宇宙の電磁的性質

高橋慶太郎
京都大学基礎物理学研究所
２００７年７月２４日＠関西合同ゼミ

共同研究者

宇宙の電磁気的性質

- 市來浄輿（RESCEU)
- 杉山直（名古屋大)

- 白水徹也（東工大)
- 小林努（早稲田大)
- R. Maartens (Portsmouth)

磁場の観測

- 市來浄輿（RESCEU)
- 井上進（国立天文台）
- 長滝重博（京大基研)
- 村瀬孔大（京大基研)

概要

１、宇宙論的摂動の２次の効果による磁場の生成

２、磁場だけでなくその他の電磁気的性質を求める

３、高エネルギー天体による弱い磁場の測定

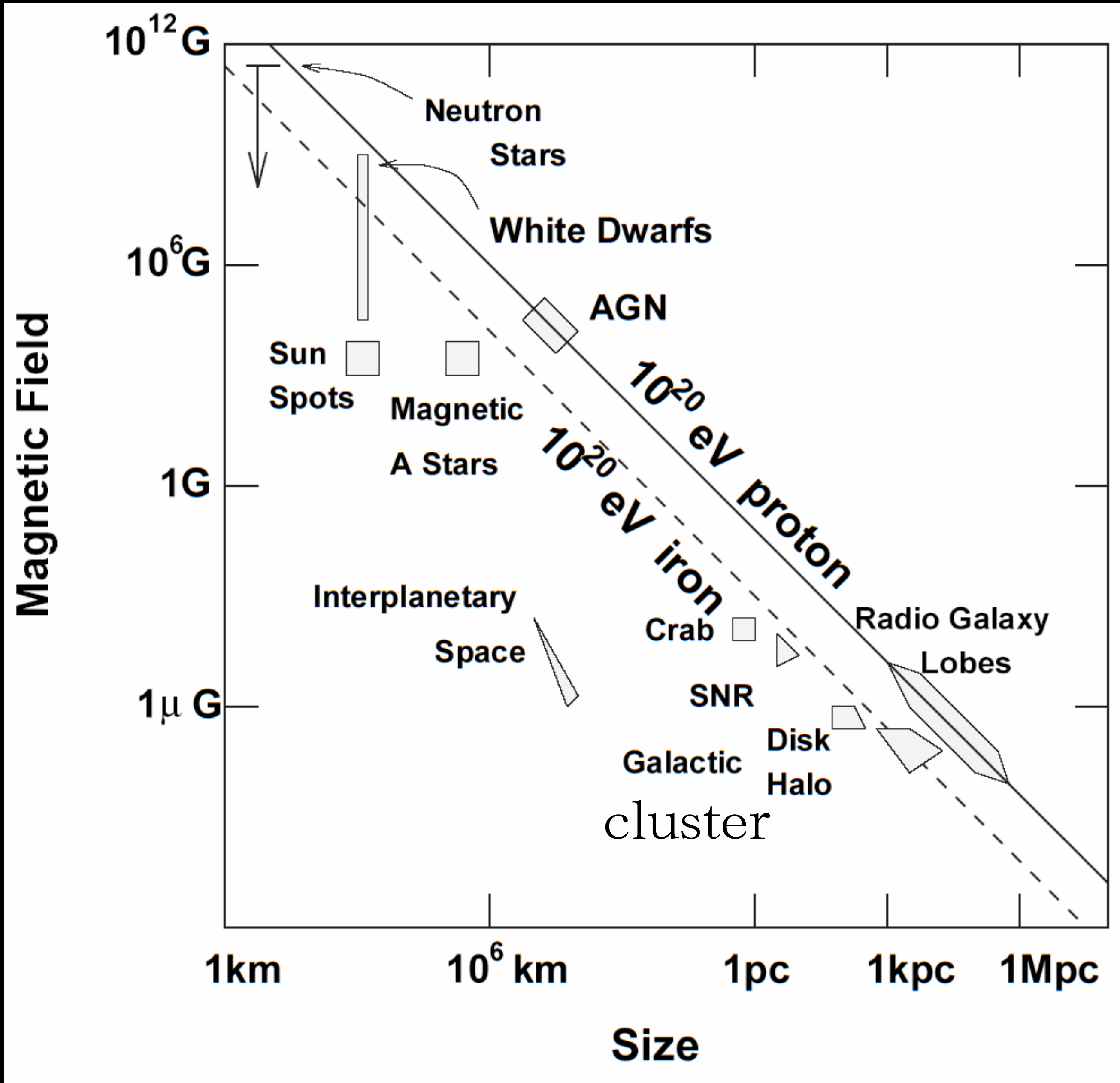
４、２次摂動によって小スケールのゆらぎを探りたい

目次

1、宇宙磁場
2、２次摂動
3、強結合近似
4、Maxwell + Ohmを解く
5、トムソン項を解く
6、宇宙磁場の観測と・・・
7、まとめ

1、 宇宙磁場

ユビキタス磁場



磁場は至る所にある

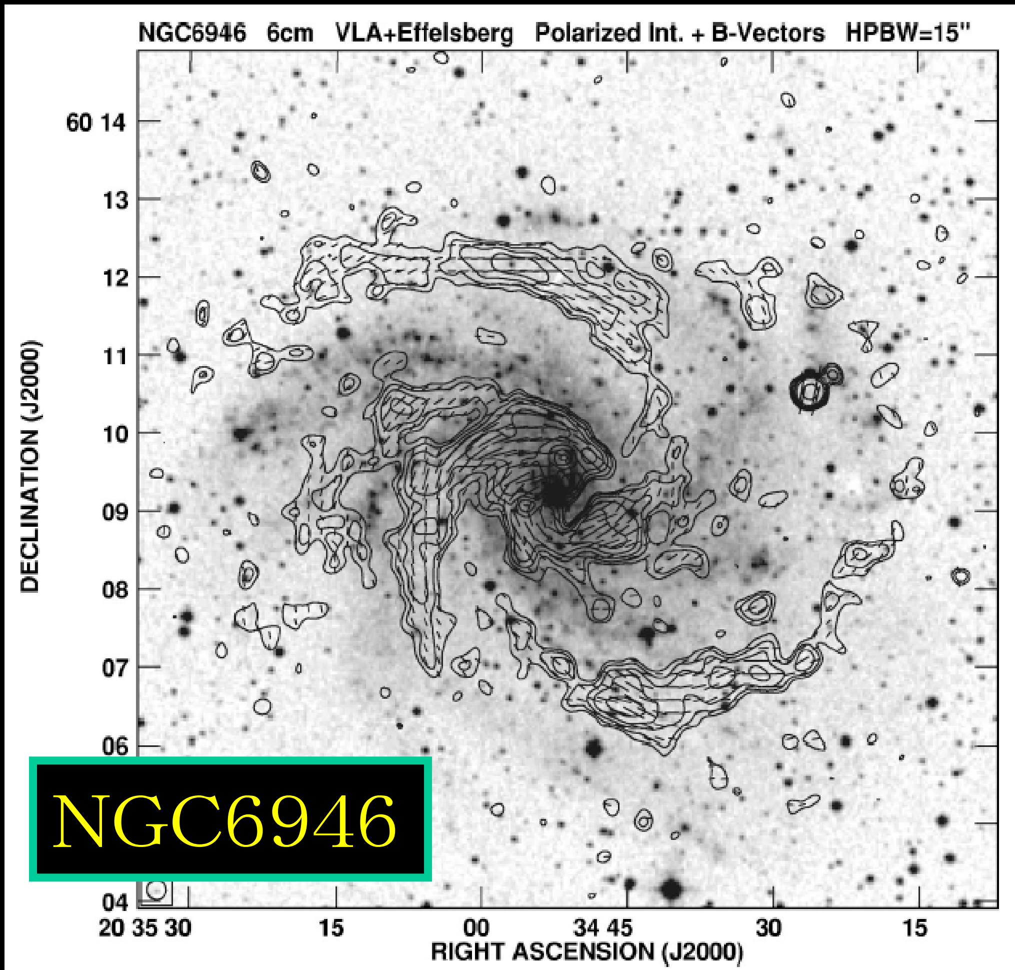
- 地球
- 太陽
- 銀河
- 銀河団
- ・
- ・
- ・

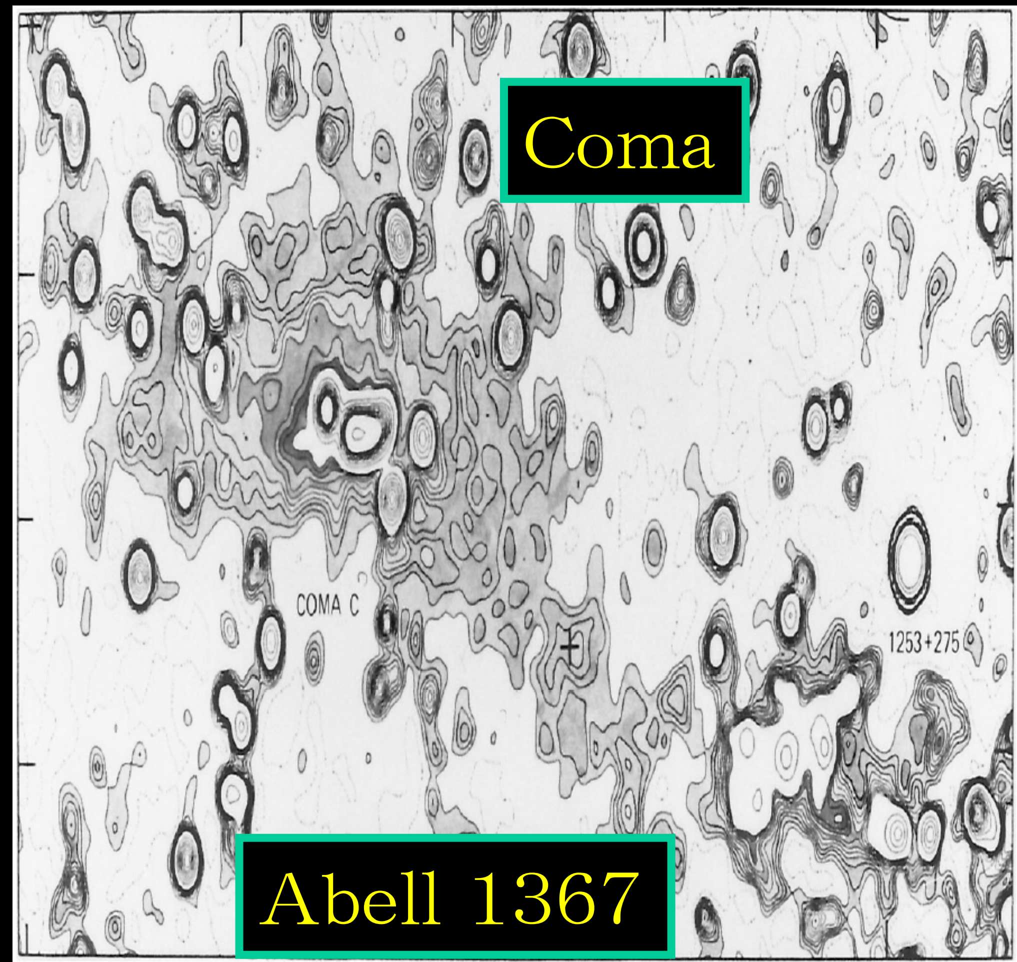
磁場の起源？

宇宙論的磁場？

宇宙進化への影響？

観測例





渦巻銀河 〜 10μG
Beck & Hoernes, 1996

銀河団 〜 1μG
Kim et al., 1989

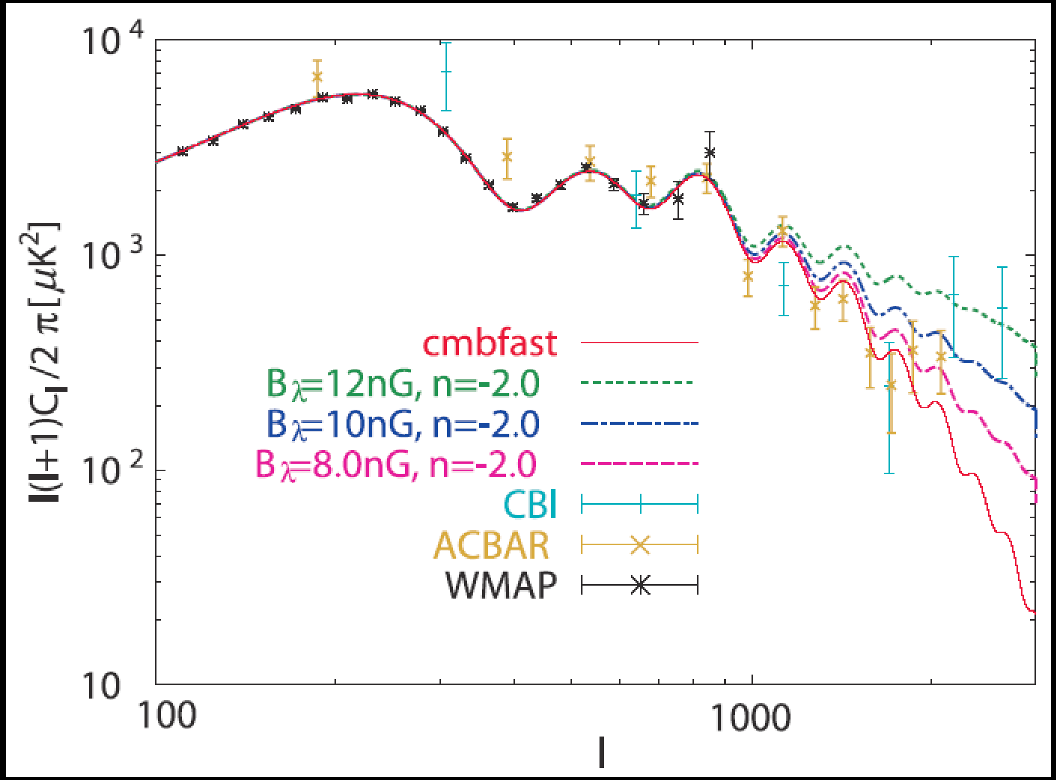
宇宙論的磁場への制限

ビッグバン元素合成
- 宇宙膨張則
- 弱い相互作用の反応率
- 電子の相空間の構造

$B < 10^9 G$ @T = 10keV
$B < 1 \mu G$ @現在
(Cheng et al., 1996)

CMBゆらぎ
- 小スケールの温度と偏光ゆらぎができる

B < 20nG @ 1Mpc
(Yamazaki et al., 2004)



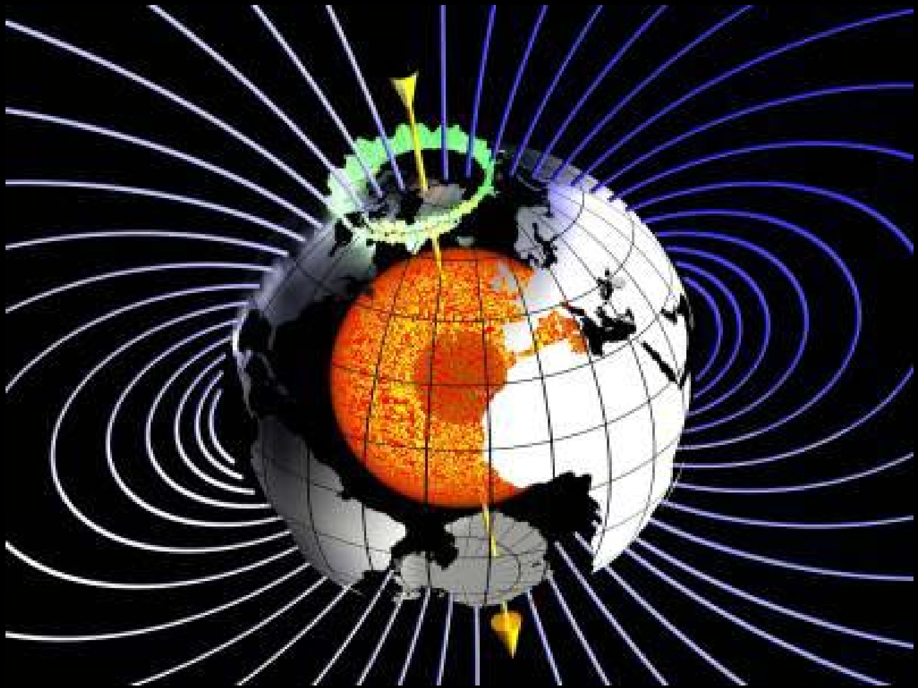
磁場観測の現状

	強さ	スケール	観測方法
銀河	$O(10)\,\mu G$	～ 銀河	synchrotron
銀河団	$O(1)\,\mu G$	～ 銀河	Faraday
遠方銀河	$O(1)\,\mu G$	＞ 1kpc	Faraday
宇宙論的	＜ $0.01\,\mu G$	Mpc～	BBN, CMB

銀河・銀河団磁場の起源は？
宇宙論的磁場は存在するか？

ダイナモ

磁場の増幅・維持機構
- 電磁流体力学的不安定性
- 乱流



宇宙の様々な所で働いている
- 地球：外核の運動
- 太陽
- 降着円盤：MRI
- 銀河？銀河団？

$\alpha-\omega$ dynamo、kinematic dynamo、MRI・・・

ダイナモの特徴

１、種磁場が必要
→　ゼロから磁場を作ることはできない

２、種磁場を指数関数的に増幅
増幅時間 ～ 回転周期

３、磁場のback reactionが効き始めると終了
→　磁場とガスでエネルギー等分配

必要な種磁場

どのくらいの強さの種磁場が必要か？

①銀河形成以前に磁場が存在する

②銀河形成のときガスが圧縮される

$\delta \sim 10^6 \rightarrow$ 磁場は４桁増幅

③その後ダイナモで増幅（z=10 → 0.5）

log e^(８０億年／２億年)～ １７

→ 宇宙年齢で１７桁増幅される

銀河磁場が10μGだとすると必要な種磁場は

$\mathrm{Bseed} \sim 10^{-26}\,\mathrm{G} \rightarrow 10^{-29} \sim 10^{-23}\,\mathrm{G}$

磁場の進化シナリオ

z = 0　銀河　O(10) μG

銀河団　O(1) μG

z ～ 1　遠方銀河にも磁場？

銀河ダイナモ（銀河団ダイナモ？）

z = 5～10　種磁場生成(astrophysical)

first star、原始銀河、再イオン化

z ～ 1000　種磁場生成(2nd order)

z >> 1000　種磁場生成(cosmological)

inflation、相転移

これまでの研究

astrophysical origin

・Biermann機構（非熱的過程での磁場生成）
原始銀河、再イオン化・・・

・Weibel不安定性

→　現象そのものがよくわかっていない

cosmological origin

・相転移

・インフレーション

→　物理がよくわかっていない

確かのことはなかなか言えない

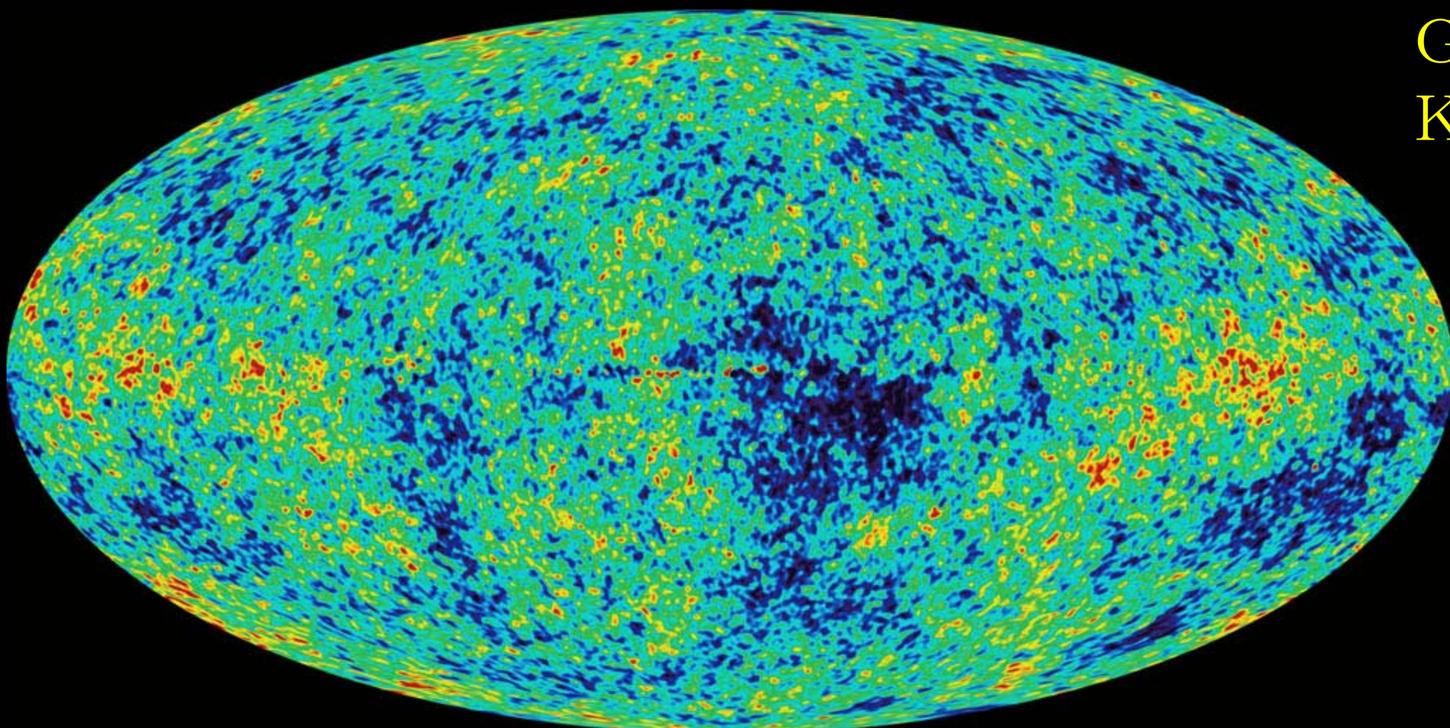
2nd order

輻射優勢期 ～ 再結合時の宇宙論的摂動

first orderでは磁場は生まれない

second orderで生まれる？

Hogan, 00
Berezhiani & Dolgov 04
Matarrese et al. 04
Gopal & Sethi, 04
KT et al. 05, 06, 07



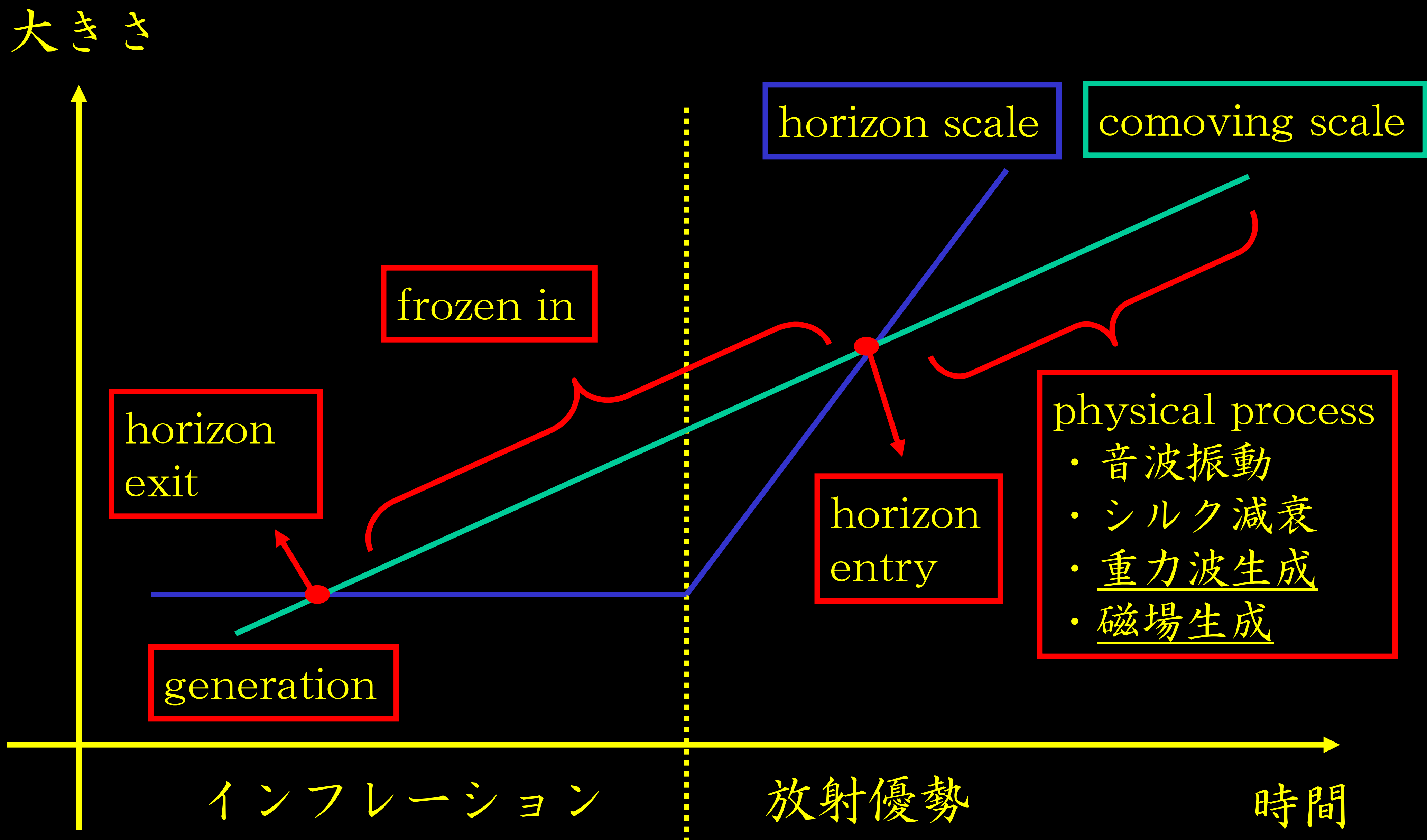
物理はよくわかっており、観測的にもよく理解されている

宇宙磁場のまとめ

宇宙における磁場
　小～大、様々なスケールに存在
起源（銀河）
　ダイナモで増幅
　種磁場必要（10^{-29}～10^{-23}G）
磁場生成
　astrophysical
　cosmological
　2nd order　→　曖昧さほとんどなし

２、２次摂動

ゆらぎの時系列


大きさ
horizon scale
comoving scale
frozen in
horizon exit
horizon entry
physical process
・音波振動
・シルク減衰
・重力波生成
・磁場生成
generation
インフレーション
放射優勢
時間

mode mixing

２次スカラーの方程式

$$\Box\Phi^{(2)} = (\cdots)$$

$$V^{(1)i}V_i^{(1)}, \quad h_{ij}^{(1)}\partial^i\partial^j\Phi^{(1)}, \quad h_{ij}^{(1)}\partial^i V^{(1)j}$$

２次のスカラーは１次のベクトル・テンソルから作ることができる　→　mode mixing!!

逆に、２次のベクトル・テンソルのソース項には１次のスカラー（の積）が存在する

- vector $\cdots \partial^j(\partial_i\Phi^{(1)}\partial_j\Psi^{(1)} - \partial_j\Phi^{(1)}\partial_i\Psi^{(1)})$
- tensor $\cdots (\delta_i^k\nabla^2 - \partial_i\partial^k)(\partial_j\Phi^{(1)}\partial_k\Psi^{(1)} - \partial_k\Phi^{(1)}\partial_j\Psi^{(1)})$

ただし純粋に２次の量同士は混合しない

方程式の構造（雰囲気）I

計量の展開

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu} + g^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots$$

アインシュタインテンソルの展開

テイラー展開

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) &= G_{\mu\nu}(g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) \\
&= G_{\mu\nu}(g^{(0)}_{\mu\nu}) + \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}}(g^{(0)}_{\mu\nu})\delta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_{\mu\nu}}{\partial g^2_{\alpha\beta}}(g^{(0)}_{\mu\nu})(\delta g_{\alpha\beta})^2 + \cdots \\
&\equiv G^{(0)}_{\mu\nu} + G^{(1)}_{\mu\nu} + G^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots
\end{aligned}$$

アインシュタイン方程式（真空）

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(g^{(1)}_{\mu\nu}) = 0$$

$$G^{(2)}_{\mu\nu} = G^{(2)}_{\mu\nu}(g^{(2)}_{\mu\nu}) + G^{(2)}_{\mu\nu}((g^{(1)}_{\mu\nu})^2) = 0$$

方程式の構造（雰囲気）Ⅱ

各オーダーのアインシュタイン方程式

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(g^{(1)}_{\mu\nu}) = 0$$

$$G^{(2)}_{\mu\nu}(g^{(2)}_{\mu\nu}) = -G^{(2)}_{\mu\nu}((g^{(1)}_{\mu\nu})^2) \equiv \kappa^2 T^{\mathrm{grav}}_{\mu\nu}((g^{(1)}_{\mu\nu})^2)$$

テイラー展開１次
→　同じ構造

テイラー展開２次
→　ソース項

例：テンソル

$$\Box h^{(1)}_{ij} = 0$$

$$\Box h^{(2)}_{ij} = f\left[\left(\Phi^{(1)}\right)^2, \Phi^{(1)} h^{(1)}_{ij}, \left(h^{(1)}_{ij}\right)^2\right]$$

・純２次は分離
・２つの１次の量の積が２次の源になる

簡単な応用：重力波

２次摂動による重力波生成

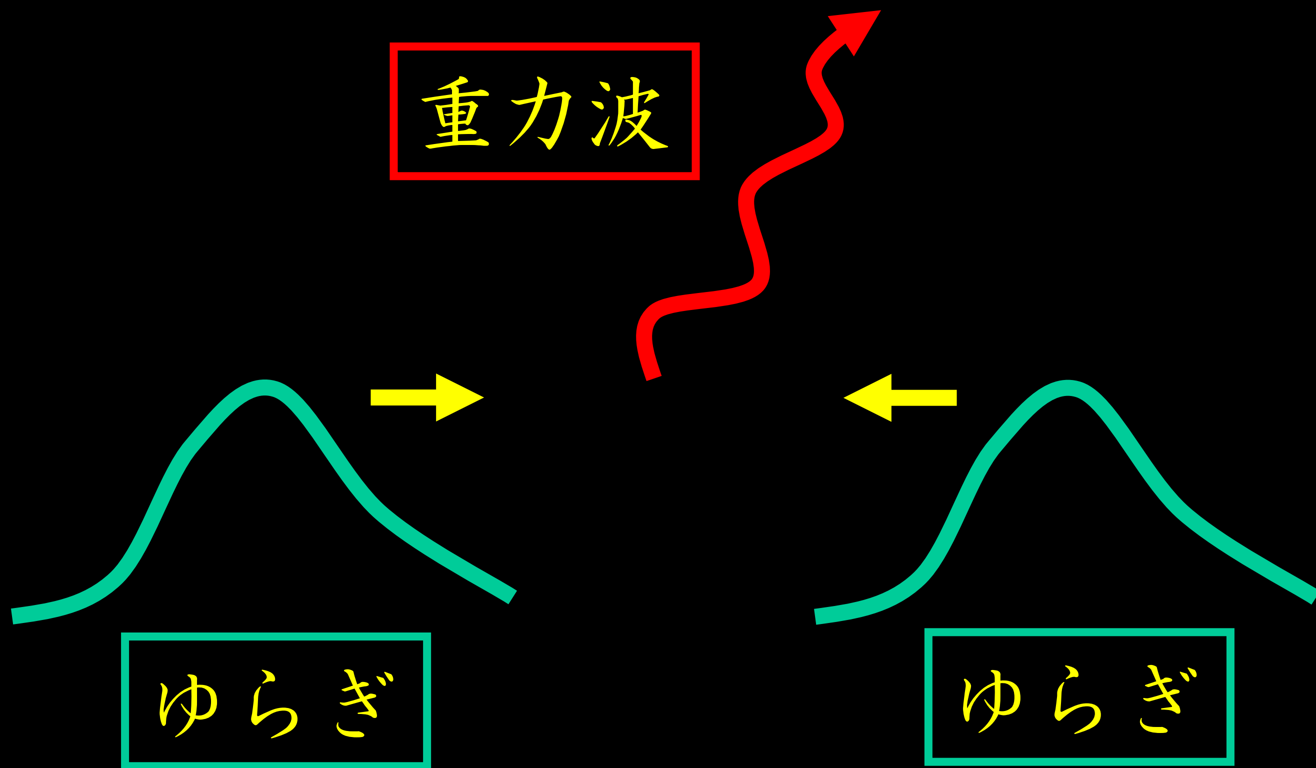
・インフレーション後にsubhorizonで古典的に生成

・１次のスカラーゆらぎから生成

・２次の非等方ストレスは無視

Baumann, Ichiki, Steinhardt & KT, 07

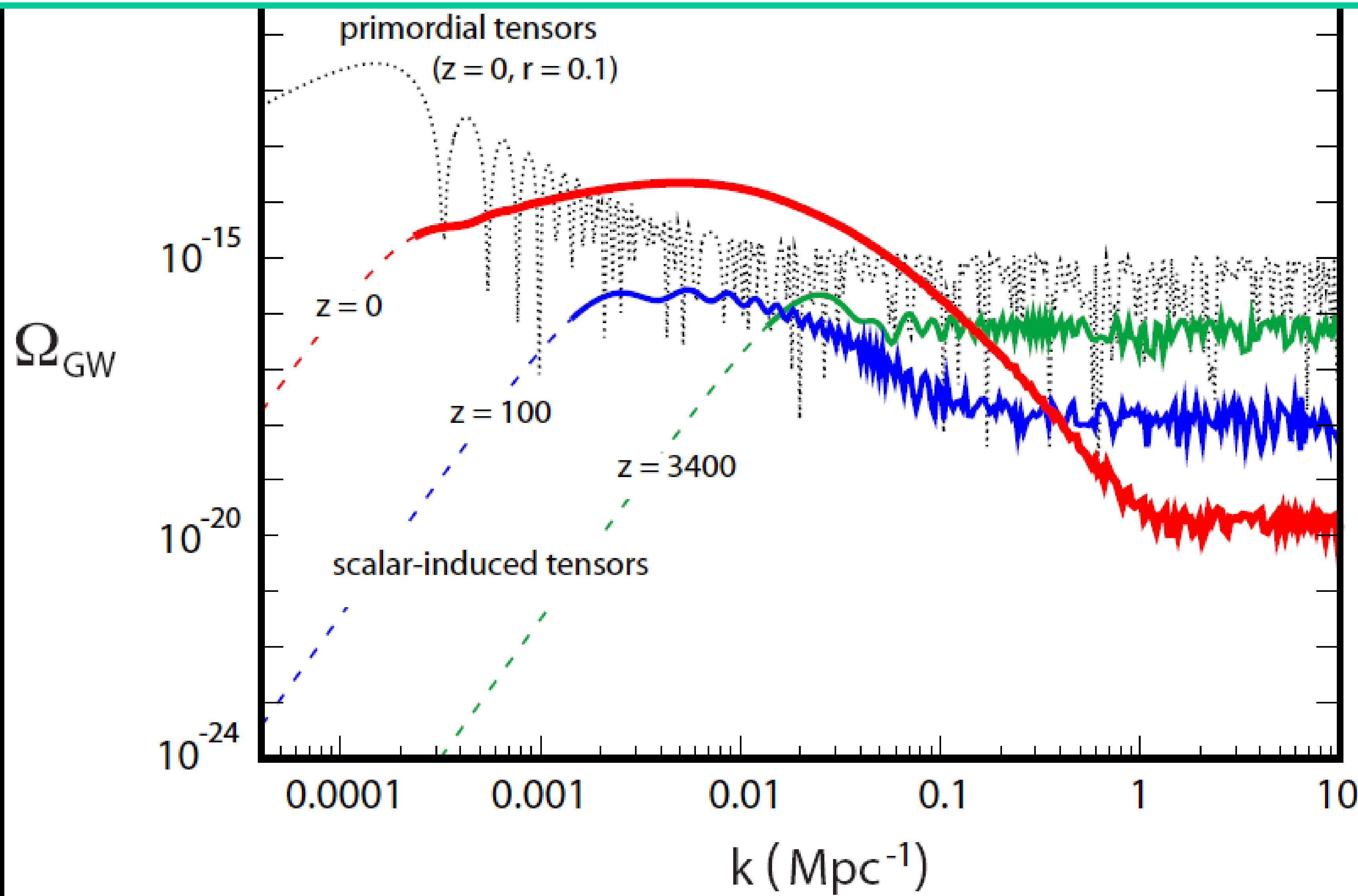
ゆらぎによる重力波生成のイメージ



４重極公式的な理解で（たぶん）ＯＫ。

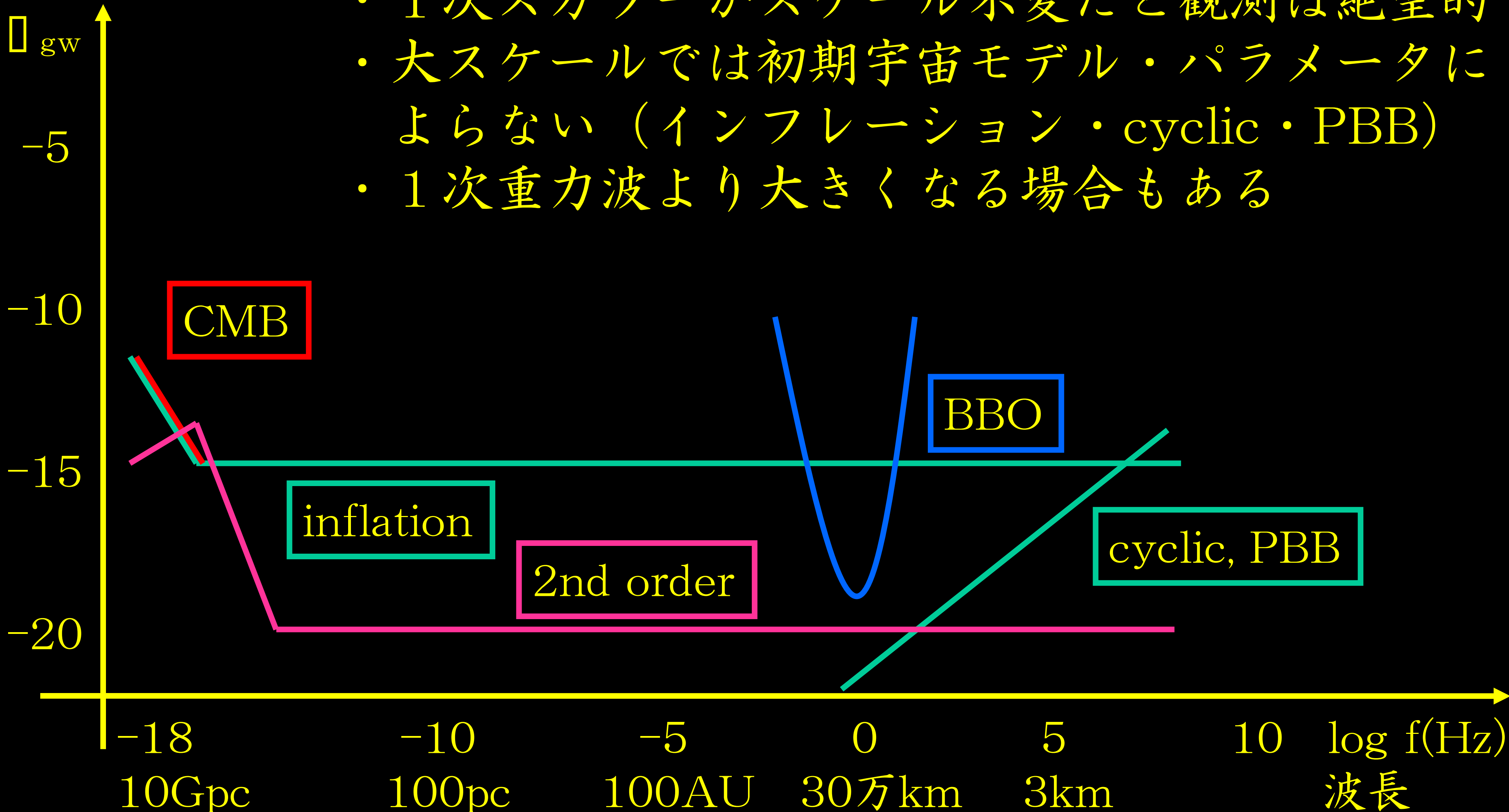
重力波の計算

$$\Box h_{ij}^{(2)} = T_{ij}^{\mathrm{grav}}(\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)}) + T_{ij}^{\mathrm{matter}}(\rho^{(1)}, P^{(1)}, v_i^{(1)}, \Pi_{ij}^{(1)})$$



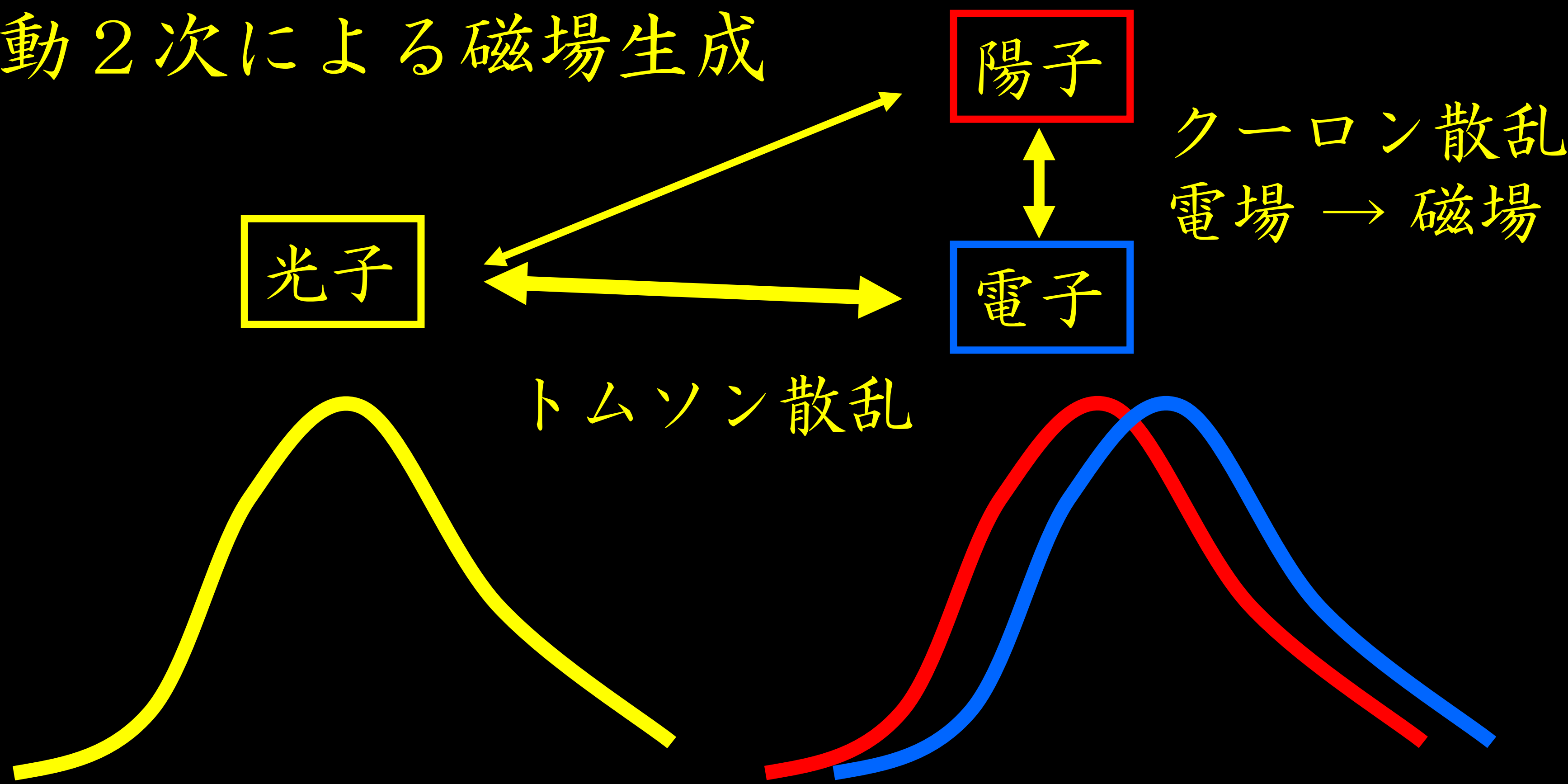
２次の重力波スペクトル

・１次スカラーがスケール不変だと観測は絶望的
・大スケールでは初期宇宙モデル・パラメータによらない（インフレーション・cyclic・PBB）
・１次重力波より大きくなる場合もある



磁場生成

摂動２次による磁場生成



トムソン散乱は主に電子を押す
→ 電場・電流生成（回転成分：２次)
→ 磁場生成 (KT et al., 05, 06, 07)

磁場の発展方程式

電子・陽子の運動方程式＋アンペールの法則
→ 磁場の発展方程式

$$
\begin{aligned}
\dot{B}^i &\sim -2\epsilon^{ijk} C_{j,k} \\
&\sim \frac{8\sigma_T \overset{(0)}{\rho}_{\gamma}}{3e}\epsilon^{ijk}\left[\frac{\overset{(1)}{\rho}_{\gamma,k}}{\overset{(0)}{\rho}_{\gamma}}\left(\overset{(1)}{u}_{ej}-\overset{(1)}{u}_{\gamma j}\right)+\left(\overset{(2)}{u}_{ej,k}-\overset{(2)}{u}_{\gamma j,k}\right)\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{8}\left(\overset{(1)}{u}_{el,k}\,\overset{(1)}{\Pi}{}^{l}_{\gamma j}+\overset{(1)}{u}_{el}\,\overset{(1)}{\Pi}{}^{l}_{\gamma j,k}\right)\right]
\end{aligned}
$$

スリップ項

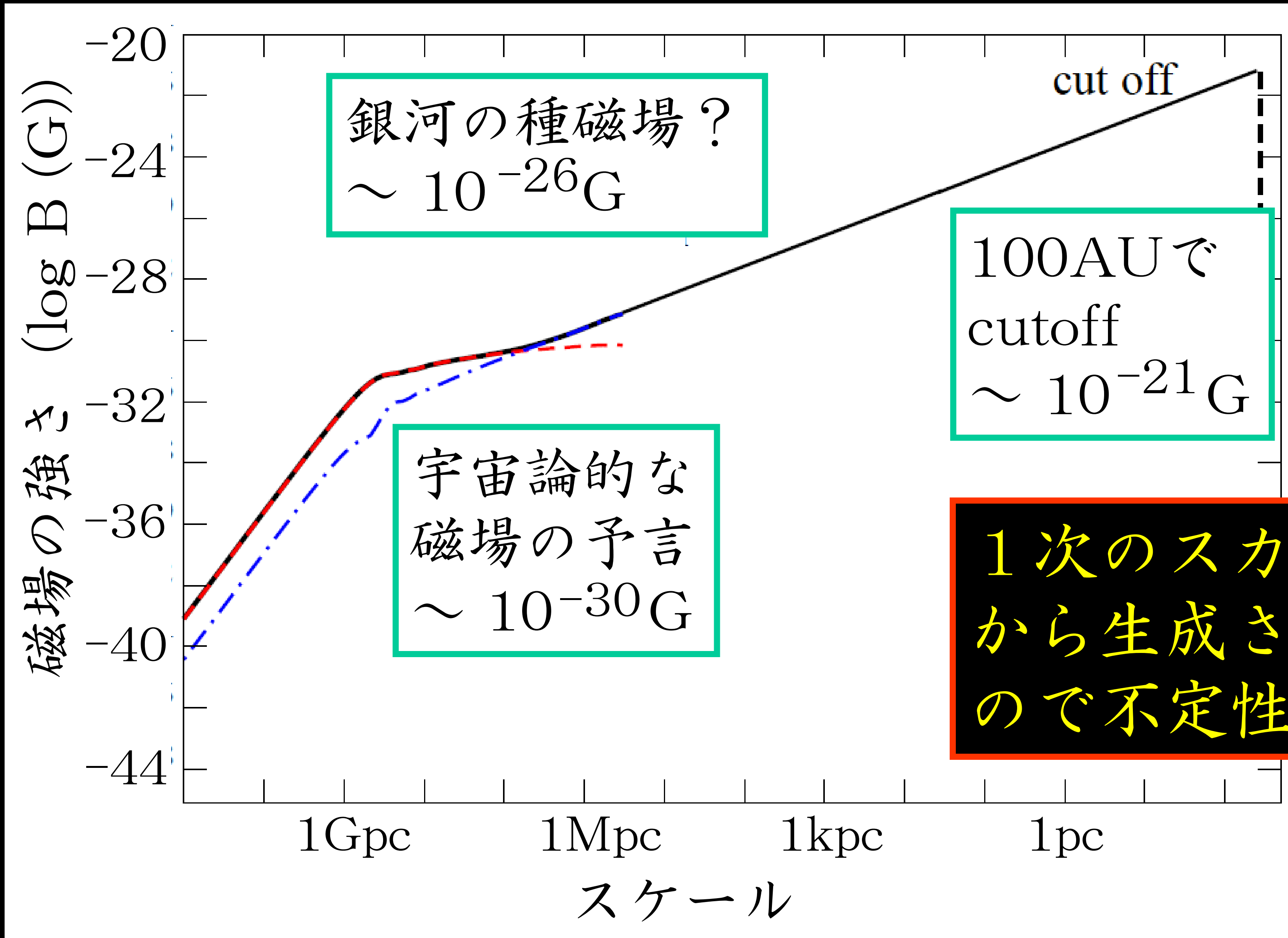
vorticityの差

光子の非等方ストレス

磁場は３つのソース項の時間積分
どれも１次では出てこない

磁場のスペクトル

Ichiki, KT et al., 2007



１次のスカラーから生成されるので不定性なし

重力波・磁場のエネルギーの比較

$$\Omega_{\mathrm{GW}} \sim 10^{-20}$$

$$\Omega_B \sim 3 \times 10^{-54} \left(\frac{B}{10^{-30}\ \mathrm{G}} \right)^2$$

同じ２次でも重力波と磁場でだいぶ違う

振れ幅

$$h^{(2)} \sim \delta^2, \quad B^{(2)} \sim \frac{\sigma_T \rho_\gamma}{e} \epsilon^2 \delta^2$$

強結合パラメータ

$$\epsilon = H\tau_{\mathrm{T}} \sim 2 \times 10^{-3} \left(\frac{1+z}{10^3} \right)^{-2}$$

磁場はだいぶsuppress

$$\rho_{\mathrm{GW}}^{(2)} : \rho_B^{(2)} \sim \delta^4 T^4 : \alpha^2 \left(\frac{T}{m_e} \right)^4 \epsilon^4 \delta^4 T^4 \sim 1 : \alpha^2 \left(\frac{T}{m_e} \right)^4 \epsilon^4 \sim 1 : 10^{-39}$$

今日のお話

●磁場は単に摂動２次というだけではできない

・電場、電流

光子とバリオンがずれていないと

電子は押されない

・vorticity

１流体だとvorticityは保存

→　要素間のずれが重要

●磁場以外は？

・磁場があれば電流が存在する？

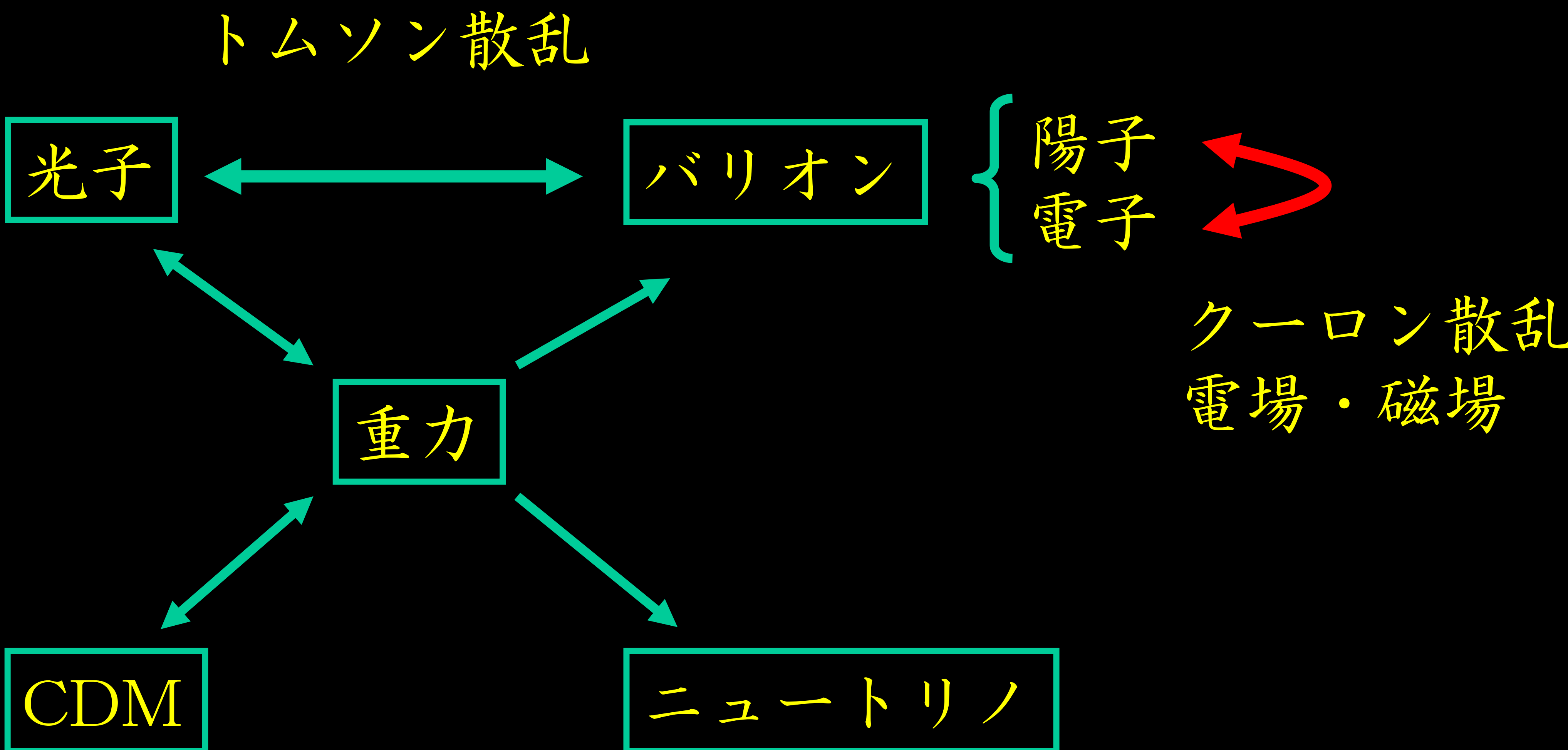
・電場、電荷密度はどう振る舞う？

宇宙論的摂動、強結合近似で（非相対論的に）

流体方程式とMaxwell方程式を全部解く

３、强結合近似

宇宙プラズマの成分



２成分系のダイナミクス

運動方程式（１：軽い、２：重い）

$$\partial_t \vec{v}_1 \approx -\frac{1}{\tau_{12}}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) + \cdots$$

$$\partial_t \vec{v}_2 \approx -\frac{1}{\tau_{21}}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) + \cdots$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{\sigma n_2 v_1^{\mathrm{th}}}, \qquad \tau_{21} \approx \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1}\tau_{12}$$

相対運動と重心運動に分離

$$\partial_t\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = -\left(\frac{1}{\tau_{12}} + \frac{1}{\tau_{21}}\right)\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) \approx -\frac{1}{\tau_{12}}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)$$

$$\partial_t\left(\tau_{12}\vec{v}_1 + \tau_{21}\vec{v}_2\right) = 0$$

強結合近似

速度差を求めたい

$$\partial_t \delta\vec{v}_{12} = -\frac{1}{\tau}\delta\vec{v}_{12} + \vec{A}$$

散乱の時間スケールがダイナミクスのスケール

よりずっと短いとき $H\tau \ll 1$

$$\delta\vec{v}_{12} = \delta\vec{v}_{12}^{(I)} + \delta\vec{v}_{12}^{(II)} + \cdots \qquad \vec{A} = \vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(I)} + \cdots$$

と展開して

$$0 = -\frac{1}{\tau}\delta\vec{v}_{12}^{(I)} + \vec{A}^{(0)}$$

$$\partial_t \delta\vec{v}_{12}^{(I)} = -\frac{1}{\tau}\delta\vec{v}_{12}^{(II)} + \vec{A}^{(I)}$$

$$\left|\vec{v}_{12}^{(I)}\right| \sim H\tau$$

$$\left|\vec{v}_{12}^{(II)}\right| \sim (H\tau)^2$$

３流体系

クーロン散乱の
強結合近似

トムソン散乱の
強結合近似

陽子

電子

光子

電流

バリオン

光子 - バリオン速度差

全重心

それぞれについて運動方程式が立てられる
どれを独立と思うかは自由

予想

いろいろな時間スケール

$$\tau_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\omega_p^2 \eta} = 4 \times 10^{-3}\ \sec \left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\tau_{\mathrm{T}} = \frac{m_p}{\sigma_T \rho_\gamma} = 10^3\ \sec \left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-4}$$

$$H^{-1} = 4.5 \times 10^9\ \sec \left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-2}$$

3keV以下では
トムソンの方が短い

するとナイーブには

$$|\delta \vec{v}_{pe}| \sim \frac{\rho}{e n_b} \sim H \tau_{\mathrm{C}} \quad ??$$

$$|\delta \vec{v}_{\gamma b}| \sim \frac{n_b - C \rho_\gamma^{3/4}}{n_b} \sim H \tau_{\mathrm{T}}$$

実は陽子・電子は
電場でも結合するので
そう単純ではない

今回の方針

ここでは

・トムソン強結合近似の２次まで
・クーロン強結合近似の１次まで
・宇宙論的摂動の２次まで

を解く(Kobayashi, Maartens, Shiromizu & KT, 07)。

ナイーブにはinconsistentだが、
解いてみると結果的にはconsistent。

	宇宙論的１次	２次
強結合１次	音波振動	
２次	シルク減衰	磁場生成

運動方程式

光子・陽子・電子の運動方程式

$$\frac{4}{3}\rho_\gamma \left[\partial_t \vec{v}_\gamma + H\vec{v}_\gamma + \left(\vec{v}_\gamma \cdot \frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_\gamma\right]$$

トムソン散乱

$$= -\frac{1}{3a}\nabla\rho_\gamma \boxed{-\frac{m_e^2}{m_p^2}\sigma_T n_p \rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v}_p)} \boxed{-\sigma_T n_e \rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v}_e)} - \frac{4\rho_\gamma}{3a}\nabla\Phi$$

$$m_p n_p \left[\partial_t \vec{v}_p + H\vec{v}_p + \left(\vec{v}_p \cdot \frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_p\right]$$

$$= en_p(\vec{E} + \vec{v}_p \times \vec{B}) \boxed{-e^2 n_p n_e \eta(\vec{v}_p - \vec{v}_e)} \boxed{+\frac{m_e^2}{m_p^2}\sigma_T n_p \rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v}_p)} - \frac{m_p n_p}{a}\nabla\Phi$$

$$m_e n_e \left[\partial_t \vec{v}_e + H\vec{v}_e + \left(\vec{v}_e \cdot \frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_e\right]$$

クーロン散乱　　トムソン散乱

$$= -en_e(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) \boxed{+e^2 n_p n_e \eta(\vec{v}_p - \vec{v}_e)} \boxed{+\sigma_T n_e \rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v}_e)} - \frac{m_e n_e}{a}\nabla\Phi$$

変数変換

重心・相対量を定義

陽子・電子

$$n_b \equiv \frac{m_p n_p + m_e n_e}{m_p + m_e}, \qquad \delta n_{pe} \equiv n_p - n_e,$$

$$\vec{v}_b \equiv \frac{m_p n_p \vec{v}_p + m_e n_e \vec{v}_e}{m_p n_p + m_e n_e}, \qquad \delta \vec{v}_{pe} \equiv \vec{v}_p - \vec{v}_e,$$

光子・バリオン

$$\vec{v} \equiv \frac{(4\rho_\gamma/3)\vec{v}_\gamma + (m_p + m_e) n_b \vec{v}_b}{(4\rho_\gamma/3) + (m_p + m_e) n_b}, \qquad \delta \vec{v}_{\gamma b} \equiv \vec{v}_\gamma - \vec{v}_b,$$

宇宙論的摂動

宇宙論的摂動の２次まで考える

$$\rho_\gamma(t,\vec{x}) = \rho_\gamma^{(0)}(t) + \rho_\gamma^{(1)}(t,\vec{x}) + \rho_\gamma^{(2)}(t,\vec{x}) + \cdots\,,$$
$$n_b(t,\vec{x}) = n_b^{(0)}(t) + n_b^{(1)}(t,\vec{x}) + n_b^{(2)}(t,\vec{x}) + \cdots\,,$$
$$\vec{V}(t,\vec{x}) = \vec{V}^{(1)}(t,\vec{x}) + \vec{V}^{(2)}(t,\vec{x}) + \cdots\,, \quad \nabla\times\vec{V}^{(1)} = 0$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}^{(2)}(t,\vec{x}) + \cdots\,,$$

→　運動方程式からローレンツ項、
ホール項などが消える

運動方程式の書き直し

pe速度差、光子速度、γb速度差の方程式

$$\frac{m_e}{e(1+\beta)}\left[\partial_t\delta\vec{v}_{pe}+H\delta\vec{v}_{pe}+\left(\vec{v}_b\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{pe}+\left(\delta\vec{v}_{pe}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_b\right]$$

$$=\vec{E}-\left[en_b\eta+\frac{1+\beta^4}{(1+\beta)^2}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{e}\right]\delta\vec{v}_{pe}-\frac{1-\beta^3}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{e}\delta\vec{v}_{\gamma b}$$

$$\partial_t\vec{v}_\gamma+H\vec{v}_\gamma+\left(\vec{v}_\gamma\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_\gamma$$

$$=-\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma}-\frac{3}{4}\sigma_T n_b\left[(1+\beta^2)\delta\vec{v}_{\gamma b}+\frac{1-\beta^3}{1+\beta}\delta\vec{v}_{pe}\right]-\frac{1}{a}\nabla\Phi$$

$$\partial_t\delta\vec{v}_{\gamma b}+H\delta\vec{v}_{\gamma b}+\left(\vec{v}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b}+\left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}-\frac{1-R}{1+R}\left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b}$$

$$=-\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma}-\frac{1+R}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\left[(1+\beta^2)\delta\vec{v}_{\gamma b}+\frac{1-\beta^3}{1+\beta}\delta\vec{v}_{pe}\right]$$

普通は

普通は光子・バリオンの２流体で考える

$$
\cancel{\frac{m_e}{e(1+\beta)}\left[\partial_t\delta\vec{v}_{pe} + H\delta\vec{v}_{pe} + \left(\vec{v}_b\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{pe} + \left(\delta\vec{v}_{pe}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_b\right]}
$$

$$
\cancel{= \vec{E} - \left[en_b\eta + \frac{1+\beta^4}{(1+\beta)^2}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{e}\right]\delta\vec{v}_{pe} - \frac{1-\beta^3}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{e}\delta\vec{v}_{\gamma b}}
$$

$$
\partial_t\vec{v}_\gamma + H\vec{v}_\gamma + \left(\vec{v}_\gamma\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_\gamma
$$

$$
= -\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \frac{3}{4}\sigma_T n_b\left[(1+\beta^2)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \cancel{\frac{1-\beta^3}{1+\beta}\delta\vec{v}_{pe}}\right] - \frac{1}{a}\nabla\Phi
$$

$$
\partial_t\delta\vec{v}_{\gamma b} + H\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\vec{v}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v} - \frac{1-R}{1+R}\left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b}
$$

$$
= -\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \frac{1+R}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\left[(1+\beta^2)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \cancel{\frac{1-\beta^3}{1+\beta}\delta\vec{v}_{pe}}\right]
$$

まとめ

基礎方程式
- 光子の運動方程式
- 光子－バリオンの相対運動の方程式
- 電流の運動方程式 → オームの法則
- マックスウェル方程式

解き方
- 宇宙論的摂動の２次まで
- トムソン強結合近似の２次まで
- クーロン強結合近似の１次まで

４、 Maxwell + Ohmを解く

Maxwell + Ohmを解く

・宇宙論的摂動の２次まで
・クーロン強結合近似の１次まで
・トムソン項は外力と見なす
→　電荷密度・電流・電場・磁場が
　　トムソン項の関数として表される

基礎方程式

$$\frac{1}{a}\nabla\cdot\vec{E} = e\delta n_{pe}$$

$$\partial_t\vec{E} + 2H\vec{E} = \frac{1}{a}\nabla\times\vec{B} - e(n_b\delta\vec{v}_{pe} + \delta n_{pe}\vec{v}_b),$$

$$\partial_t\vec{B} + 2H\vec{B} = -\frac{1}{a}\nabla\times\vec{E}$$

$$\partial_t\delta n_{pe} + 3H\delta n_{pe} + \frac{1}{a}\nabla\cdot(n_b\delta\vec{v}_{pe} + \delta n_{pe}\vec{v}_b) = 0$$

電流の運動方程式
↓
オームの法則

$$\vec{E} = \frac{m_e}{e(1+\beta)}\left[\partial_t\delta\vec{v}_{pe} + \left(\vec{v}_b\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{pe} + \left(\delta\vec{v}_{pe}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_b\right] + en_b\eta_{\rm eff}\delta\vec{v}_{pe} + \vec{C}$$

トムソン項　有効抵抗

$$\vec{C} \equiv \frac{1-\beta^3}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{e}\delta\vec{v}_{\gamma b}$$

$$\begin{aligned}\eta_{\rm eff} &\equiv \eta + \frac{1+\beta^4}{(1+\beta)^2}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{e^2n_b} + \frac{m_e}{(1+\beta)e^2n_b}H \\ &= \eta\left[1 + \frac{1+\beta^4}{(1+\beta)^2}\frac{\tau_{\rm C}}{\tau_{\rm T}} + \frac{1}{1+\beta}H\tau_{\rm C}\right],\end{aligned}$$

１次摂動

１次摂動では磁場なし

$$\frac{1}{a}\nabla\cdot\vec{E}^{(1)} = e\delta n_{pe}^{(1)},$$

$$\partial_t\vec{E}^{(1)} + 2H\vec{E}^{(1)} = -en_b^{(0)}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)},$$

$$\partial_t\delta n_{pe}^{(1)} + 3H\delta n_{pe}^{(1)} + \frac{n_b^{(0)}}{a}\nabla\cdot\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} = 0,$$

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{m_e}{e(1+\beta)}\partial_t\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + en_b^{(0)}\eta_{\mathrm{eff}}^{(0)}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \vec{C}^{(1)}.$$

オームの法則

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{m_e}{e(1+\beta)}\partial_t \delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + e n_b^{(0)} \eta_{\rm eff}^{(0)} \delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \vec{C}^{(1)}$$

電流に対するクーロン強結合近似

$$\frac{|m_e \partial_t \delta\vec{v}_{pe}^{(1)}/e(1+\beta)|}{|e n_b^{(0)} \eta_{\rm eff}^{(0)} \delta\vec{v}_{pe}^{(1)}|} \sim \frac{k}{a}\tau_{\rm C} \sim 9.3\times 10^{-13}\left(\frac{k}{aH}\right)\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{1/2} \ll 1$$

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = e n_b^{(0)} \eta_{\rm eff}^{(0)} \delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \vec{C}^{(1)}}$$

宇宙論的摂動

オームの法則の発散を取る

$$\vec{E}^{(1)} = en_b^{(0)} \eta_{\rm eff}^{(0)} \delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \vec{C}^{(1)}$$

$$\eta_{\rm eff}^{(0)} \left[\partial_t \delta n_{pe}^{(1)} + 3H\delta n_{pe}^{(1)}\right] + \delta n_{pe}^{(1)} = \frac{1}{ea}\nabla\cdot\vec{C}^{(1)}$$

電荷に対する強結合近似（？？）

$$\frac{\left|\eta_{\rm eff}^{(0)} \left[\partial_t \delta n_{pe}^{(1)} + 3H\delta n_{pe}^{(1)}\right]\right|}{\left|\delta n_{pe}^{(1)}\right|} \sim \frac{k}{a}\eta_{\rm eff}^{(0)} \sim 2.1\times 10^{-25}\left(\frac{k}{aH}\right)\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{1/2} \ll 1$$

$$\boxed{\delta n_{pe}^{(1)} \approx \frac{1}{ea}\nabla\cdot\vec{C}^{(1)}}$$

速度差と電場

電荷保存の式から速度差が求まる。

$$\partial_t \delta n_{pe}^{(1)} + 3H\delta n_{pe}^{(1)} + \frac{n_b^{(0)}}{a}\nabla \cdot \delta \vec{v}_{pe}^{(1)} = 0$$

$$\delta \vec{v}_{pe}^{(1)} = -\frac{1}{en_b}(\partial_t + 2H)\vec{C}^{(1)} + \frac{1}{a}\nabla \times \vec{D}^{(1)}$$

オームの法則から電場が求まる

$$\vec{E}^{(1)} = en_b^{(0)}\eta_{\mathrm{eff}}^{(0)}\delta \vec{v}_{pe}^{(1)} + \vec{C}^{(1)}$$

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{C}^{(1)} + \frac{en_b^{(0)}\eta^{(0)}}{a}\nabla \times \vec{D}^{(1)}$$

積分定数を決める

電磁誘導の法則から積分定数が決まる

$$\partial_t \vec{E}^{(1)} + 2H\vec{E}^{(1)} = -en_b^{(0)}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)}$$

$$\left[\eta_{\mathrm{eff}}^{(0)}\partial_t + \eta_{\mathrm{eff}}^{(0)}\left(2H + \frac{\partial_t n_b^{(0)}}{n_b^{(0)}} + \frac{\partial_t \eta_{\mathrm{eff}}^{(0)}}{\eta_{\mathrm{eff}}^{(0)}}\right) + 1\right]\frac{1}{a}\nabla\times\vec{D}^{(1)} = 0$$

superhorizon (initial)でゼロだとするとゼロ

$$\nabla\times\vec{D}^{(1)} = 0$$

１次の解

１次の解をまとめると

$$\delta n_{pe}^{(1)} = \frac{1}{ea}\nabla\cdot\vec{C}^{(1)}$$
$$\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} = -\frac{1}{en_b^{(0)}}(\partial_t + 2H)\vec{C}^{(1)}$$
$$\vec{E}^{(1)} = \vec{C}^{(1)},$$

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{a}\nabla\cdot\vec{C}^{(1)}$$
$$\vec{j}^{(1)} = -(\partial_t + 2H)\vec{C}^{(1)}$$

電荷密度・電流
電場がトムソン項で
表された

近似の意味

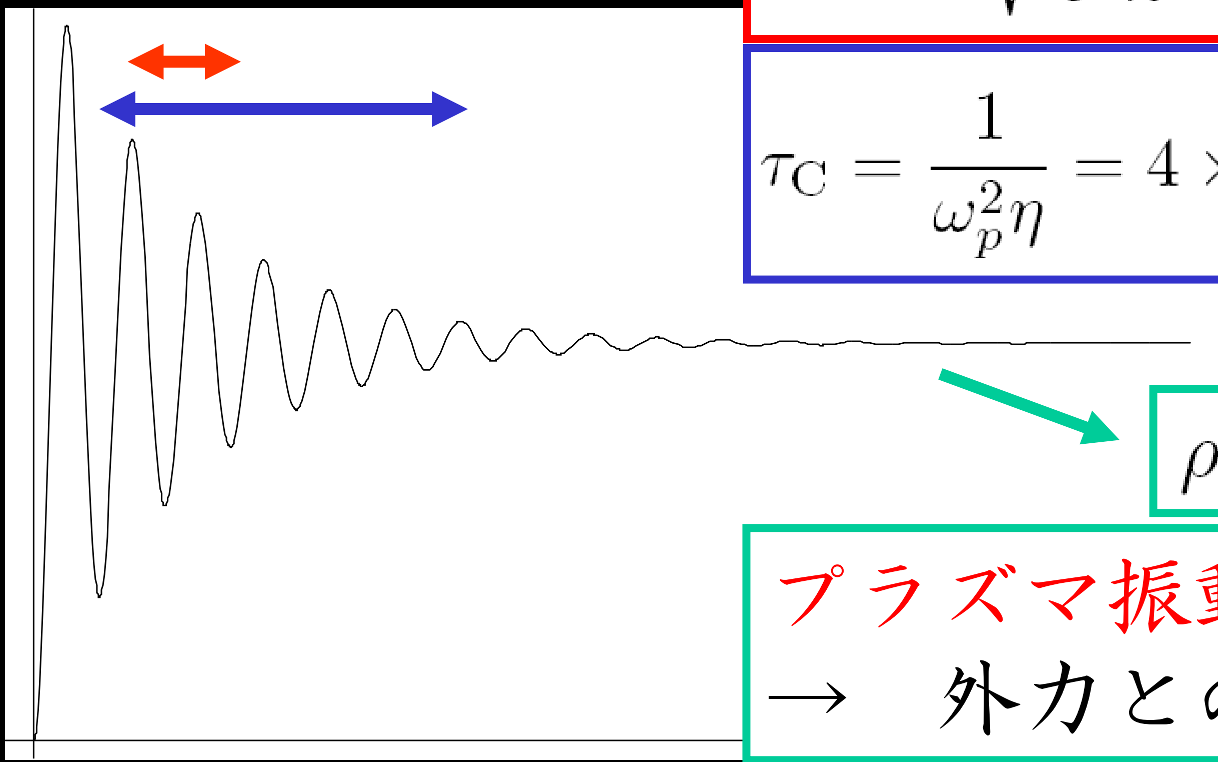
一般化オームの法則の発散をそのまま取る

$$\frac{1}{\omega_p^2}\partial_t^2\rho^{(1)} + \eta_{\rm eff}^{(0)}\partial_t\rho^{(1)} + \rho^{(1)} = \frac{1}{a}\nabla\cdot\vec{C}^{(1)}$$

外力のある
減衰振動

$$\omega_p^{-1} \equiv \sqrt{\frac{m_e}{e^2 n^{(0)}}} = 2\times 10^{-9}\ \sec\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-3/2}$$

$$\tau_{\rm C} = \frac{1}{\omega_p^2\eta} = 4\times 10^{-3}\ \sec\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-3/2}$$



$$\rho^{(1)} = \nabla\cdot\vec{C}^{(1)}$$

プラズマ振動と電気抵抗による緩和
→　外力との平衡に落ち着く

2次摂動

2次から磁場が登場

$$\partial_t \vec{E}^{(2)} + 2H\vec{E}^{(2)} = \frac{1}{a}\nabla\times\vec{B}^{(2)} - e\left(n_b^{(0)}\delta\vec{v}_{pe}^{(2)} + n_b^{(1)}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \delta n_{pe}^{(1)}\vec{v}_b^{(1)}\right)$$

$$\partial_t \vec{B}^{(2)} + 2H\vec{B}^{(2)} = -\frac{1}{a}\nabla\times\vec{E}^{(2)},$$

$$\partial_t \delta n_{pe}^{(2)} + 3H\delta n_{pe}^{(2)} + \frac{1}{a}\nabla\cdot\left(n_b^{(0)}\delta\vec{v}_{pe}^{(2)} + n_b^{(1)}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \delta n_{pe}^{(1)}\vec{v}_b^{(1)}\right) = 0,$$

$$\vec{E}^{(2)} = \frac{m_e}{e(1+\beta)}\left[\partial_t\delta\vec{v}_{pe}^{(2)} + \left(\vec{v}_b^{(1)}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \left(\delta\vec{v}_{pe}^{(1)}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}_b^{(1)}\right]$$
$$+ e n_b^{(0)}\eta_{\text{eff}}^{(0)}\left(\delta\vec{v}_{pe}^{(2)} + \frac{n_b^{(1)}}{n_b^{(0)}}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)} + \frac{\eta_{\text{eff}}^{(1)}}{\eta_{\text{eff}}^{(0)}}\delta\vec{v}_{pe}^{(1)}\right) + \vec{C}^{(2)}.$$

$H\tau_c, H\eta \ll 1$を使いながら同じように解く

解のまとめ

１次と２次を合わせた解

$$\vec{E} = \vec{C},$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{a^2}\int dt\ a\nabla \times \vec{C},$$

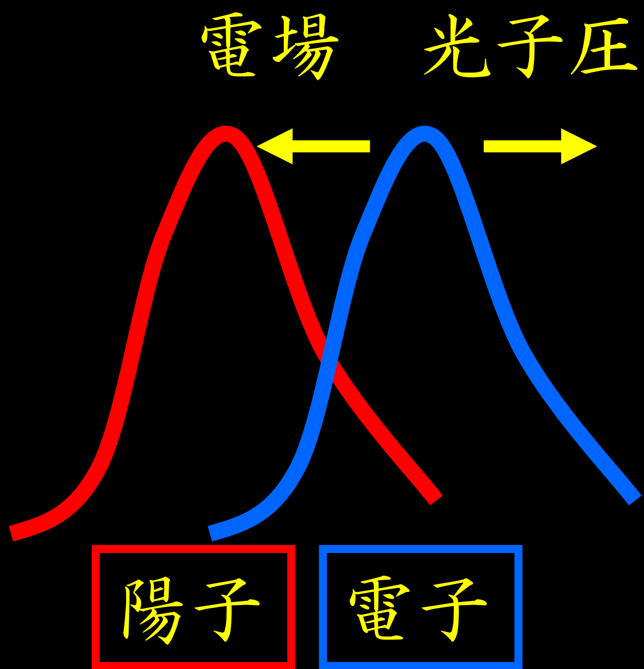
$$\rho = \frac{1}{a}\nabla \cdot \vec{C},$$

$$\vec{j} = -(\partial_t + 2H)\vec{C} - \frac{1}{a^3}\int dt\ a\nabla \times \nabla \times \vec{C}$$

１次ではゼロ

全ての量がトムソン項で表された

コメント



$$\vec{E} = \vec{C},$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{a^2}\int dt\ a\nabla \times \vec{C},$$

$$\rho = \frac{1}{a}\nabla \cdot \vec{C},$$

$$\vec{j} = -(\partial_t + 2H)\vec{C} - \frac{1}{a^3}\int dt\ a\nabla \times \nabla \times \vec{C}$$

- オームの法則で電流項は効かない
  → 電子が光子に押されるのと電場がつりあう
- 電流 → 変位電流を支える部分 ＋ 磁場を支える部分
- 電場、電荷密度はトムソン項がなくなると消える
  磁場、電流はトムソン項がなくなっても残る

まとめ

Maxwell + Ohmを解く

・宇宙論的摂動の２次まで

・クーロン強結合近似の１次まで

・トムソン項は外力と見なす

→　電荷密度・電流・電場・磁場が
　　トムソン項の関数として表される

次の章でトムソン項について解き、
全てが基本的な量で表される

５、トムソン項を解く

磁場生成とトムソン項

磁場とトムソン項の関係

$$\vec{B} = -\frac{1}{a^2}\int dt\ a\nabla \times \vec{C}$$

$$\vec{C} \equiv \frac{1-\beta^3}{1+\beta}\frac{\sigma_T \rho_\gamma}{e}\delta\vec{v}_{\gamma b}$$

$$\nabla \times \vec{C}^{(2)} = \frac{1-\beta^3}{1+\beta}\frac{\sigma_T \rho_\gamma^{(0)}}{e}\left[\frac{\nabla \rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}} \times \delta\vec{v}_{\gamma b}^{(1)} + \nabla \times \delta\vec{v}_{\gamma b}^{(2)}\right]$$

光子の密度勾配と速度差の外積　vorticityの差

トムソン散乱の強結合近似はこれまでもあったが、こんなものを考えたことはない

運動方程式

光子－バリオンの速度差の運動方程式

$$\partial_t \delta\vec{v}_{\gamma b} + H\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\vec{v}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v} - \frac{1-R}{1+R}\left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b}$$
$$= -\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \frac{1+R}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\left[(1+\beta^2)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \underline{\frac{1-\beta^3}{1+\beta}\delta\vec{v}_{pe}}\right].$$

電流による寄与

前節の解析より

$$\frac{|\delta\vec{v}_{pe}|}{|\delta\vec{v}_{\gamma b}|} \sim \frac{\sigma_T\rho_\gamma k}{e^2 a n_b} = \frac{k}{a\omega_p^2\tau_{\mathrm{T}}} \sim 1.5\times10^{-27}\left(\frac{k}{aH}\right)\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^3$$

したがって電流による寄与は無視してよい

→　通常のＣＭＢ現象論の正当性が示された

トムソン散乱の強結合近似

したがって運動方程式は

$$\partial_t \delta\vec{v}_{\gamma b} + H\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\vec{v}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}$$
$$= -\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \frac{1+\beta^2}{1+\beta}(1+R)\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\delta\vec{v}_{\gamma b}.$$

これを強結合近似で解く

$$\frac{m_p}{\sigma_T\rho_\gamma}\frac{k}{a} = 2.4\times 10^{-6}\left(\frac{k}{aH}\right)\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-2}$$

密度もずれを考慮 $n_b = \bar{n}_b(1+\Delta)$

密度差・速度差を強結合パラメータで展開

$$\Delta = \Delta^{(I)} + \Delta^{(II)} + \cdots, \qquad \delta\vec{v}_{\gamma b} = \delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)} + \delta\vec{v}_{\gamma b}^{(II)} + \cdots$$

連続の式

光子・バリオンの連続の式

$$\partial_t \rho_\gamma + 4H\rho_\gamma + \left(\vec{v}_\gamma \cdot \frac{\nabla}{a}\right)\rho_\gamma + \frac{4\rho_\gamma}{3a}\nabla \cdot \vec{v}_\gamma = 0,$$

$$\partial_t n_b + 3H n_b + \left(\vec{v}_b \cdot \frac{\nabla}{a}\right) n_b + \frac{n_b}{a}\nabla \cdot \vec{v}_b = 0.$$

０次と１次の式

$$\left(\partial_t + \vec{v} \cdot \frac{\nabla}{a}\right)\left(\frac{\bar{n}_b}{\rho_\gamma^{3/4}}\right) = 0$$

$\longrightarrow$ ０次ではadiabatic

$$\partial_t \Delta^{(I)} + \left(\vec{v} \cdot \frac{\nabla}{a}\right)\Delta^{(I)} - \frac{1}{a}\nabla \cdot \left(\frac{1}{1+\bar{R}}\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)}\right) - \frac{1}{1+\bar{R}}\frac{(\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)} \cdot \nabla)\bar{n}_b}{a\bar{n}_b} = 0$$

$$\boxed{\Delta^{(I,1)} = \int dt \frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{1}{a}\nabla \cdot \delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I,1)}}$$

欲しいのは１次だけ
（後でわかる）

強結合１次

$$\partial_t \delta\vec{v}_{\gamma b} + H\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\vec{v}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b} + \left(\delta\vec{v}_{\gamma b}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}$$
$$= -\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \frac{1+\beta^2}{1+\beta}(1+\bar{R}+\bar{R}\Delta)\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\delta\vec{v}_{\gamma b}.$$

$$\Big\downarrow \text{強結合１次}$$

$$0 = -\frac{1}{4a}\frac{\nabla\rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \frac{1+\beta^2}{1+\beta}(1+\bar{R})\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\delta\vec{v}^{(I)}_{\gamma b}$$

これを宇宙論的摂動の１次・２次で解く

強結合１次の解

宇宙論的摂動１次と２次の解

$$\delta\vec{v}^{(I,1)}_{\gamma b} = -\frac{1}{4a}\frac{1+\beta}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{\sigma_T\rho^{(0)}_\gamma}\frac{\nabla\rho^{(1)}_\gamma}{\rho^{(0)}_\gamma}$$

$$\delta\vec{v}^{(I,2)}_{\gamma b} = -\frac{1}{4a}\frac{1+\beta}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{\sigma_T\rho^{(0)}_\gamma}\left[\frac{\nabla\rho^{(2)}_\gamma}{\rho^{(0)}_\gamma} - \frac{8+7\bar{R}^{(0)}}{4(1+\bar{R}^{(0)})}\frac{\rho^{(1)}_\gamma}{\rho^{(0)}_\gamma}\frac{\nabla\rho^{(1)}_\gamma}{\rho^{(0)}_\gamma}\right]$$

ところが磁場生成に関わる項

$$\nabla\times\vec{C}^{(2)} = \frac{1-\beta^3}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho^{(0)}_\gamma}{e}\left[\frac{\nabla\rho^{(1)}_\gamma}{\rho^{(0)}_\gamma}\times\delta\vec{v}^{(1)}_{\gamma b} + \nabla\times\delta\vec{v}^{(2)}_{\gamma b}\right]$$

はゼロになる。→　強結合２次を解く

（電荷密度・電流・電場のleadingはこれで十分）

強結合２次

$$\partial_t \delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)} + H\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)} + \left(\vec{v}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)} + \left(\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)}\cdot\frac{\nabla}{a}\right)\vec{v}$$
$$= -\frac{1+\beta^2}{1+\beta}\frac{\sigma_T\rho_\gamma}{m_p}\left[\bar{R}\Delta^{(I)}\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(I)} + (1+\bar{R})\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(II)}\right].$$

$$\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(II,1)} = -\frac{1}{4a}\left[\frac{1+\beta}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{\sigma_T\rho_\gamma^{(0)}}\right]^2\left[\underline{\frac{\partial_t\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}} - \frac{8+7\bar{R}^{(0)}}{1+\bar{R}^{(0)}}H\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}\right]$$

密度勾配と平行でない

$$\begin{aligned}
\delta\vec{v}_{\gamma b}^{(II,2)} \;=\; & -\frac{1}{4a}\left[\frac{1+\beta}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{\sigma_T\rho_\gamma^{(0)}}\right]^2 \\
& \times\left[\frac{\partial_t\nabla\rho_\gamma^{(2)}}{\rho_\gamma^{(0)}} - \frac{4(2+\bar{R}^{(0)})}{1+\bar{R}^{(0)}}H\frac{\nabla\rho_\gamma^{(2)}}{\rho_\gamma^{(0)}} + \frac{8+7\bar{R}^{(0)}}{4(1+\bar{R}^{(0)})}\underline{\frac{\partial_t\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}} - \frac{12+11\bar{R}^{(0)}}{4(1+\bar{R}^{(0)})}\underline{\frac{\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}\frac{\partial_t\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}}\right. \\
& \left.+\frac{3(164+217\bar{R}^{(0)}+69\bar{R}^{(0)2})}{(1+\bar{R}^{(0)})^2}H\frac{\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}} + \frac{(\vec{v}^{(1)}\cdot\nabla)\nabla\rho_\gamma^{(1)} + (\nabla\rho_\gamma^{(1)}\cdot\nabla)\vec{v}^{(1)}}{a\rho_\gamma^{(0)}}\right] \\
& +\frac{1}{4a}\frac{1+\beta}{1+\beta^2}\frac{\bar{R}^{(0)}}{(1+\bar{R}^{(0)})^2}\frac{m_p}{\sigma_T\rho_\gamma^{(0)}}\underline{\Delta^{(I,1)}\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}}.
\end{aligned}$$

電磁気的量に代入

$$\rho^{(1)} = -\frac{1}{4a^2}\frac{1-\beta^3}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{e}\frac{\nabla^2\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}},$$

$$\vec{j}^{(1)} = \frac{1}{4a}\frac{1-\beta^3}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{e}\left[\frac{\partial_t\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}} + \frac{5+4\bar{R}^{(0)}}{1+\bar{R}^{(0)}}H\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}}\right],$$

$$\vec{E}^{(1)} = -\frac{1}{4a}\frac{1-\beta^3}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{m_p}{e}\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}},$$

$$\begin{aligned}\vec{B}^{(2)} = &-\frac{1}{16a^2}\frac{(1+\beta)(1-\beta^3)}{(1+\beta^2)^2}\frac{m_p^2}{e\sigma_T} \\ &\times\int dt\frac{1}{(1+\bar{R}^{(0)})^2}\frac{\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)}} \\ &\times\left[-\frac{2(8+7\bar{R}^{(0)})}{1+\bar{R}^{(0)}}\frac{\partial_t\nabla\rho_\gamma^{(1)}}{\rho_\gamma^{(0)2}} + \bar{R}^{(0)}\int dt'\frac{1}{(1+\bar{R}^{(0)})^2a^2}\frac{\nabla\left(\nabla^2\rho_\gamma^{(1)}\right)}{\rho_\gamma^{(0)2}}\right]\end{aligned}$$

全ての量が普通の
物理量で表された！

オーダー評価

$$\Delta^{(I,1)} \sim \left|\delta\vec{v}^{(1)}_{\gamma b}\right| \sim \frac{1}{4}\frac{m_p}{\sigma_T \rho^{(0)}_\gamma}\frac{k^2}{a^2 H}\delta_\gamma = \frac{1}{4}\frac{k^2 \tau_{\mathrm{T}}}{a^2 H}\delta_\gamma$$
$$\sim 7\times 10^{-13}\left(\frac{k}{aH}\right)^2\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-1}$$

$$\left|\frac{\rho^{(1)}}{e n^{(0)}_b}\right| \sim \left|\delta\vec{v}^{(1)}_{pe}\right| \sim \frac{m_p}{4e^2 n^{(0)}_b}\frac{k^2}{a^2}\delta_\gamma = \frac{1}{4\beta}\frac{k^2}{a^2\omega_p^2}\delta_\gamma$$
$$\sim 9\times 10^{-40}\left(\frac{k}{aH}\right)^2\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{3}$$

$$\tau_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\omega_p^2 \eta} = 4\times 10^{-3}\ \mathrm{sec}\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\tau_{\mathrm{T}} = \frac{m_p}{\sigma_T \rho_\gamma} = 10^{3}\ \mathrm{sec}\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-4}$$

$$H^{-1} = 4.5\times 10^{9}\ \mathrm{sec}\left(\frac{1+z}{10^5}\right)^{-2}$$

電磁気的量は
suppressされすぎ？

宇宙論的摂動

強結合近似① $H\tau_C$

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{m_e}{e(1+\beta)}\cancel{\partial_t \delta}\vec{v}_{pe}^{(1)} + e n_b^{(0)} \eta_{\rm eff}^{(0)} \delta \vec{v}_{pe}^{(1)} + \vec{C}^{(1)}$$

強結合近似② $H\eta$

$$\eta_{\rm eff}^{(0)} \left[\cancel{\partial_t \delta n_{pe}^{(1)} + 3H \delta n_{pe}^{(1)}} \right] + \delta n_{pe}^{(1)} = \frac{1}{ea} \nabla \cdot \vec{C}^{(1)}$$

結局、

$$H\tau_C \times H\eta = \frac{H^2}{\omega_p^2}$$

でsuppressされることになる。これは電場のせい。

まとめ

強結合近似で光子とバリオンの速度差を求めた

- 全ての量が普通の１次量で表された
- 磁場生成は強結合２次から
- 電磁気的量は単なるクーロン強結合パラメータよりさらにsuppressされている

６、宇宙磁場の観測と・・・

磁場の観測

初期宇宙で生成された磁場を観測したい

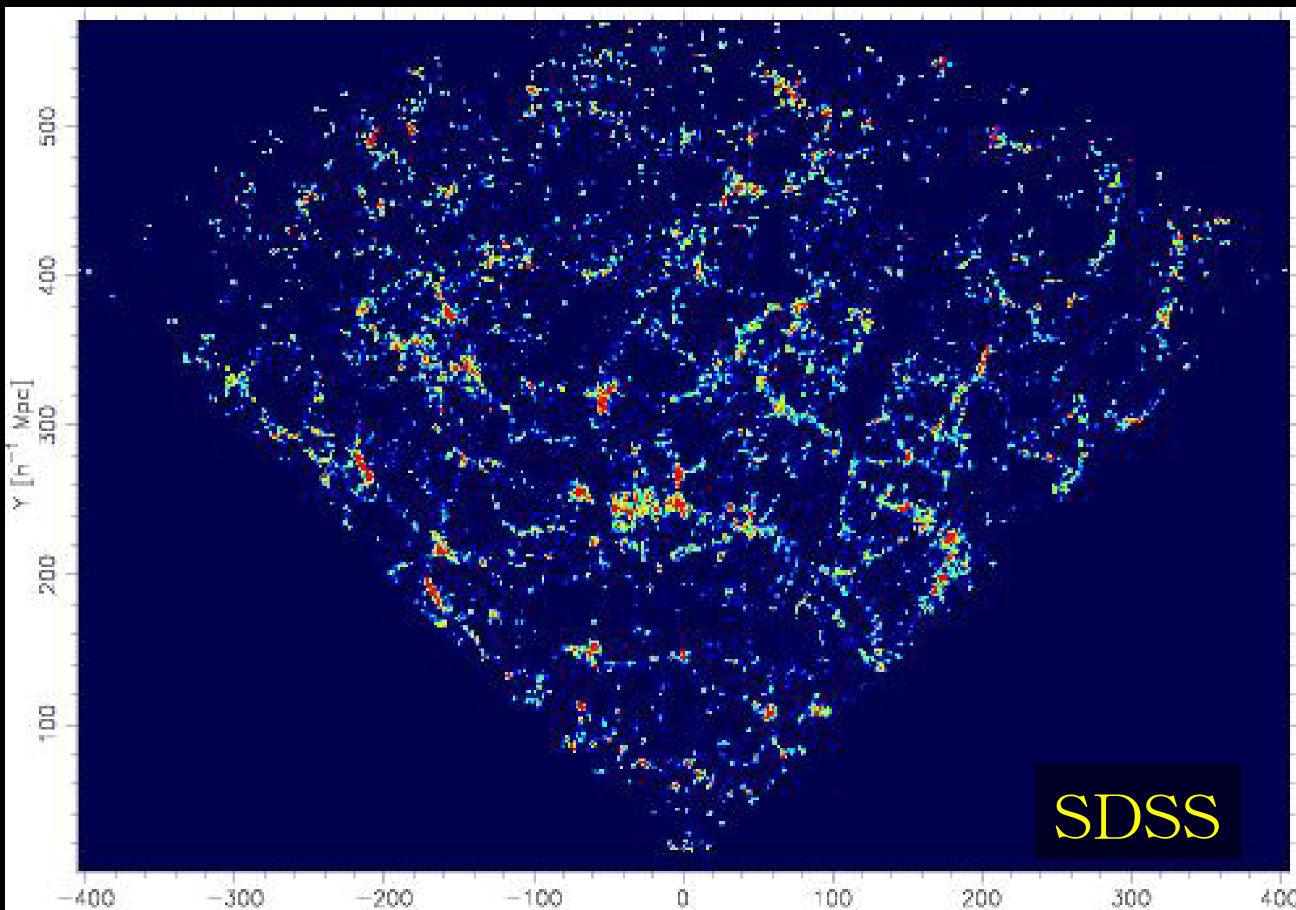
- 理論の検証
- 磁場で初期宇宙を探る？

問題

- 生成されたときの情報は残っているか？
- そんな弱い磁場を観測できるか？

問題１：情報は残っているか？

収縮・乱流に巻き込まれるとスペクトルは変化する
濃い領域（銀河・銀河団）→ ダメ
薄い領域（void）→ OK？



- 宇宙の４０％
- 典型的には10Mpc
- 密度が平均より小さいのでeffectiveに反重力
  → ゆらぎは線形のまま
- 紫外線に満ちている
  → ガスはなかなかcollapseできない
- 他に磁場源はなさそう

問題２：弱い磁場を観測できるか？

CMB・Faraday rotation

→ 現在の制限：B < 1nG

→ 望み薄

Plagaの方法 (Plaga, 1994)

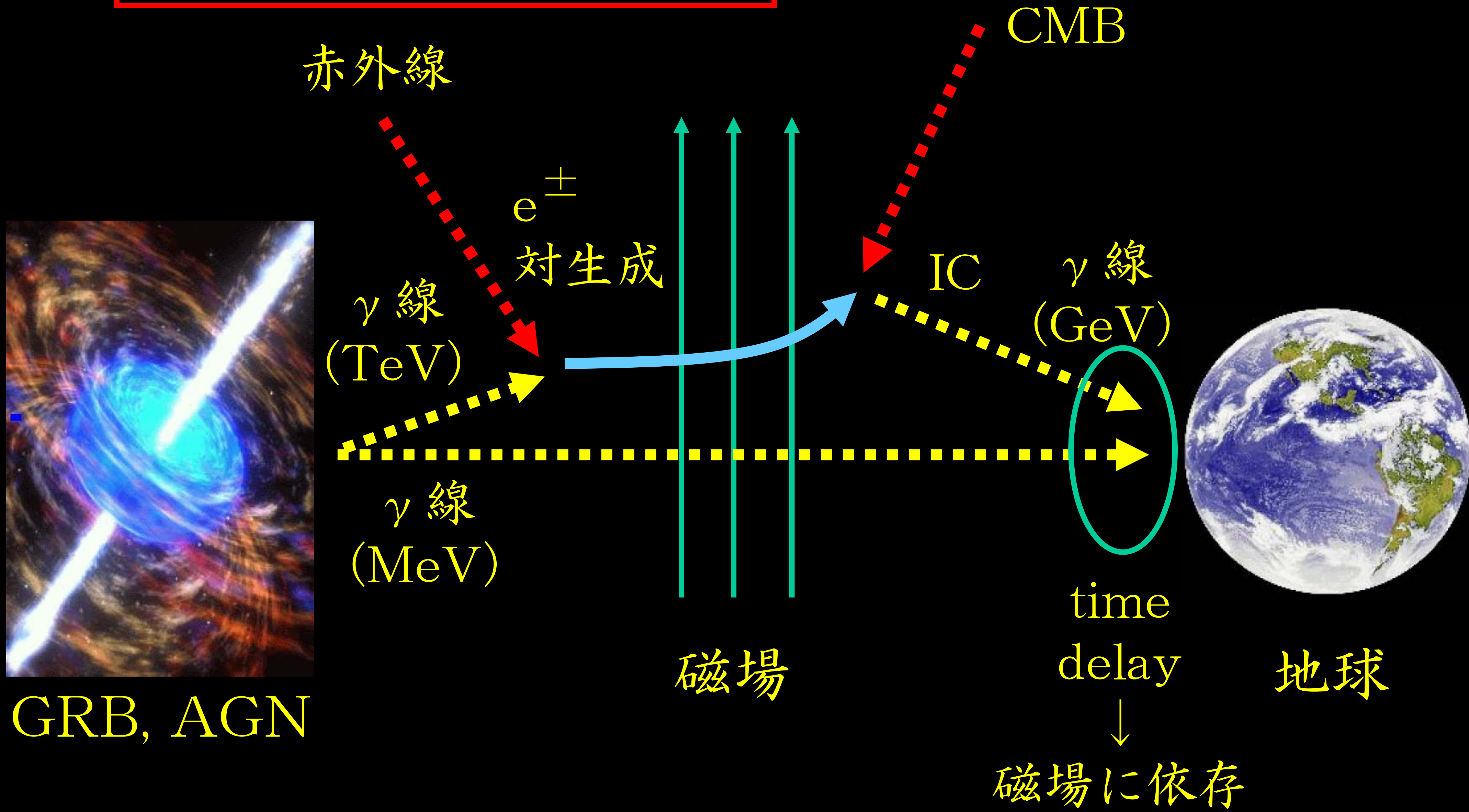
GRB、blazarなど高エネルギーバースト天体からのdelayed photonを使って非常に弱い磁場を測る

→ $B = 10^{-15} \sim 10^{-20}$ G

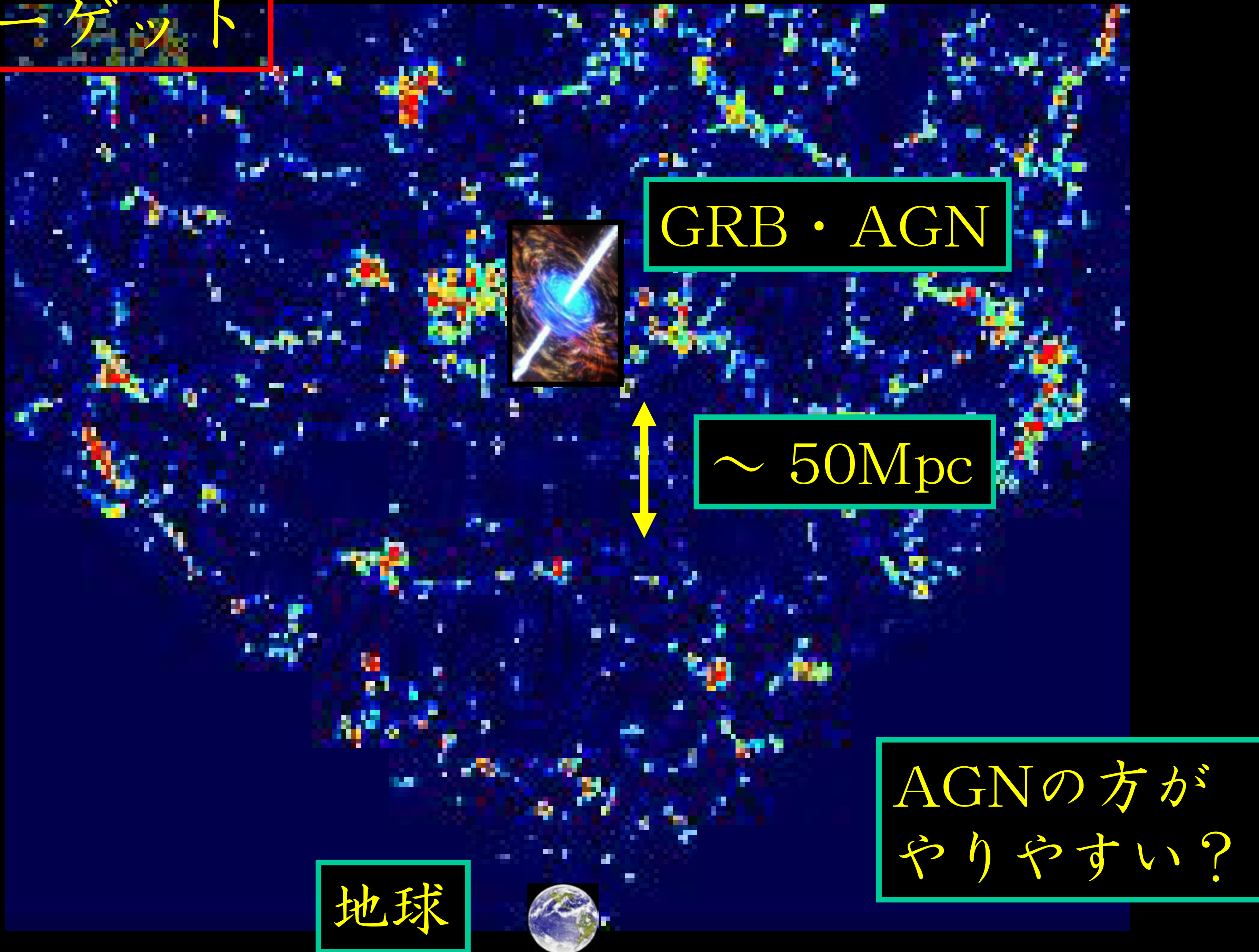
→ 現在のところ最も強力な方法

(Ichiki, Inoue & KT, in progress)

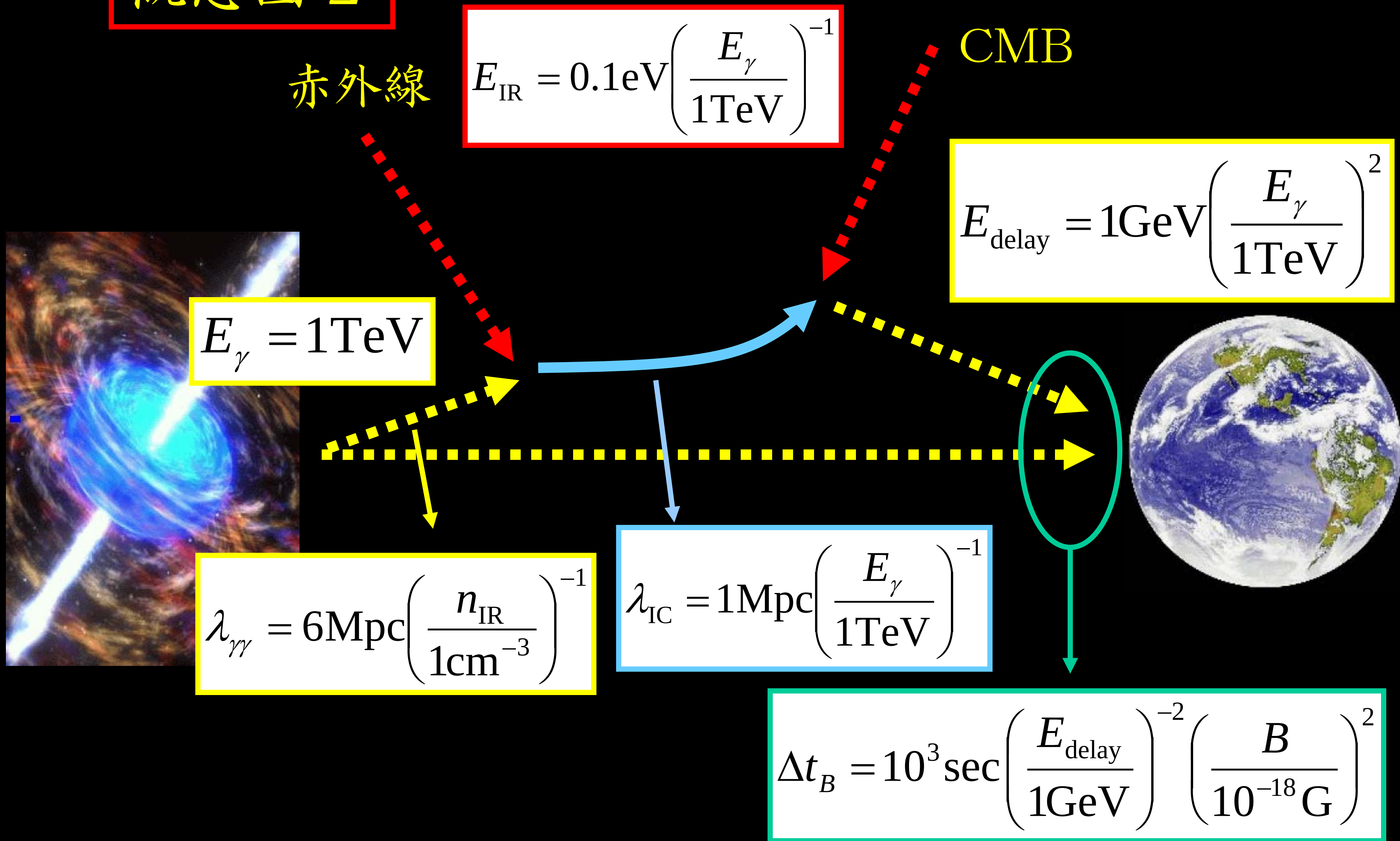
Plagaの方法概念図１



ターゲット



概念図 2



赤外線
$E_{\mathrm{IR}} = 0.1\mathrm{eV}\left(\frac{E_\gamma}{1\mathrm{TeV}}\right)^{-1}$
CMB
$E_{\mathrm{delay}} = 1\mathrm{GeV}\left(\frac{E_\gamma}{1\mathrm{TeV}}\right)^{2}$
$E_\gamma = 1\mathrm{TeV}$
$\lambda_{\gamma\gamma} = 6\mathrm{Mpc}\left(\frac{n_{\mathrm{IR}}}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1}$
$\lambda_{\mathrm{IC}} = 1\mathrm{Mpc}\left(\frac{E_\gamma}{1\mathrm{TeV}}\right)^{-1}$
$\Delta t_B = 10^3\mathrm{sec}\left(\frac{E_{\mathrm{delay}}}{1\mathrm{GeV}}\right)^{-2}\left(\frac{B}{10^{-18}\mathrm{G}}\right)^{2}$

いろいろな数字１

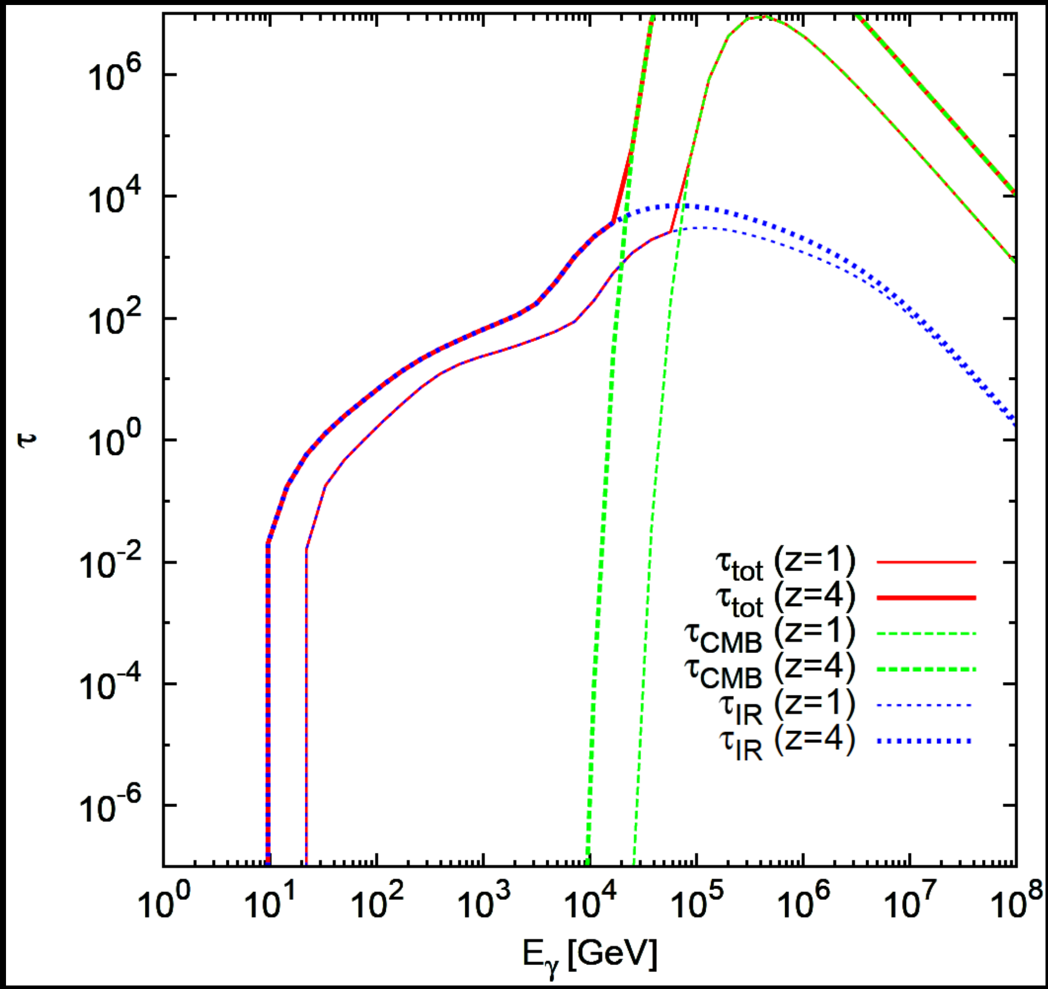
$$E_\gamma = 1\mathrm{TeV}$$

・TeV blazar
・GRBではパラメータ次第で
　TeVが出るのは割と自然

$$E_{\mathrm{IR}} = 10^{-1}\mathrm{eV}\left(\frac{E_\gamma}{1\mathrm{TeV}}\right)^{-1}$$

・COBEでわりとよく観測

$$E_{\mathrm{delay}} = 1\mathrm{GeV}\left(\frac{E_\gamma}{1\mathrm{TeV}}\right)^{2}$$



・GLASTなど衛星の領域。
　もう少し高いと地上のチェレンコフ望遠鏡の領域。

いろいろな数字２

$$\lambda_{\gamma\gamma} = 6\mathrm{Mpc}\left(\frac{n_{\mathrm{IR}}}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1}$$

・天体付近の濃い領域から出るのに十分大きい

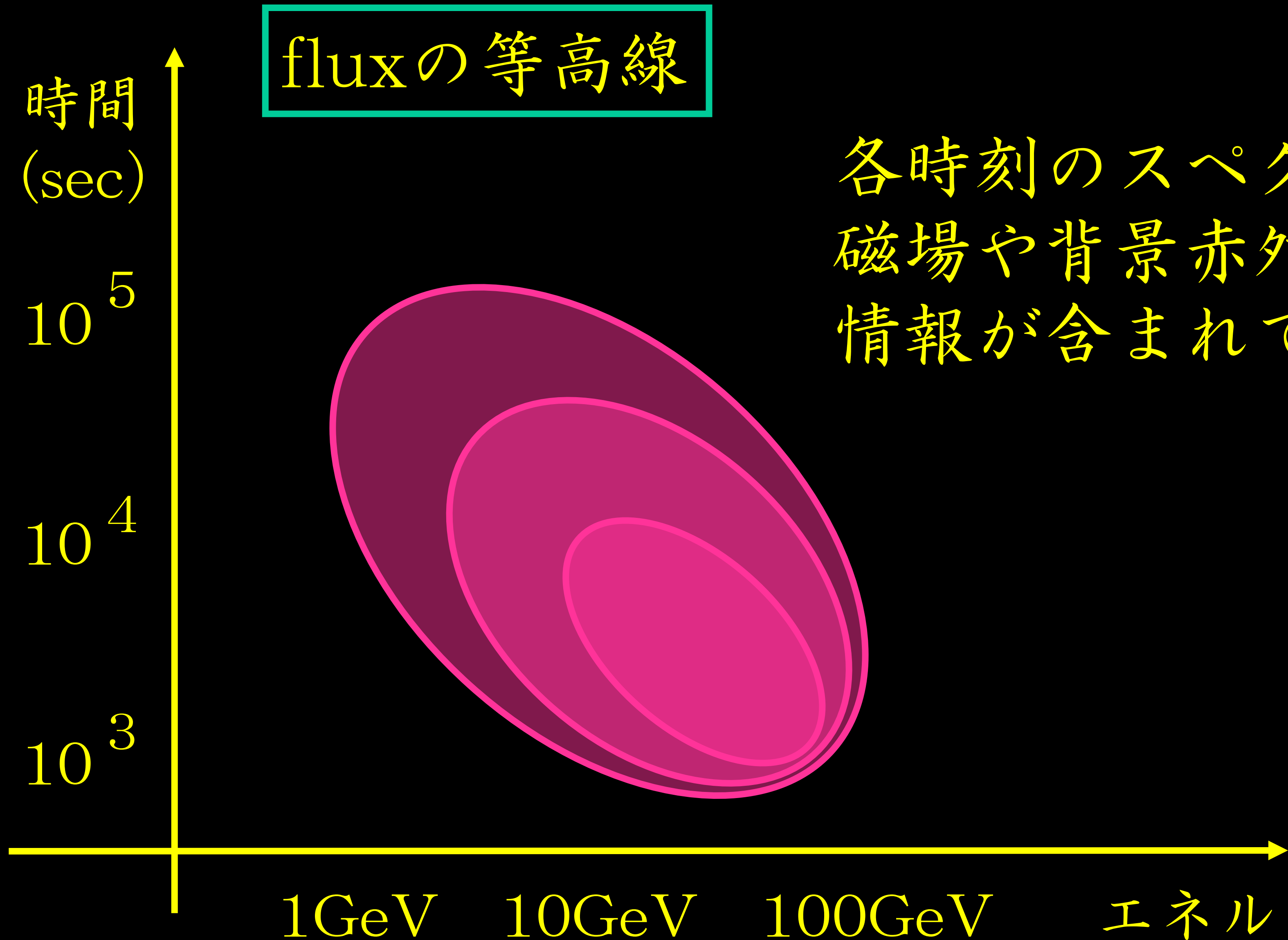
$$\lambda_{\mathrm{IC}} = 1\mathrm{Mpc}\left(\frac{E_{\gamma}}{1\mathrm{TeV}}\right)^{-1}$$

・上と合わせても基本的に反応はlocal

$$\Delta t_{B} = 10^{3}\mathrm{sec}\left(\frac{E_{\mathrm{delay}}}{1\mathrm{GeV}}\right)^{-2}\left(\frac{B}{10^{-18}\mathrm{G}}\right)^{2}$$

・強い（弱い）磁場は高（低）エネルギーγ線で見る
・高エネルギー天体固有の時間スケールより大きくなければならない

観測量

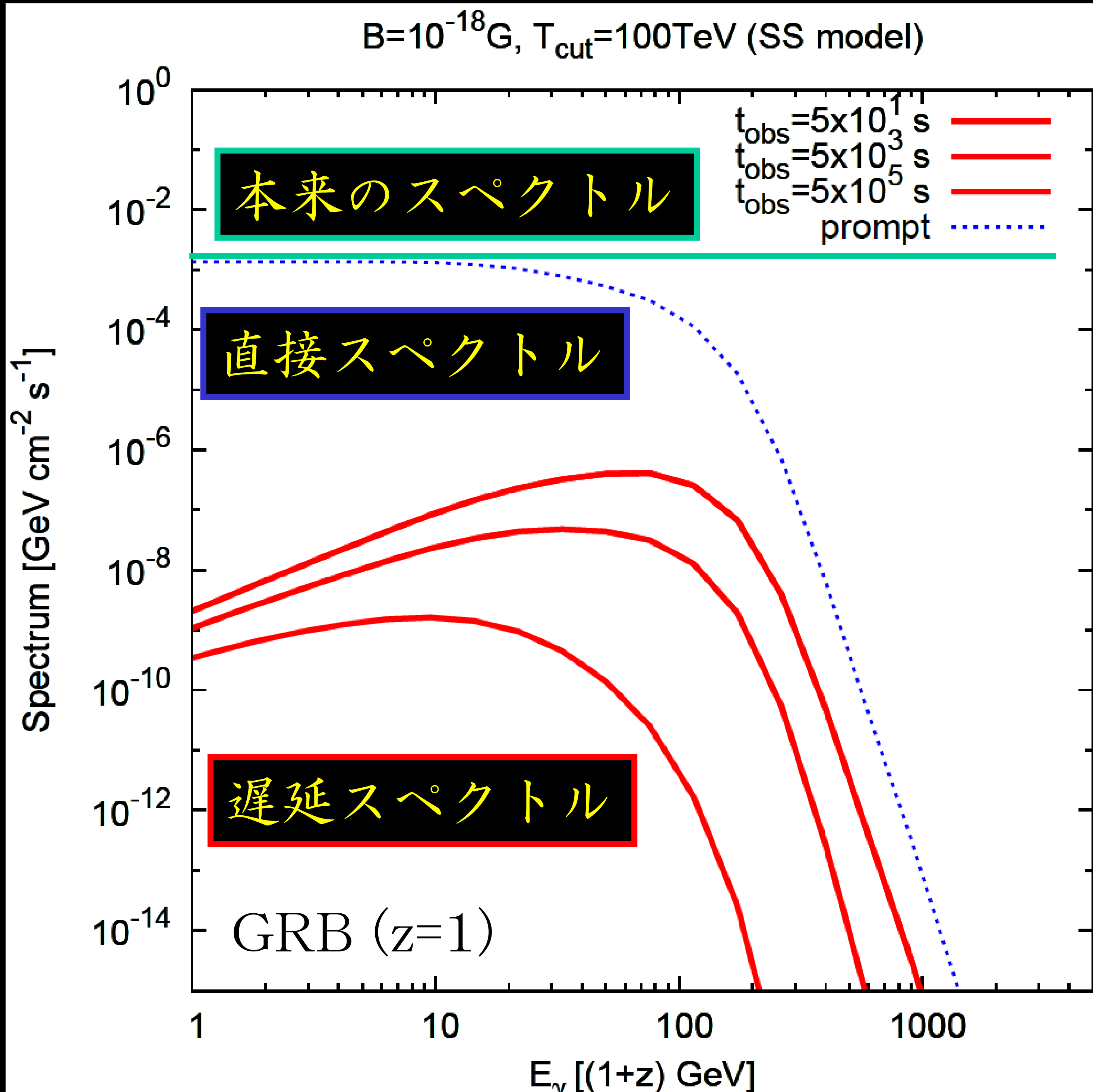


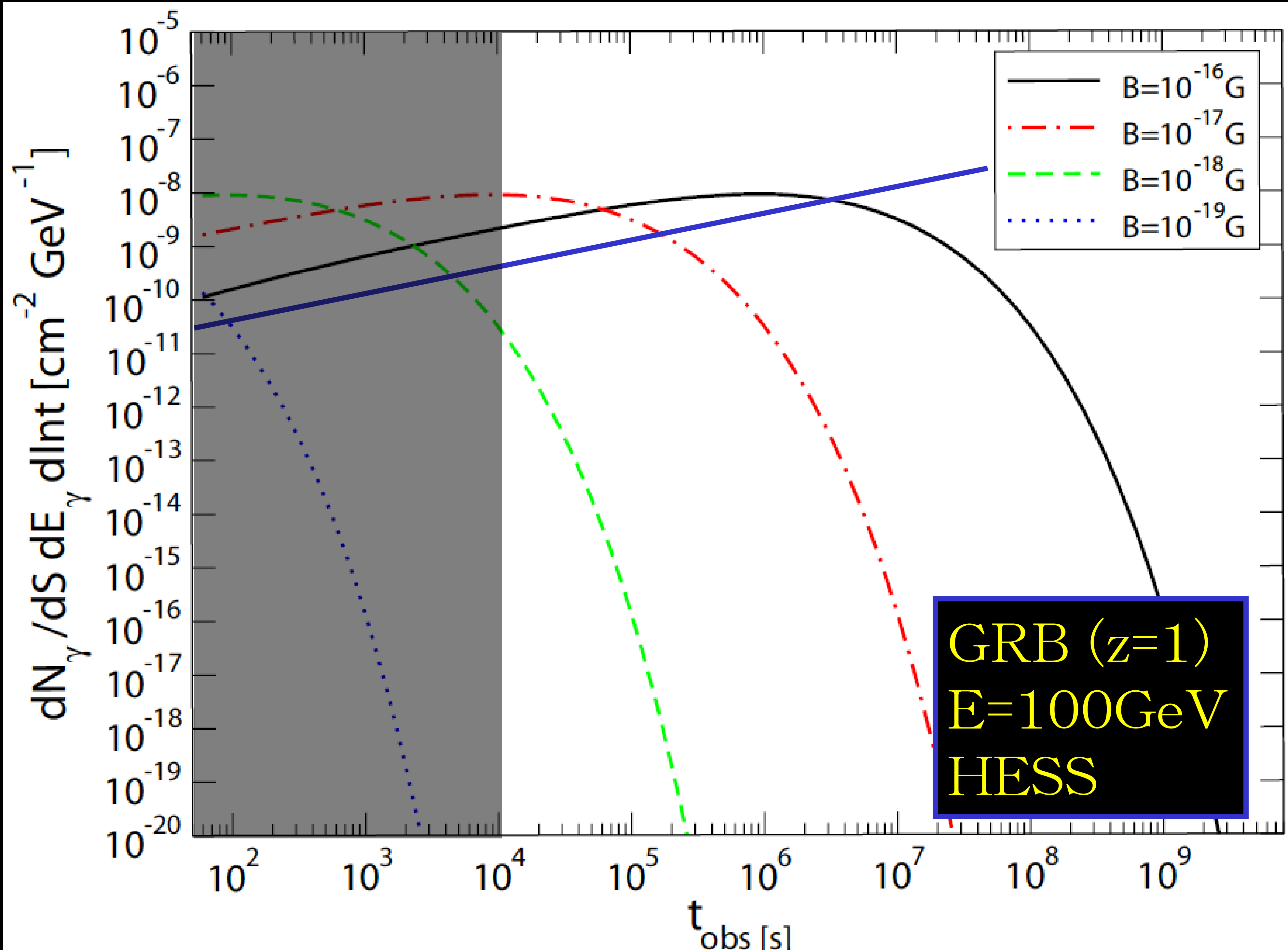
各時刻のスペクトルに
磁場や背景赤外線の
情報が含まれている

スペクトル

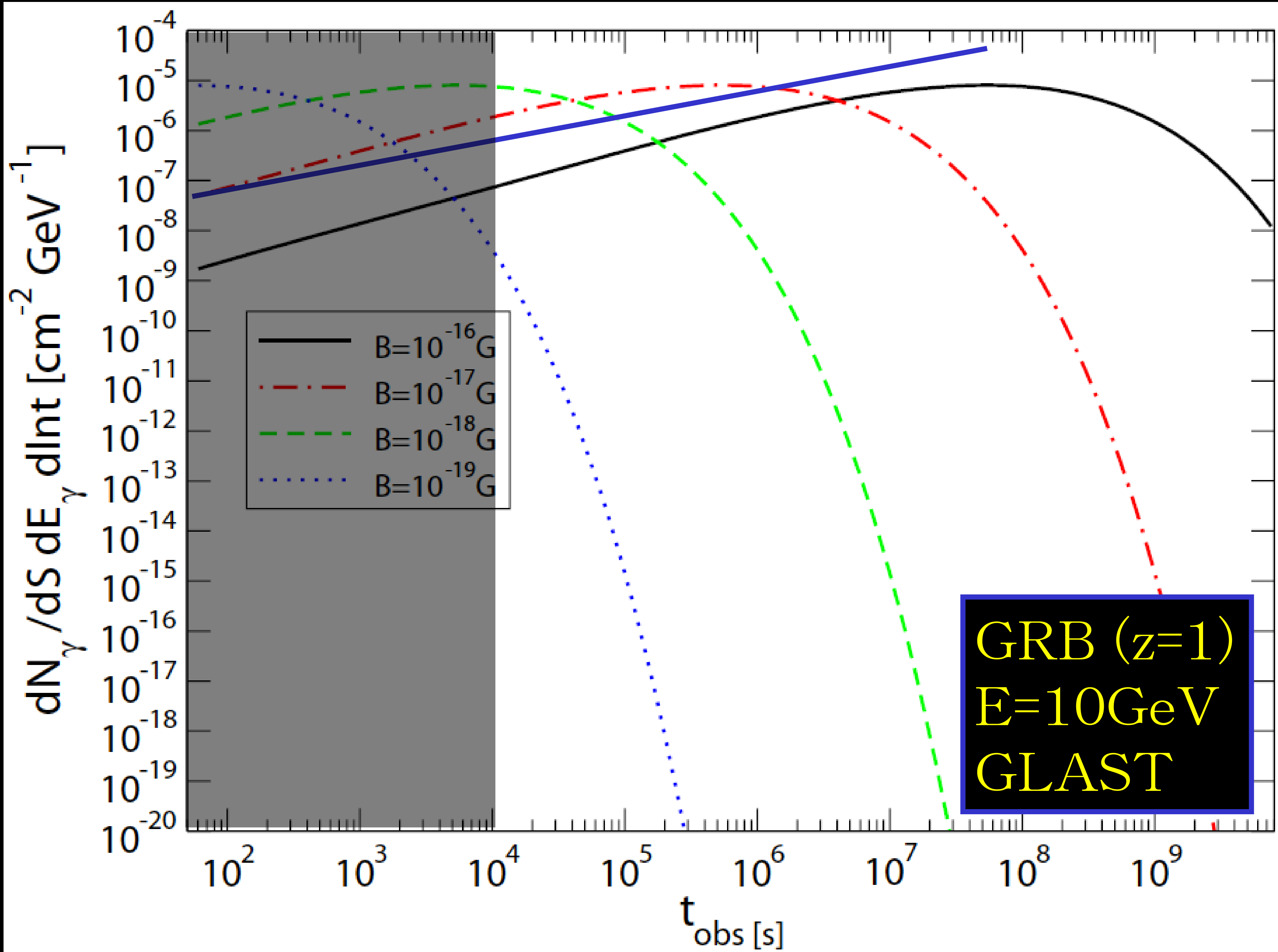
スペクトルの時間発展

- 10GeV以上で直接のガンマ線は吸収される
- 遅延スペクトルのピークは時間とともに低エネルギーになる



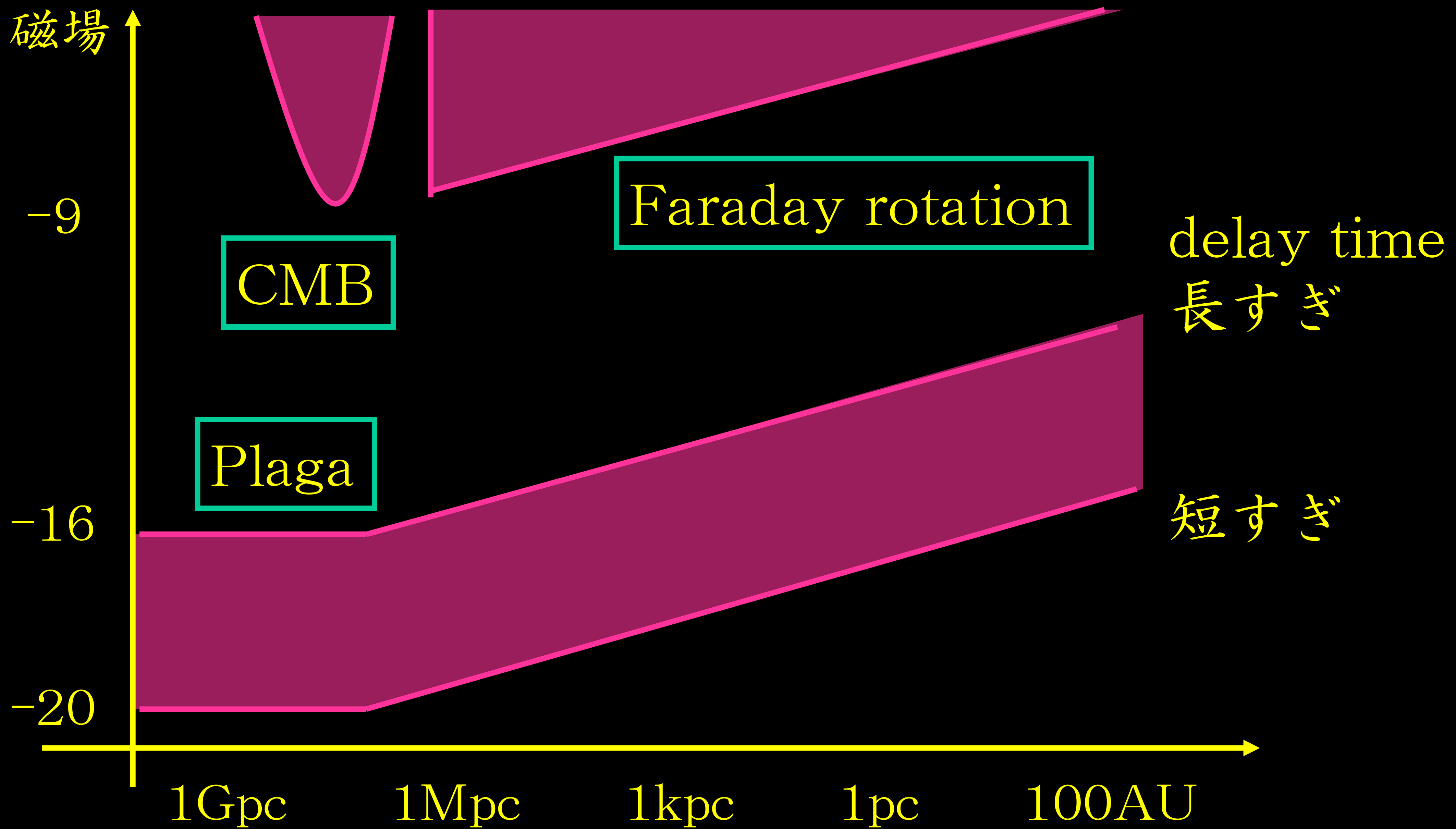


$B=10^{-16}$G
$B=10^{-17}$G
$B=10^{-18}$G
$B=10^{-19}$G
GRB (z=1)
E=100GeV
HESS
$dN_\gamma/dS\, dE_\gamma\, d\ln t$ [cm^{-2} GeV^{-1}]
$t_{obs\,[s]}$
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
10^{-14}
10^{-15}
10^{-16}
10^{-17}
10^{-18}
10^{-19}
10^{-20}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
10^{7}
10^{8}
10^{9}



$dN_\gamma/dS\, dE_\gamma\, d\ln t$ [cm^{-2} GeV^{-1}]
$t_{obs\,[s]}$
B=10^{-16}G
B=10^{-17}G
B=10^{-18}G
B=10^{-19}G
GRB (z=1)
E=10GeV
GLAST

non-detectionによる制限



２次摂動で１次摂動を探る

２次の重力波や磁場スペクトルは
原始ゆらぎスペクトルに依存

$$P^{(2)}_{\mathrm{GW}},\ P^{(2)}_{B} \propto P^{2}_{\mathcal{R}}$$

→　・重力波・磁場を観測すれば原始ゆらぎを
　　観測できる
　・しかも２次のスペクトルは１次の
　　スペクトルに敏感

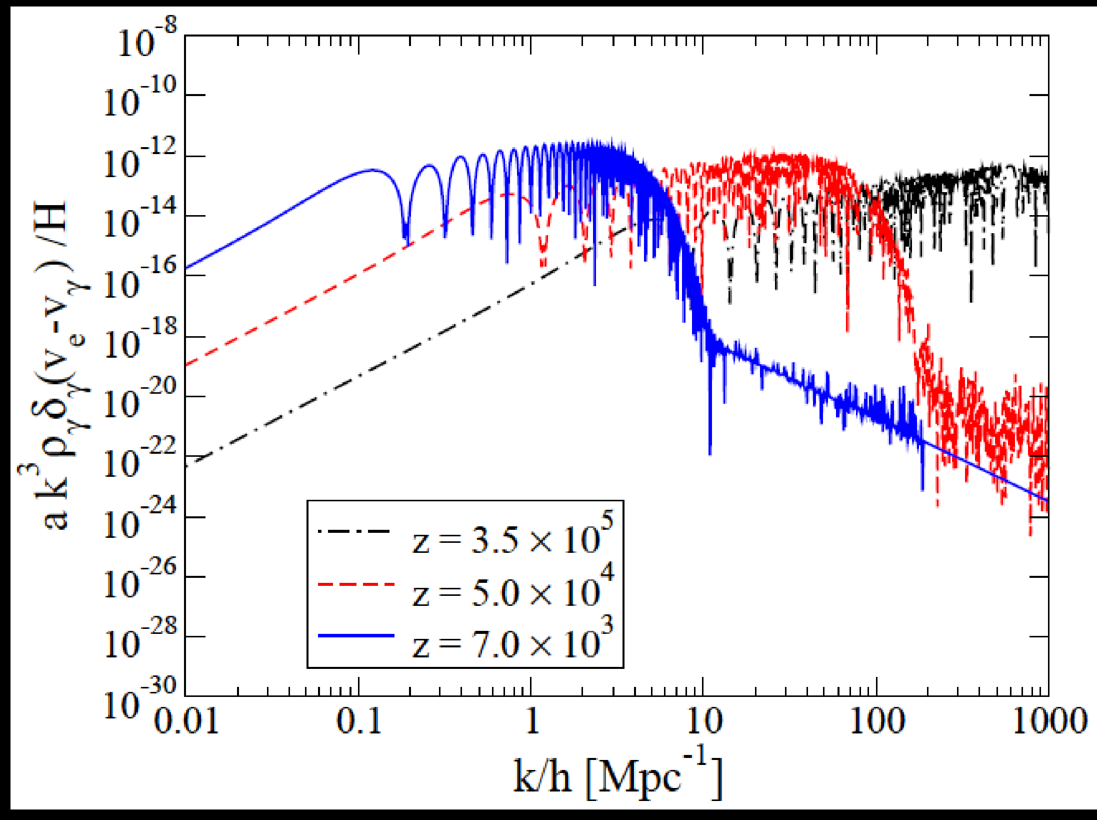
基本的なアイデア

ＣＭＢゆらぎ

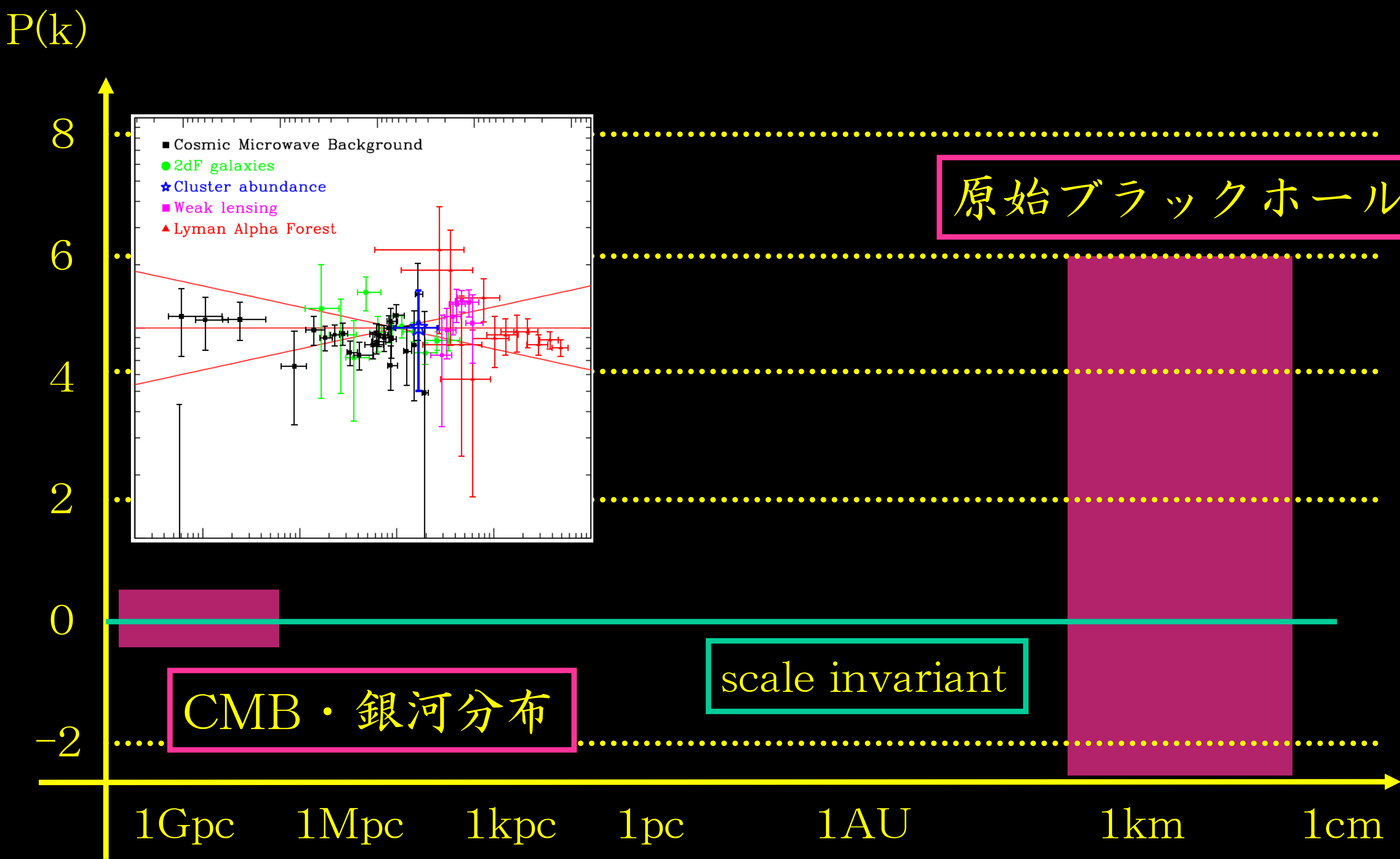
- decouplingのときのsnap shot
- 小スケールではSilk dampingでかき消される

磁場・重力波

- snap shotの積分
- 散逸はあまり効かず、小スケールまで磁場はそのまま残る
  → 小スケール観測が可能

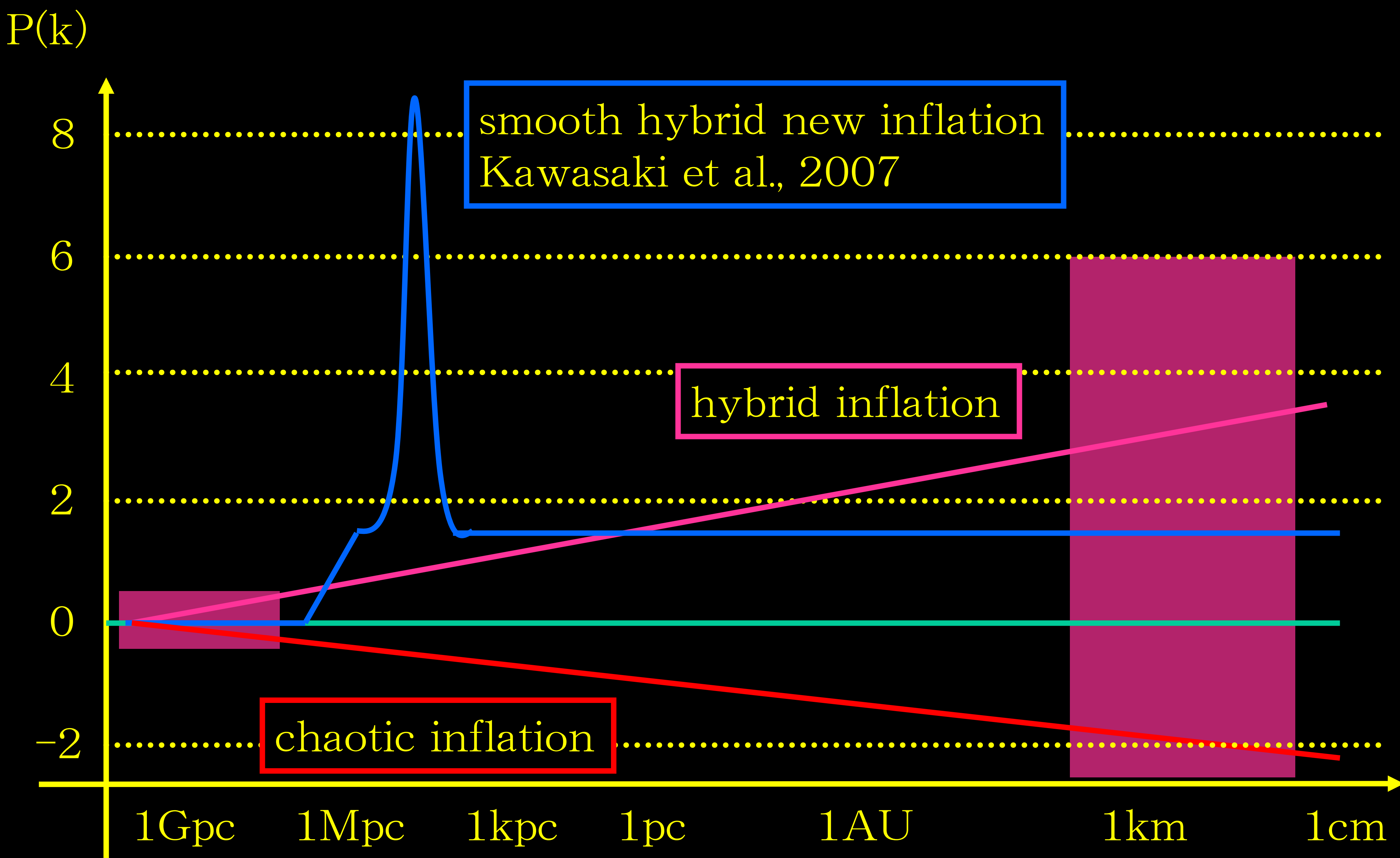


現在のゆらぎへの制限

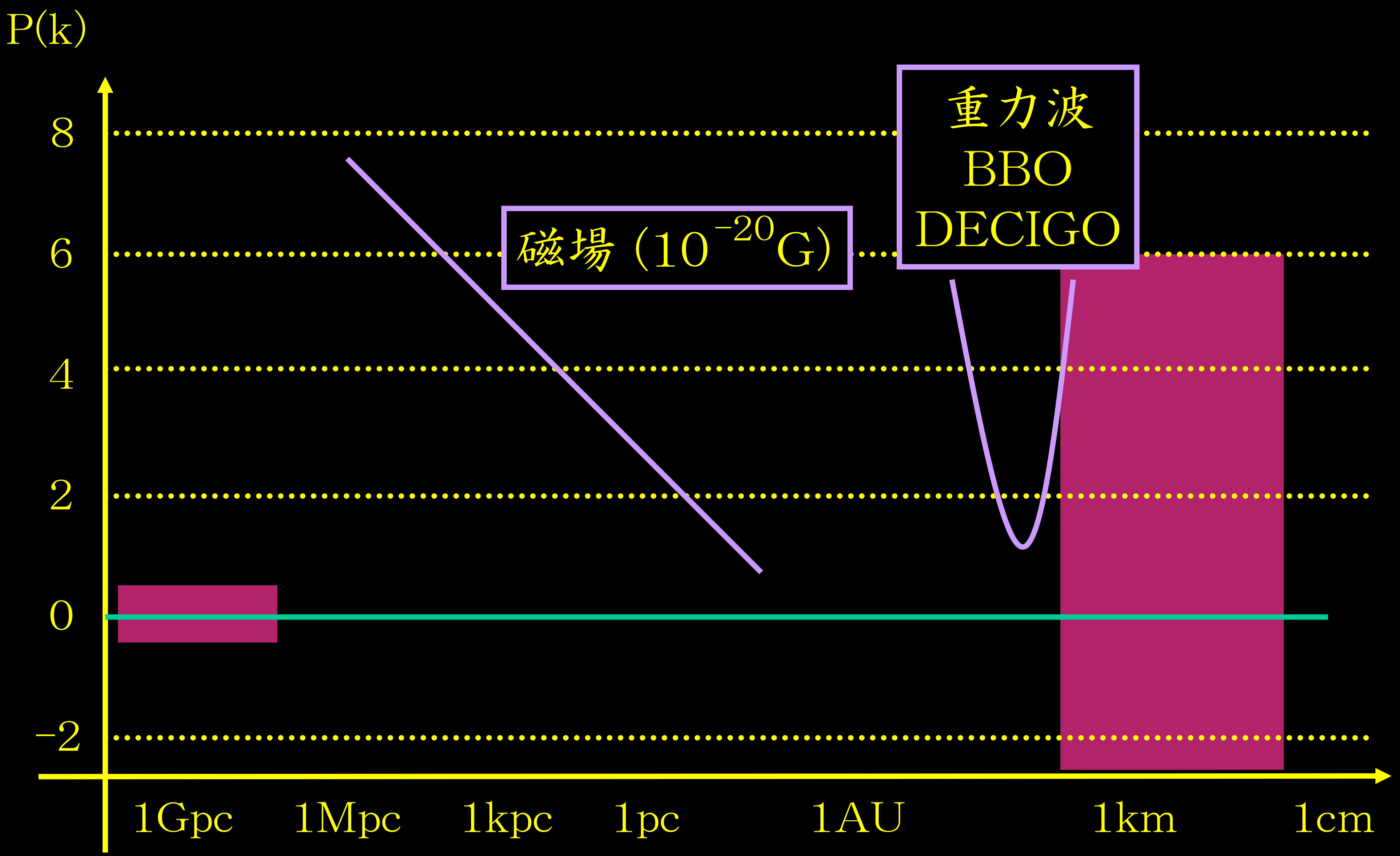


P(k)
8
6
4
2
0
−2
Cosmic Microwave Background
2dF galaxies
Cluster abundance
Weak lensing
Lyman Alpha Forest
原始ブラックホール
CMB・銀河分布
scale invariant
1Gpc
1Mpc
1kpc
1pc
1AU
1km
1cm

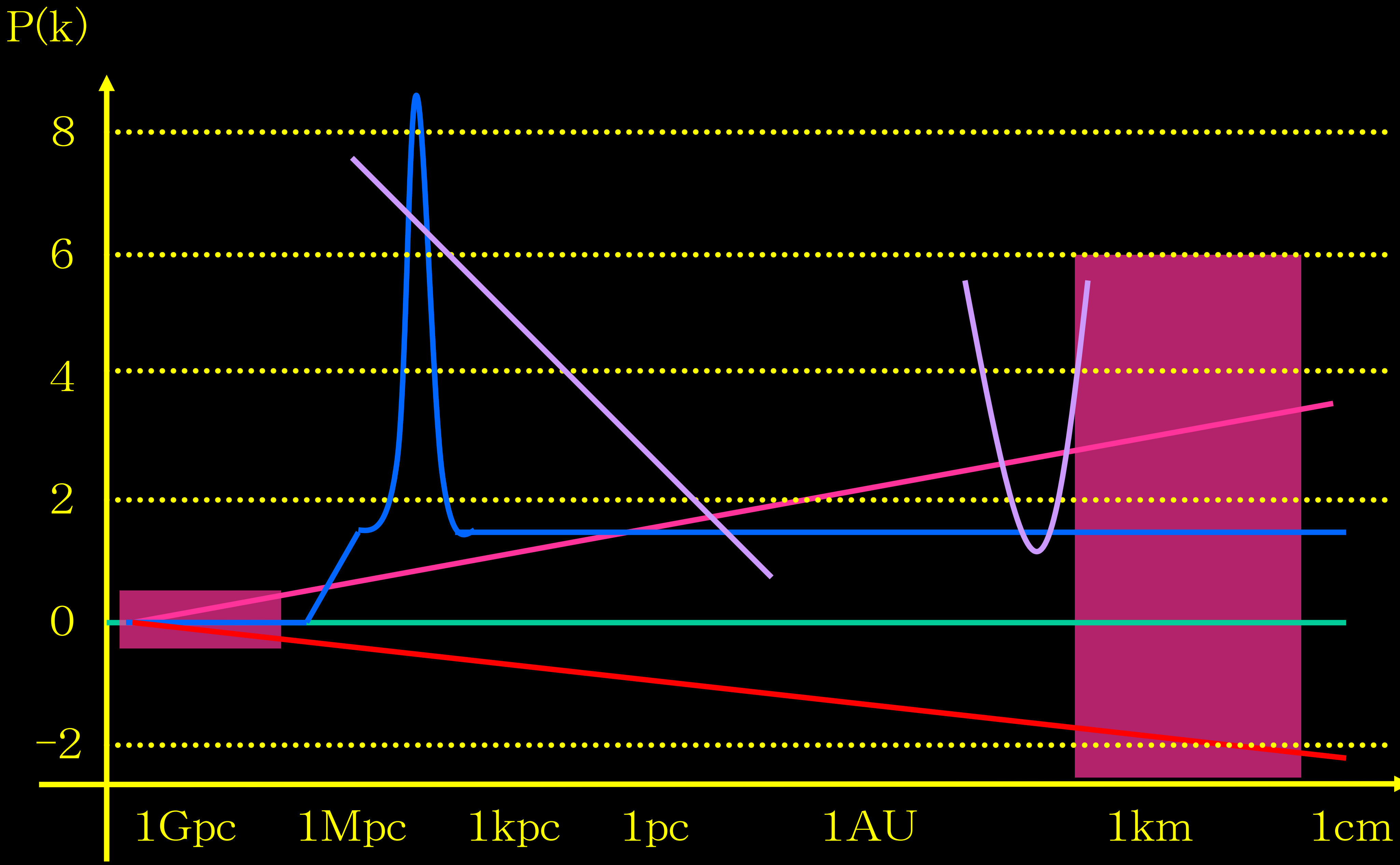
様々なインフレーションモデル



ゆらぎへの制限（超楽観的）



インフレーションモデルへの制限



まとめ

・高エネルギー天体からの遅延光子を使って微弱な磁場を観測
・モンテカルロをやる
→　カンガルーとかGLASTにお願いに行く
・２次スペクトルは１次スペクトルに強く依存
・磁場と重力波はかなり小さなスケールの観測が原理的には可能
・Plagaの方法による磁場観測 ～ 数年？
・重力波の直接観測 ～ 数十年？数百年？

こんな小スケールの情報は他では得られないのでやる価値はある（と思う）

７、まとめ

まとめ

１、初期宇宙プラズマのゆらぎによる磁場の生成
- 宇宙論的摂動２次
- トムソン強結合近似２次

２、磁場だけでなく他の電磁気的性質を求める
- クーロン強結合パラメータよりさらに suppressされる

３、高エネルギー天体による弱い磁場の測定
- まず方法論の確立をめざす

４、２次摂動によって１次摂動を探りたい
- 小スケールを探る貴重な方法

終了