{K}) \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}\, \mathcal{F}(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}},\eta_1,\eta_2) P(|\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}|)P(\tilde{k})$$

ansemble平均の計算③

下の式を思い出す

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{K}}(\eta)\rangle = \frac{1}{a^2(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}_1 \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}_2 \, a(\tilde{\eta}_1) a(\tilde{\eta}_2) g_{\mathbf{k}}(\eta;\tilde{\eta}_1) g_{\mathbf{K}}(\eta;\tilde{\eta}_2) \, \langle \mathcal{S}(\mathbf{k},\tilde{\eta}_1) \mathcal{S}(\mathbf{K},\tilde{\eta}_2)\rangle$$

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{K}}(\eta)\rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{K}) P_h(k,\eta)$$

重力波スペクトルの解析的な表式

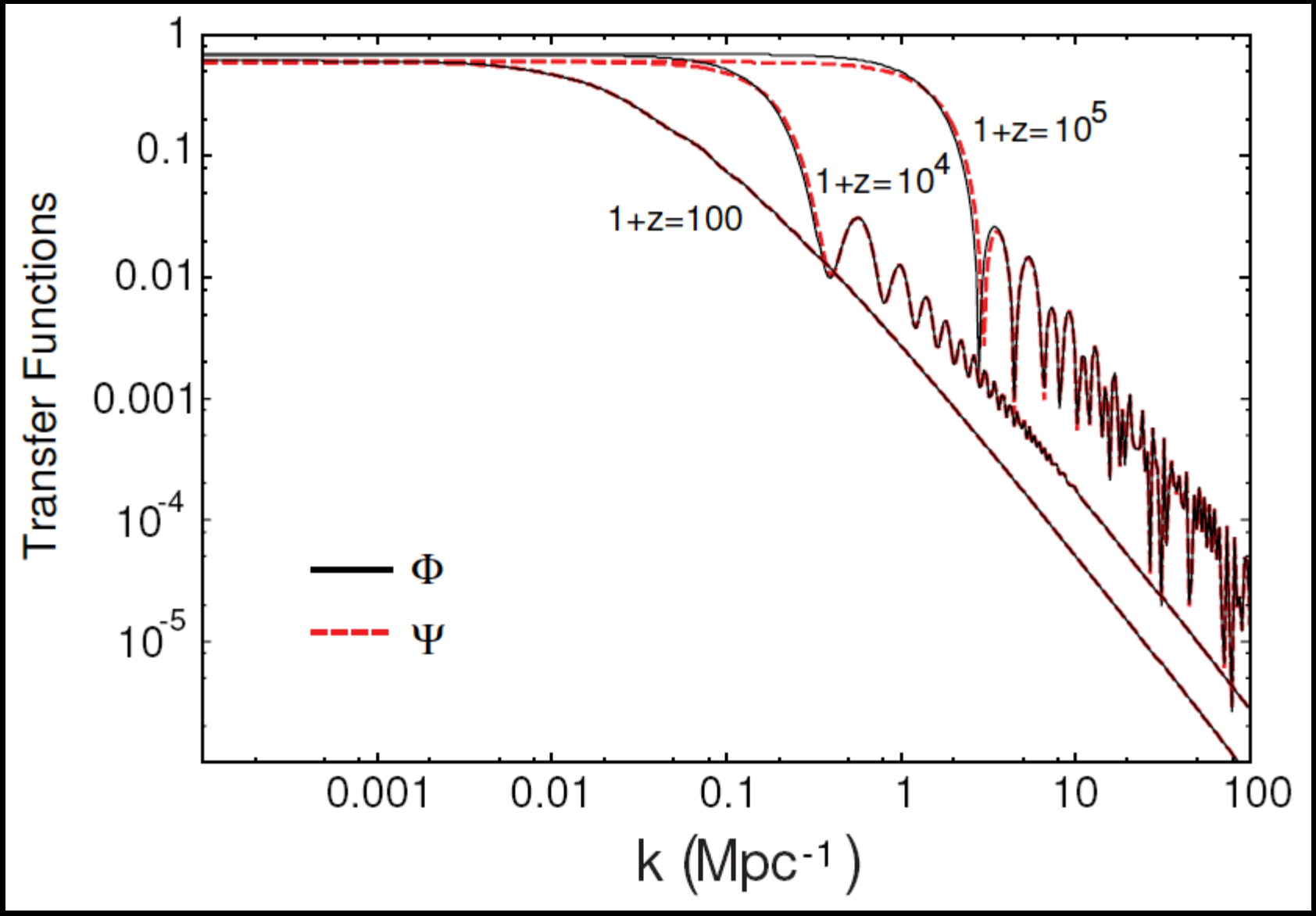
$$P_h(k,\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}_1 \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}_2 \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}} \, \mathcal{F}(\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}},\eta_1,\eta_2) P(|\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}|) P(\tilde{k})$$

transfer functionなど
１次摂動論で決まる

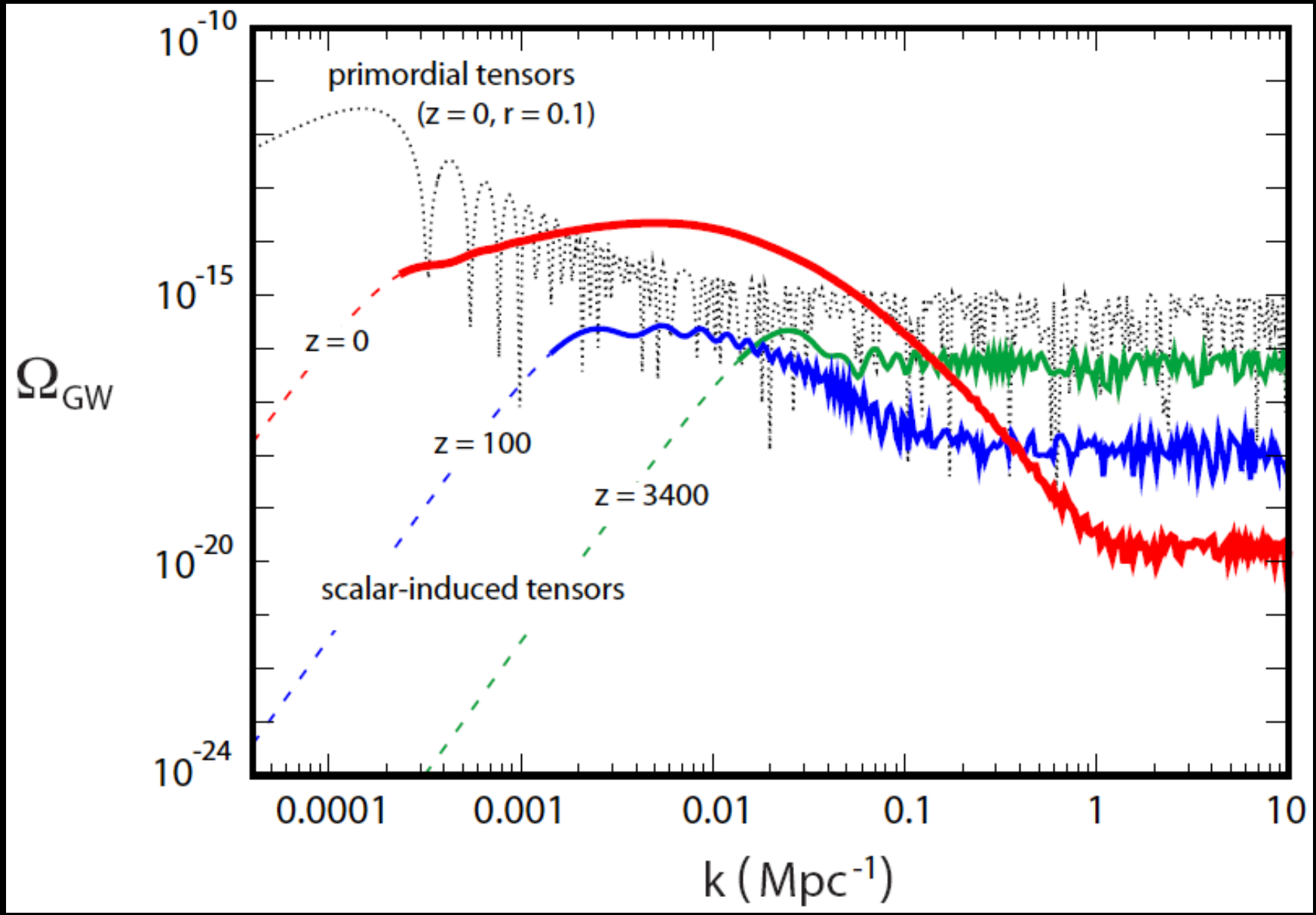
初期宇宙モデルで決まる
（観測的にある程度
決まっている）

これを数値的に積分する

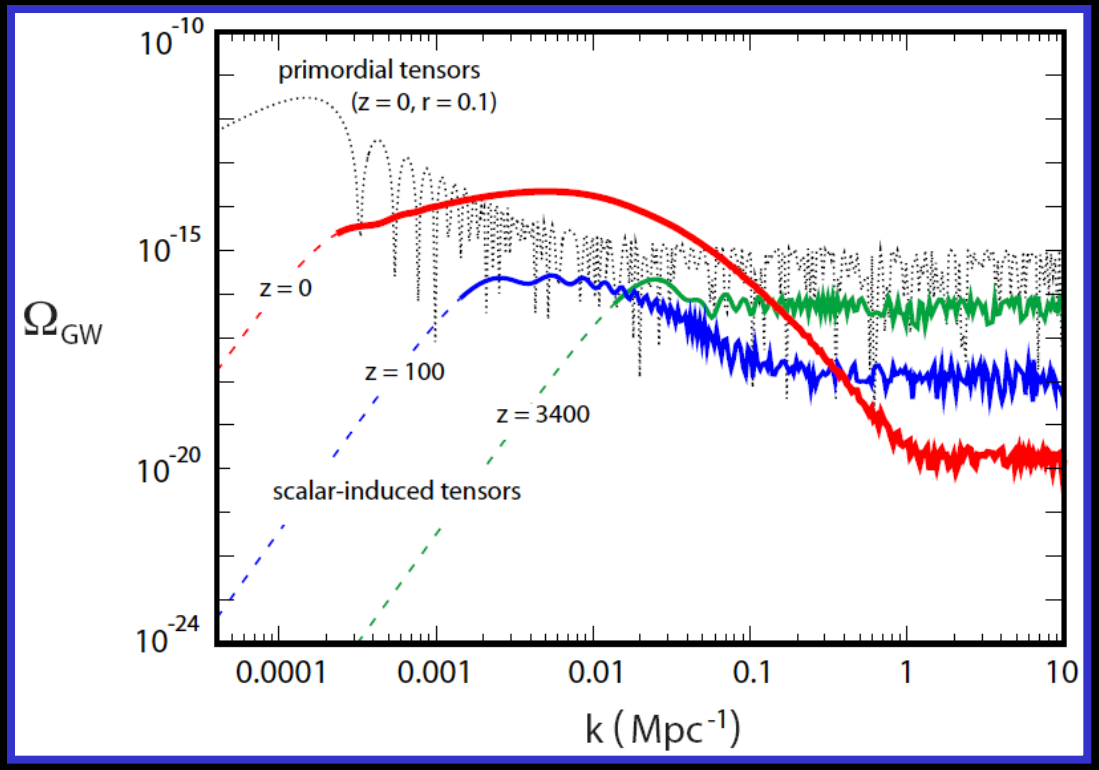
重力ポテンシャルの振る舞い



数値計算によるスペクトル



２次の重力波スペクトル



Ω_{gw}

解釈したい
・２つのスケール
・ＣＭＢの制限？

-5
-10
-15
-20

CMB

inflation

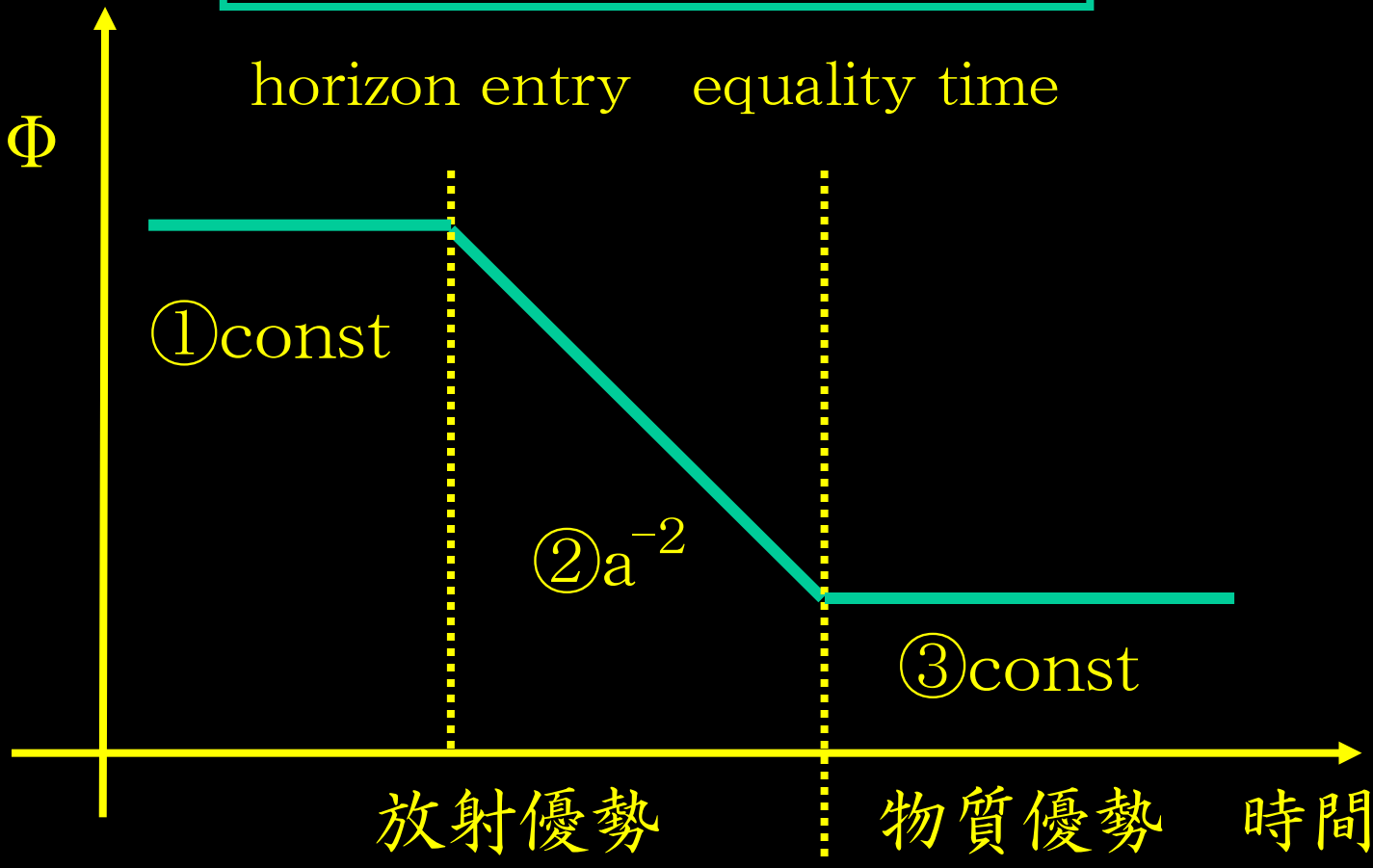
2nd order

-18 10Gpc
-10 100pc
-5 100AU
0 30万km
5 3km
10 波長
log f(Hz)

スペクトルの解釈

$$h''_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}h'_{\mathbf{k}} + k^2 h_{\mathbf{k}} = \mathcal{S}(\mathbf{k},\eta) \sim \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}\, \tilde{k}^2\, \Phi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)$$

Φ（～Ψ）の時間発展

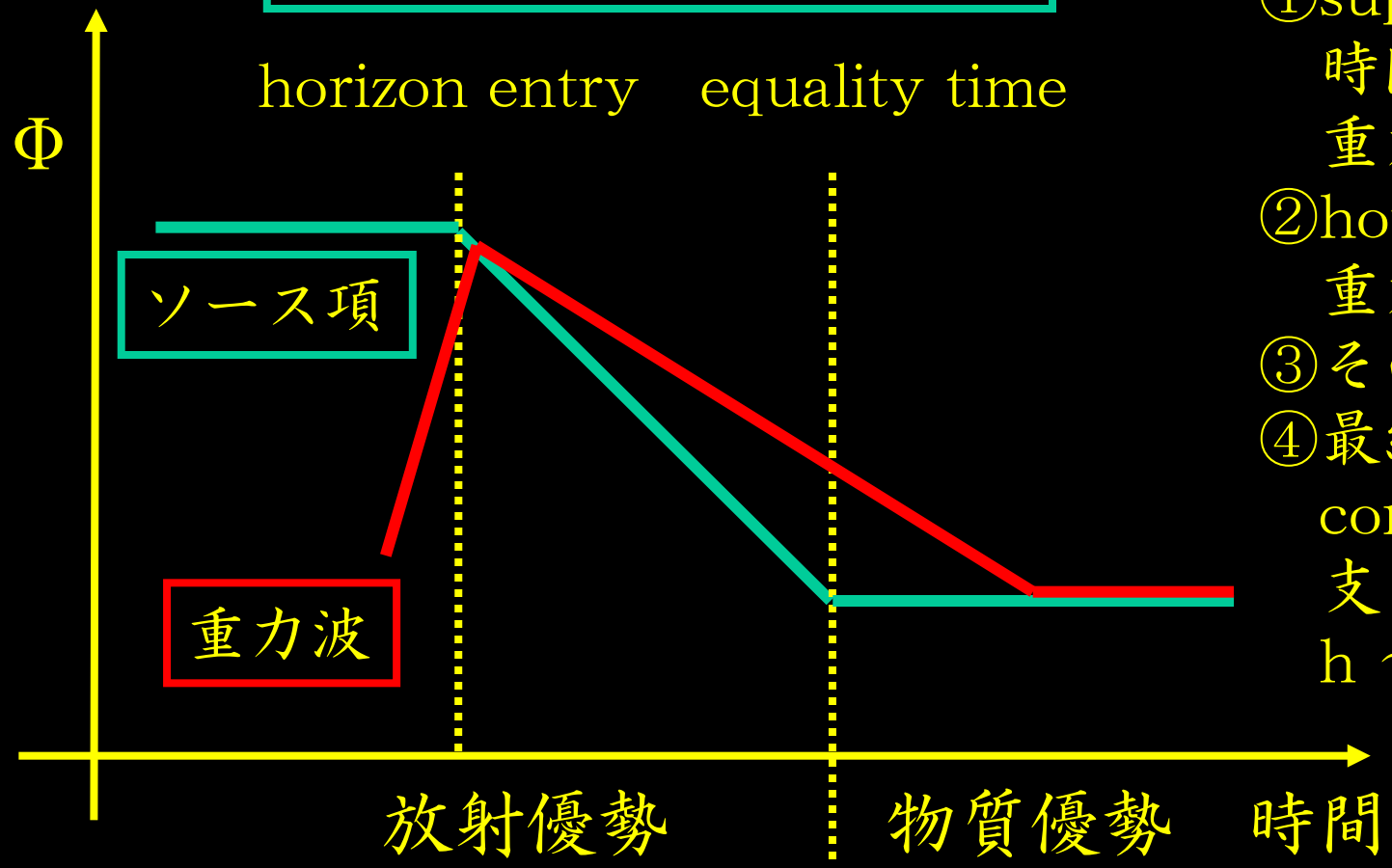


①superhorizon
～const
②放射優勢
→音速～光速
→ゆらぎは成長
できない
→Φはdecay
③物質優勢
→ゆらぎ成長
→Φ～const

重力波の振る舞い①

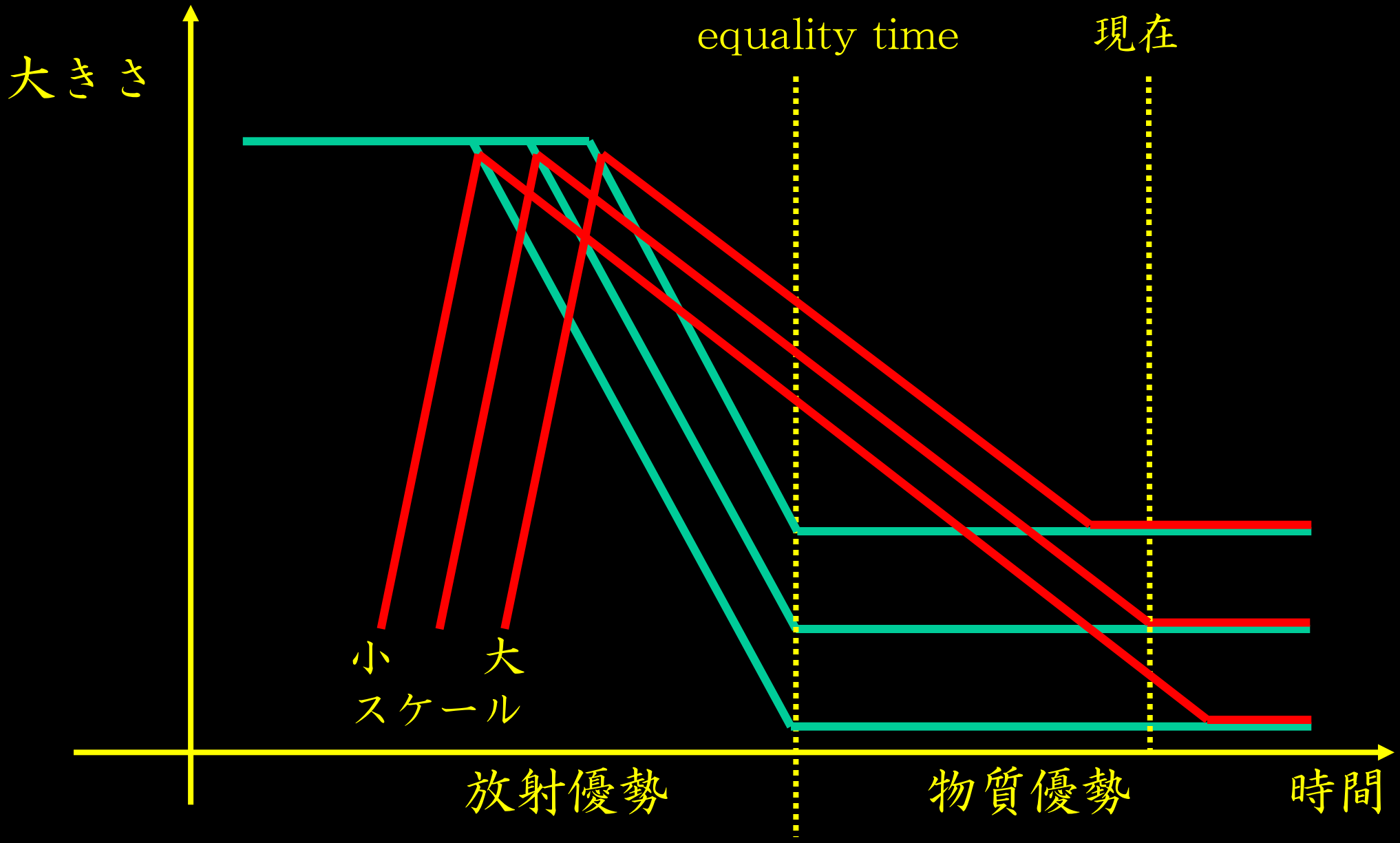
$$h''_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}h'_{\mathbf{k}} + k^2 h_{\mathbf{k}} = \mathcal{S}(\mathbf{k},\eta) \sim \int \mathrm{d}^3\tilde{\mathbf{k}}\, \tilde{k}^2\, \Phi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)\Phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)$$

ソース項の時間発展



①superhorizon
　時間微分項 ～ H^2hが卓越
　重力波は生成されない
②horizon entry
　重力波生成：h ～ S/k^2
③その後しばらく1/aで減衰
④最終的には
　constantなソース項に
　支えられて作られ続ける
　h ～ const

重力波の振る舞い②



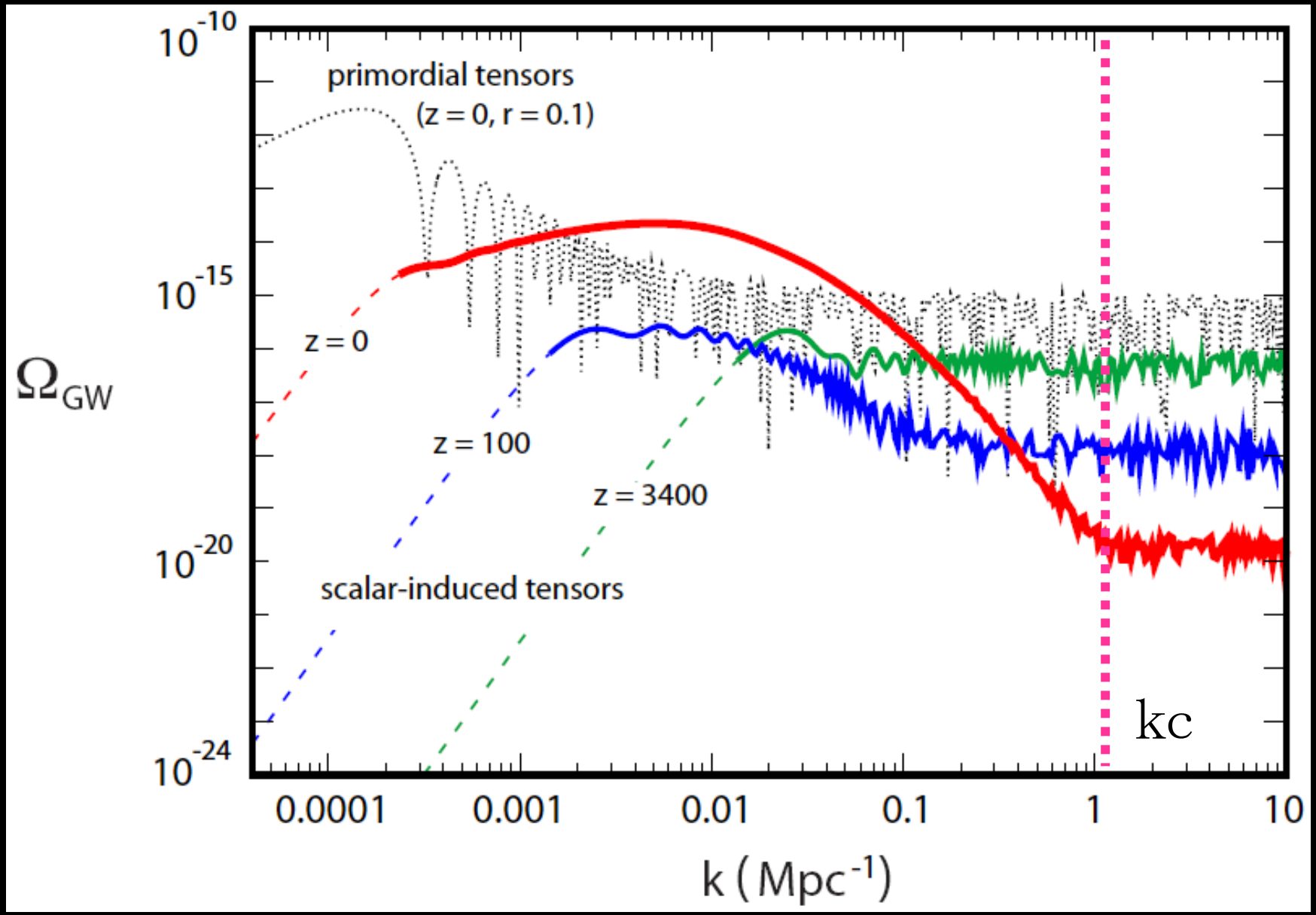
重力波の振る舞い③

現在ちょうどconstantな振幅に落ち着くような
criticalなスケールがある(kc)。

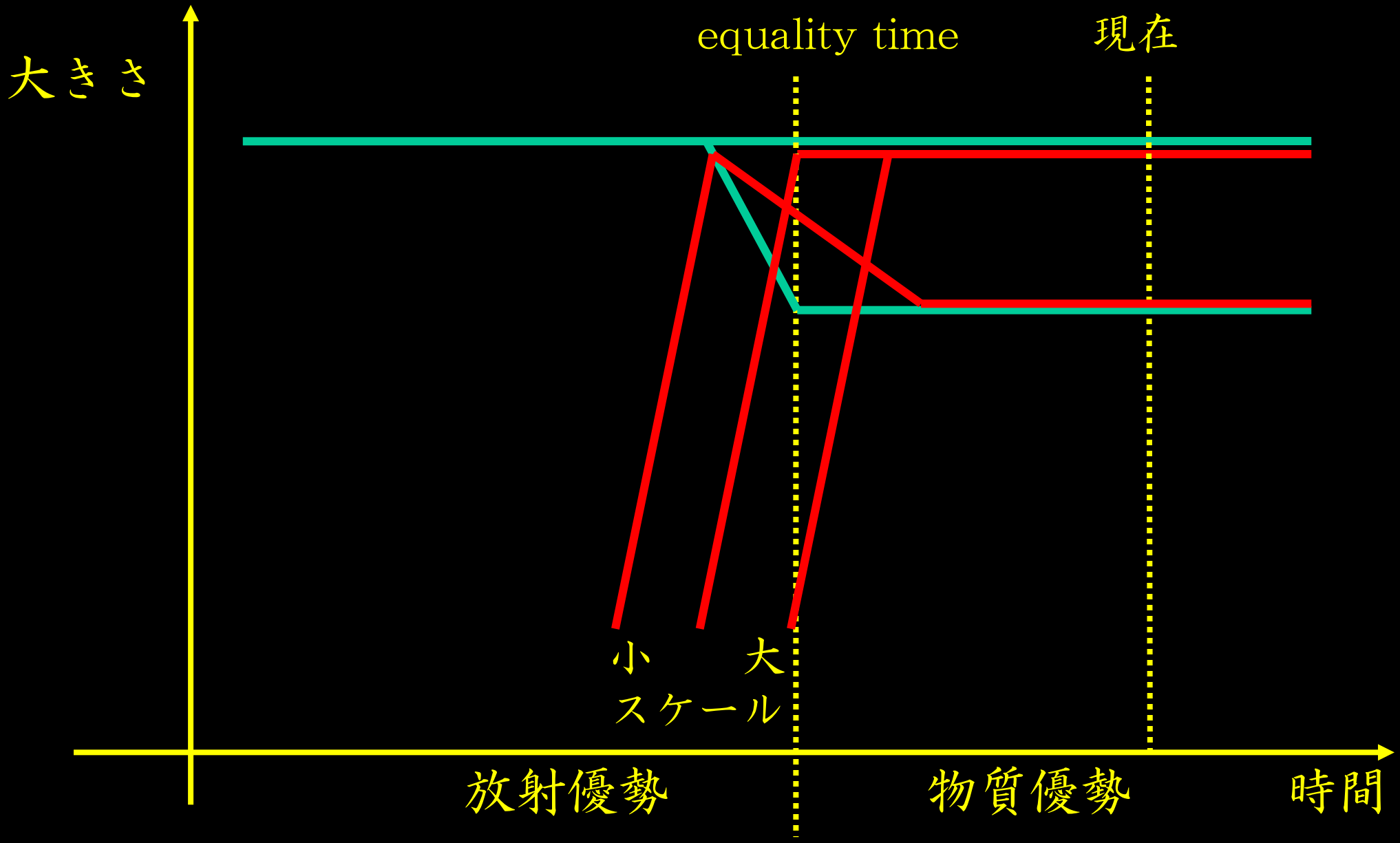
・それより小さなスケールではhorizon entry以来
1/aで落ち続けている
→　１次の小スケールと同じ振る舞い

・それより大きなスケールではある程度
減衰してからconstantに落ち着く
→　大スケールほどあまり減衰せず
早くconstantになる
→　大スケールほどΩは大きい(red spectrum)

数値計算によるスペクトル（再）



重力波の振る舞い④



重力波の振る舞い⑤

keqより大きなスケール（物質優勢でhorizonに入る）

→　horizonに入って以降全然減衰しない

→　振幅は波長によらない

振幅が時間的に一定だとエネルギー密度は$1/a^2$で減衰

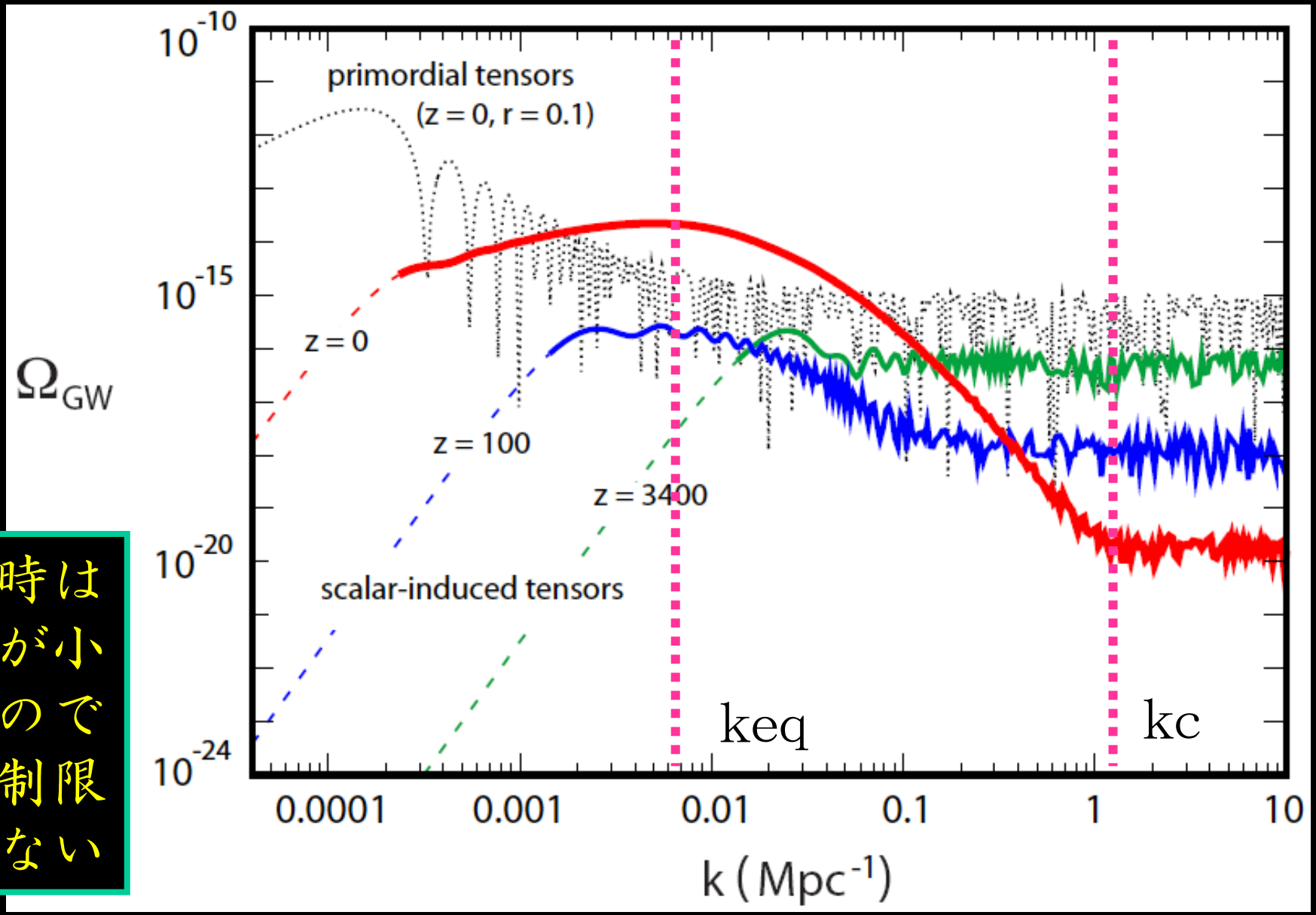
→　バックグラウンドよりゆっくり減衰

→　Ωは増加していく

→　先にhorizonに入ればその分Ωは増加

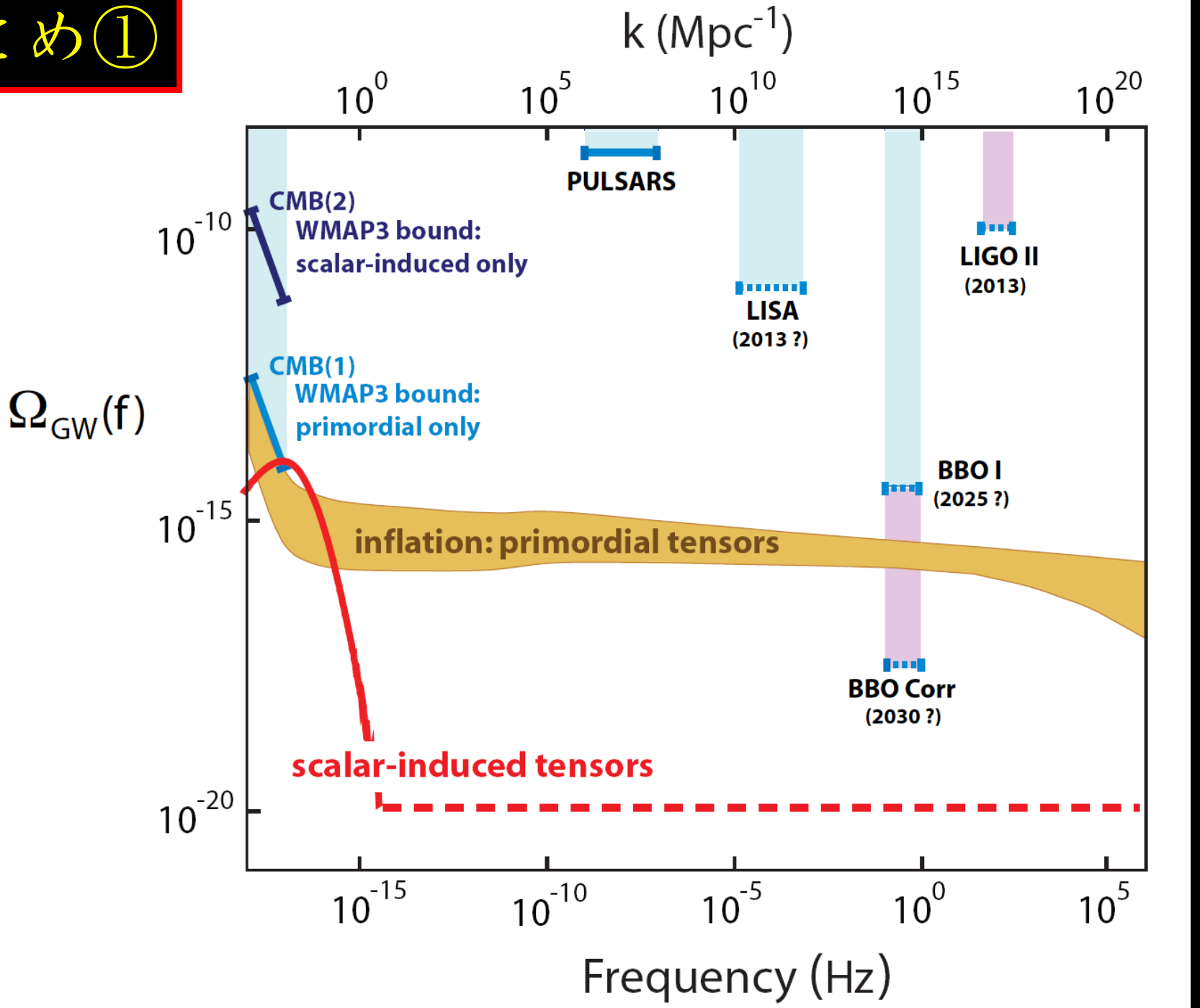
→　大スケールほどΩは小さい(blue spectrum)

数値計算によるスペクトル（再々）



再結合当時はもっとΩが小さかったのでＣＭＢの制限にかからない

まとめ①


k (Mpc^{-1})
10^{0}
10^{5}
10^{10}
10^{15}
10^{20}
PULSARS
CMB(2)
WMAP3 bound:
scalar-induced only
LISA
(2013 ?)
LIGO II
(2013)
CMB(1)
WMAP3 bound:
primordial only
$\Omega_{GW}(f)$
10^{-10}
10^{-15}
10^{-20}
BBO I
(2025 ?)
inflation: primordial tensors
BBO Corr
(2030 ?)
scalar-induced tensors
10^{-15}
10^{-10}
10^{-5}
10^{0}
10^{5}
Frequency (Hz)

まとめ②

摂動の２次の効果による重力波の生成

・２次ではモード間の混合がある
→　１次スカラーから古典的に生成

・１次スカラーはすでに観測されている
→　２次重力波は必ず存在する

・１次スカラーの性質は大スケールで知っている
→　大スケールの重力波スペクトルはかなり精密

・観測は非常に難しい
→　小スケールで１次スカラーに大きな
パワーがあれば可能性はある？

今後の課題

２次の非等方ストレスの効果は？

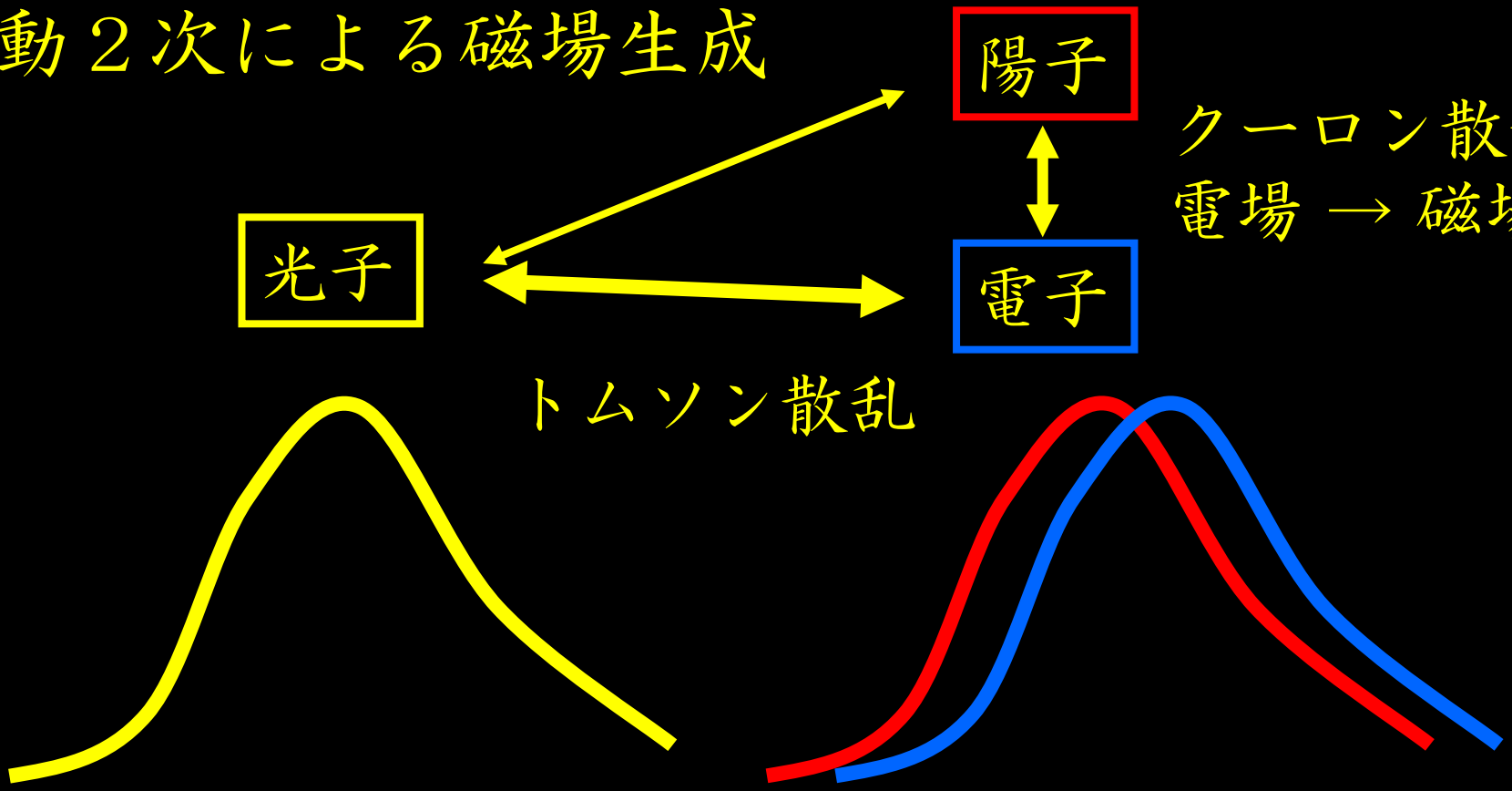
- １次の非等方ストレスは重力波を
  数十％減衰させる
- ２次は重力波を増幅させるような気がする・・・
- ２次のボルツマン方程式を解かねば

４、２次摂動で宇宙初期を探る

あたたかい目で見守ってください

磁場生成

摂動２次による磁場生成



トムソン散乱は主に電子を押す
→ 電場・電流生成（回転成分）
→ 磁場生成 (KT et al., 05, 06, 07)

磁場の発展方程式

電子・陽子の運動方程式＋Maxwell方程式
→ 磁場の発展方程式

$$\dot{B}^i \sim -2\epsilon^{ijk} C_{j,k}$$

スリップ項

vorticityの差

$$\sim \frac{8\sigma_T \overset{(0)}{\rho}_\gamma}{3e}\epsilon^{ijk}\left[\frac{\overset{(1)}{\rho}_{\gamma,k}}{\overset{(0)}{\rho}_\gamma}\left(\overset{(1)}{u}_{ej}-\overset{(1)}{u}_{\gamma j}\right)+\left(\overset{(2)}{u}_{ej,k}-\overset{(2)}{u}_{\gamma j,k}\right)\right.$$

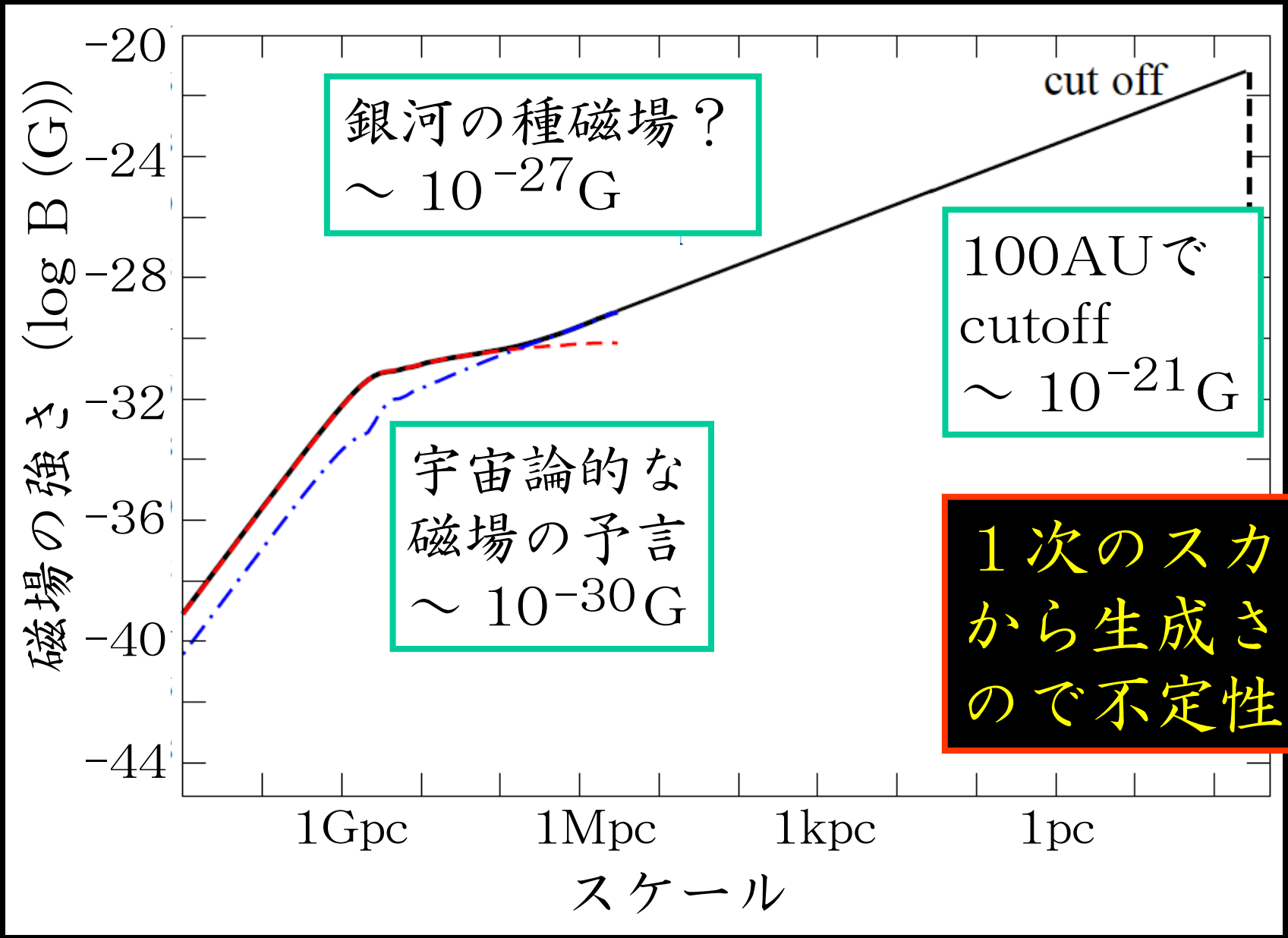
$$\left.+\frac{1}{8}\left(\overset{(1)}{u}_{el,k}\ \overset{(1)}{\Pi}{}^l_{\gamma j}+\overset{(1)}{u}_{el}\ \overset{(1)}{\Pi}{}^l_{\gamma j,k}\right)\right]$$

光子の非等方ストレス

磁場は３つのソース項の時間積分
どれも１次では出てこない

磁場のスペクトル

Ichiki, KT et al., 2007



重力波・磁場のエネルギーの比較

$$\Omega_{\rm GW}^{(1)} \sim 10^{-14} r, \quad \Omega_{\rm GW}^{(2)} \sim 10^{-20}$$

$$\Omega_B^{(2)} \sim 2.5 \times 10^{-54} \left(\frac{B}{10^{-30}{\rm G}} \right)^2$$

同じ２次でも重力波と磁場でだいぶ違う

amplitude

$$h^{(1)} \sim \sqrt{r}\delta, \quad h^{(2)} \sim \delta^2, \quad B^{(2)} \sim \frac{\sigma_{\rm T}\rho_\gamma}{e}\epsilon^2\delta^2$$

tight coupling parameter

$$\epsilon = \frac{k}{a n_e \sigma} \sim 10^{-2} \left(\frac{k}{(100{\rm Mpc})^{-1}} \right) \left(\frac{1+z}{10^3} \right)^{-2} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.04} \right)^{-1}$$

$$\rho_{\rm GW}^{(1)} : \rho_{\rm GW}^{(2)} : \rho_B^{(2)} \sim r\delta^2 T^4 : \delta^4 T^4 : \alpha \left(\frac{T}{m_e} \right)^4 \epsilon^4 \delta^4 T^4$$

$$\sim r : \delta^2 : \alpha \left(\frac{T}{m_e} \right)^4 \epsilon^4 \delta^2 \sim r : 10^{-9} : 10^{-43}$$

評価はほぼ正しい

基本的なアイデア①

２次の重力波や磁場スペクトルは
原始ゆらぎスペクトルに依存

$$P_{\rm GW}^{(2)},\ P_B^{(2)} \propto P_{\mathcal{R}}^2$$

→　・重力波・磁場を観測すれば原始ゆらぎを観測できる
・しかも２次のスペクトルは１次のスペクトルに敏感

基本的なアイデア②

CMBゆらぎ

・decouplingのときのsnap shot

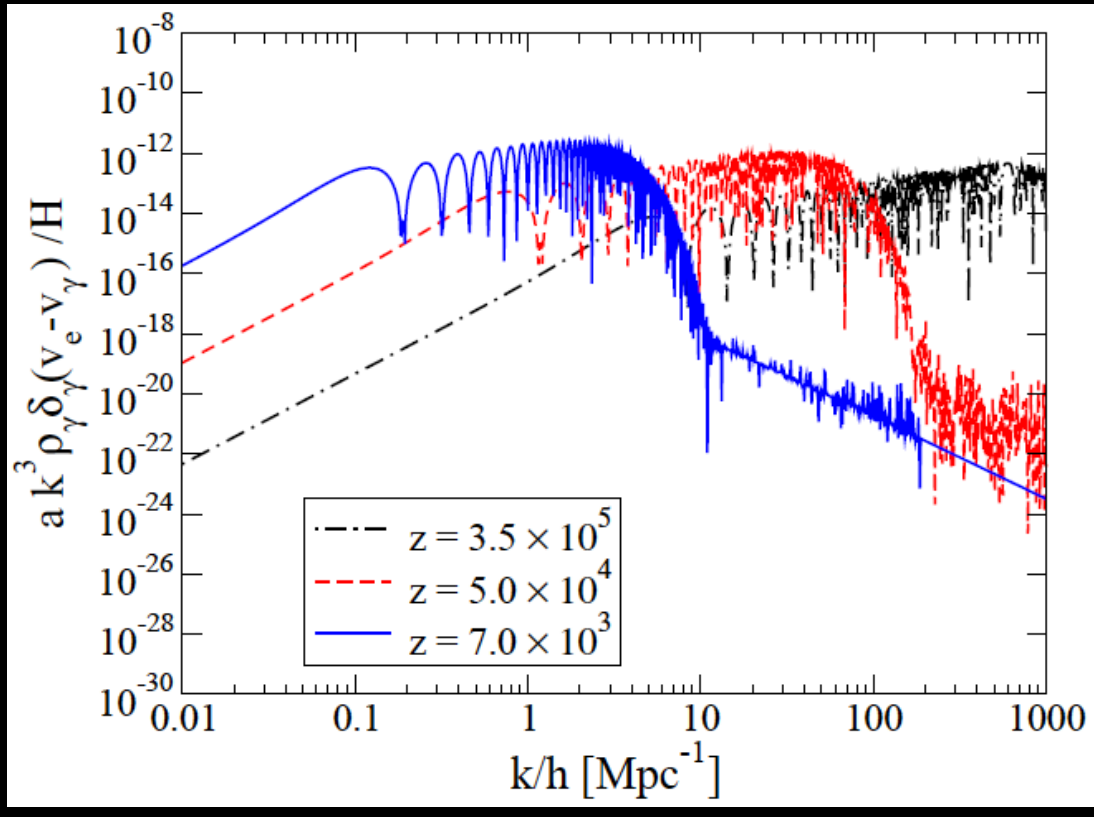
・小スケールではSilk dampingでかき消される

磁場・重力波

・snap shotの積分

・散逸はあまり効かず、小スケールまで磁場はそのまま残る

→　小スケール観測が可能



基本的なアイデア③

スカラーのスペクトルは大スケール以外は
（理論的にも）どうとでもなれる
一方１次テンソルのスペクトルは必ずred

$$P_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \propto \frac{V}{\epsilon} \propto k^{-6\epsilon+2\eta}$$

$$P_{\mathrm{GW}} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \propto V \propto k^{-2\epsilon}$$

なので１次テンソルよりも２次テンソルの方が
面白くなる可能性は高い

アイデアまとめ

・２次のスペクトルは１次のスペクトルに敏感
・小スケールの観測が可能
・スカラーのスペクトルは比較的自由

小スケールの１次スカラースペクトルに
強い制限を与えることができるかもしれない

観測方法

ではどうやって観測するか？

重力波

→ 直接（小スケール）B-mode（大スケール）

どちらもかなり難しい

磁場

Plagaの方法 (Plaga, 1994)

GRB、blazarなど高エネルギー天体からの

delayed photonで非常に弱い磁場を測る

→ $B = 10^{-15} \sim 10^{-20}$ G

→ 現在のところ最も強力な方法

(Ichiki, Inoue & KT, in progress)

Plagaの方法概念図

GRB, AGN

赤外線

CMB

$e^{\pm}$ 対生成

γ線 (TeV)

γ線 (MeV)

IC

γ線 (GeV)

磁場

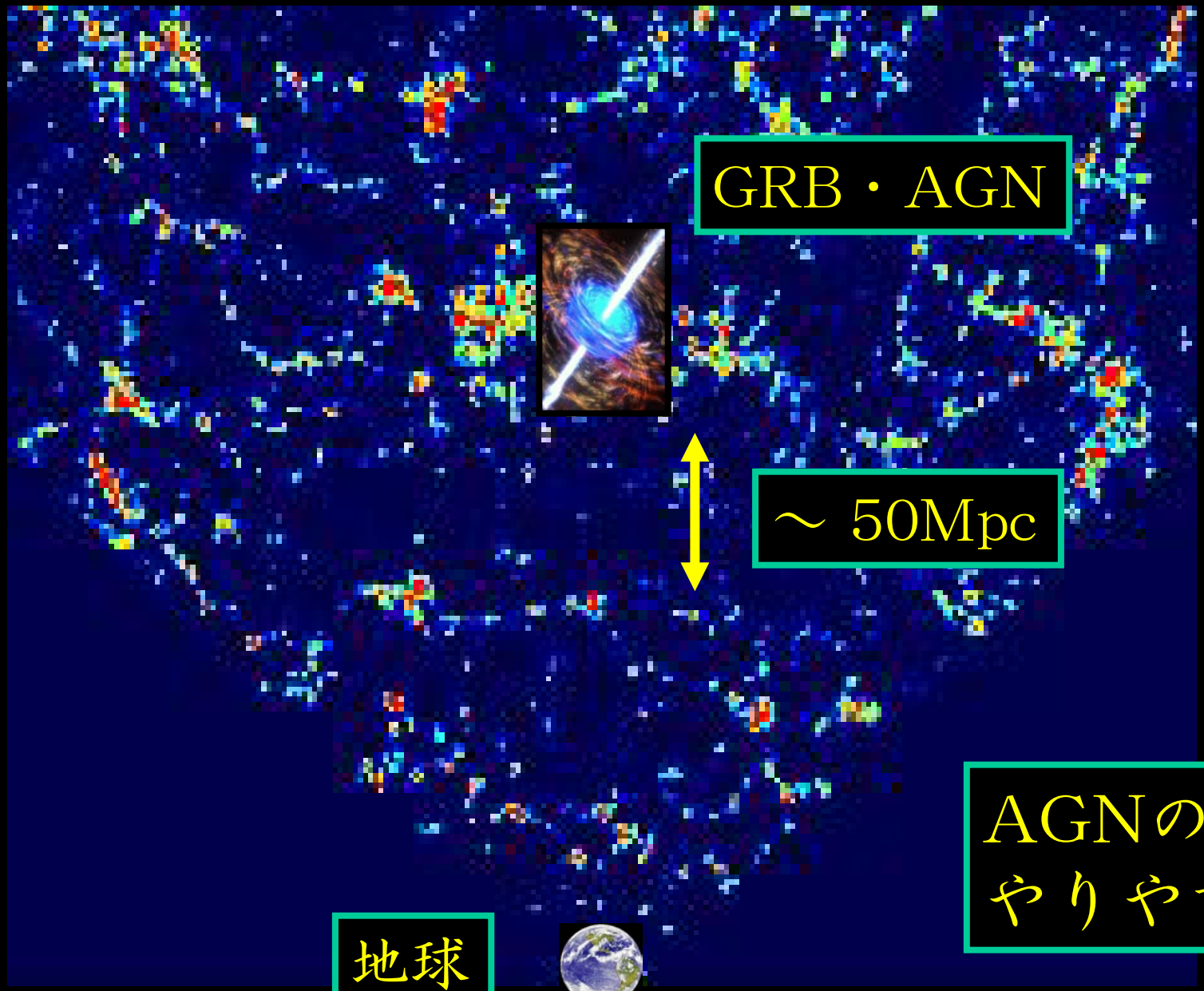
time delay

↓

磁場に依存

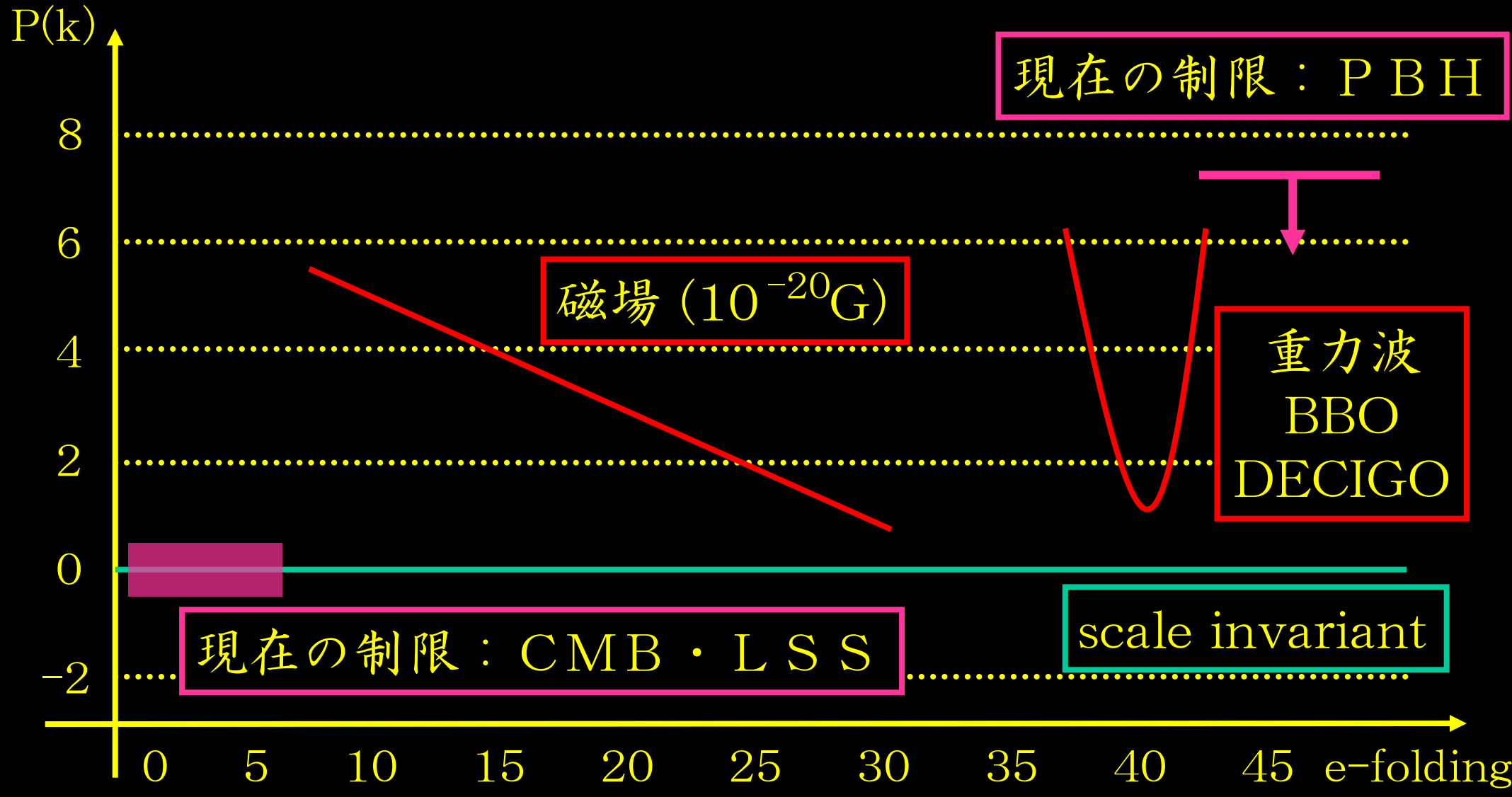
地球

ターゲット

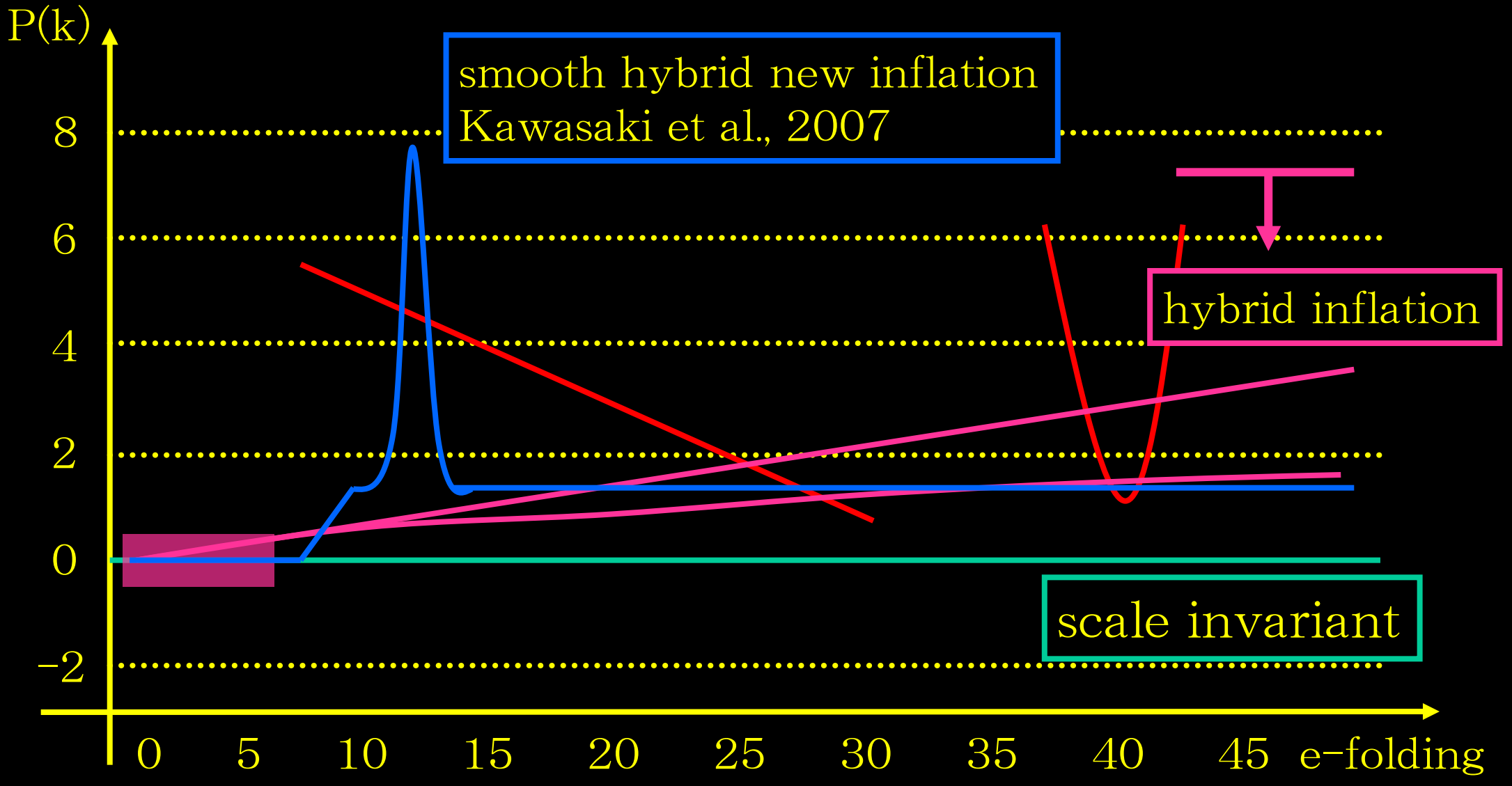


AGNの方が
やりやすい？

１次スカラースペクトルへの制限



制限できそうなインフレーションモデル



２次による初期宇宙探索まとめ

・２次スペクトルは１次スペクトルに
　強く依存
・磁場と重力波はかなり小さなスケールの
　観測が原理的には可能
・Plagaの方法による磁場観測 ～ 数年？
・重力波の直接観測 ～ 数十年？数百年？

こんな小スケールの情報は
　他では得られないので
やる価値はある（と思う）

結論

１、宇宙論的摂動２次の効果

・重力波の生成

・磁場の生成（＋αが必要）

２、２次摂動によって小スケールのゆらぎを探りたい

・スケール不変ではきつい

・他では得られない情報

END