

また盛り上がってきた
cosmic string

高橋慶太郎

2009年1月22日@ATセミナー

arXiv:0811.4698

with 成子・山内・柳・仙洞田・佐々木

概要

- cosmic stringの研究はまた最近盛り上がりつつある
- cosmic stringによるCMBのゆらぎを簡単に計算する formalismを構築
- とりあえず1点関数を計算し non-Gaussianityを議論

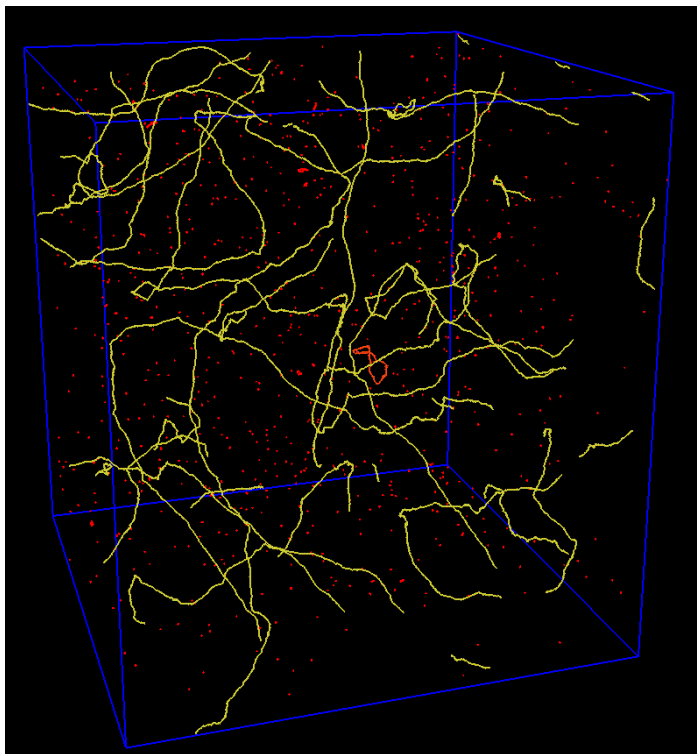
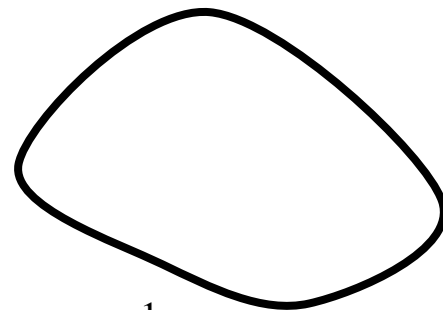
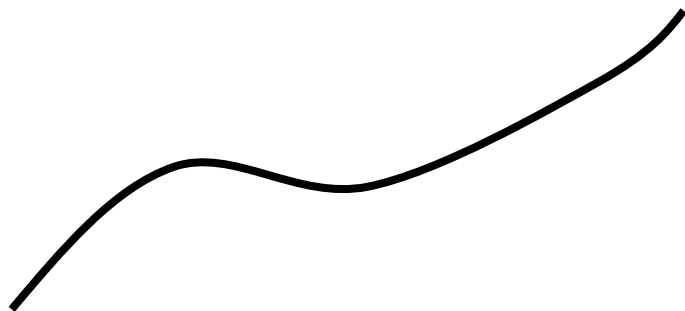
目次

- 1、cosmic stringの基礎
- 2、イントロダクション
- 3、cosmic stringとCMB
- 4、cosmic stringと
cosmic superstring
- 5、CMBゆらぎの再結合確率
依存性

1、cosmic stringの基礎

cosmic string

すごく細くて重くて長くて速いひも



$$\lambda = 10^{-30} \text{ cm} \left(\frac{G\mu}{10^{-7}} \right)^{-1}$$

$$\sigma = 10^{21} \text{ g/cm} \left(\frac{G\mu}{10^{-7}} \right)$$

$$m = 10^{12} M_{\text{sun}} \left(\frac{G\mu}{10^{-7}} \right) \left(\frac{L}{1\text{Mpc}} \right)$$

- こういうひもが存在する可能性
- 存在したら宇宙論的な影響は？
- どうやったら観測検証できる？

素粒子の標準模型



物質粒子

力を伝える粒子

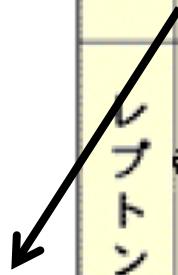
	第1世代	第2世代	第3世代
クォーク	u アップ	c チャーム	t トップ
	d ダウン	s ストレンジ	b ボトム
レプトン	ν_e 電子ニュートリノ	ν_μ μニュートリノ	ν_τ τニュートリノ
	e 電子	μ ミューオン	τ タウ

強い相互作用 g グルーオン
電磁相互作用 γ 光子
弱い相互作用 W⁺ W⁻ Z Wボゾン Zボゾン

+重力で
4種類の
相互作用が
存在する。

質量を与える粒子
(未発見)

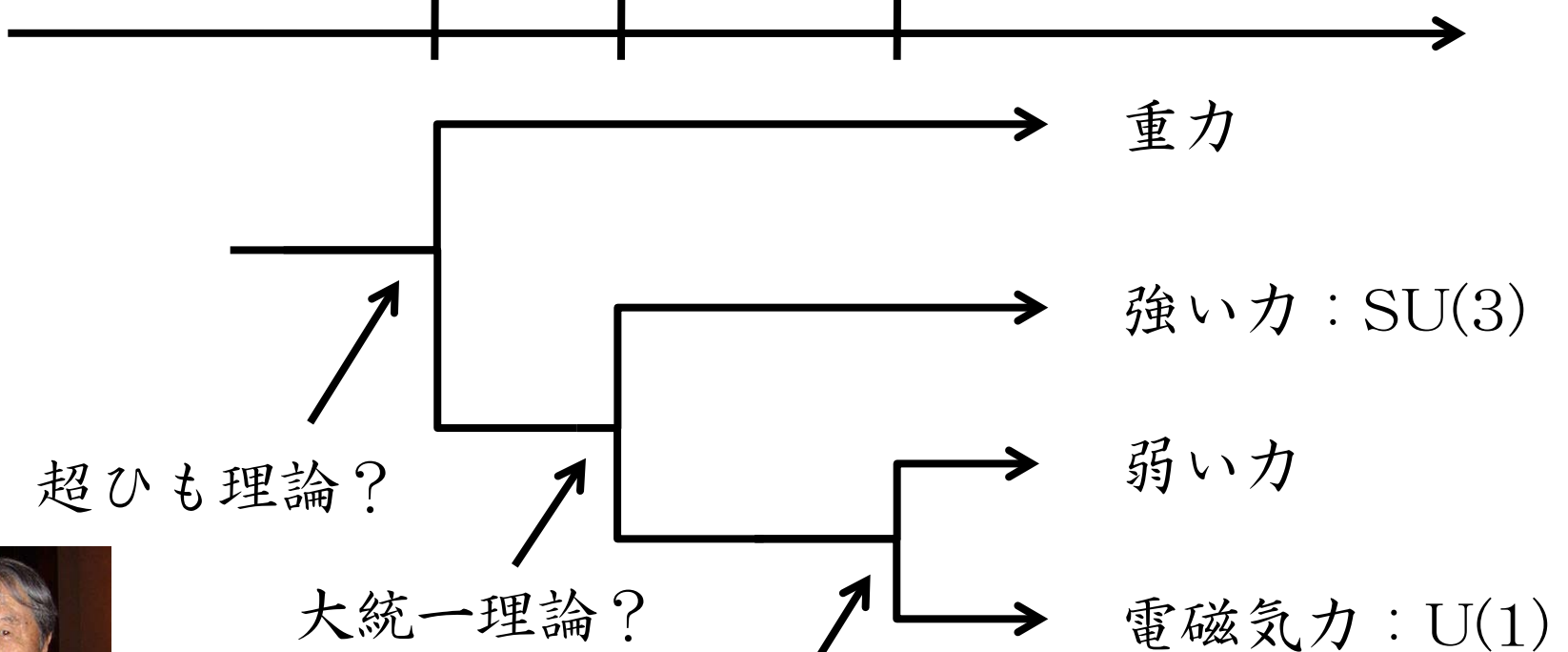
H ? ? . . . ヒッグス粒子 ヒッグス粒子 ヒッグス粒子
--



力の統一理論

もっとシンプルな枠組みで素粒子現象を説明したい

10^{19} GeV 10^{16} GeV 100 GeV



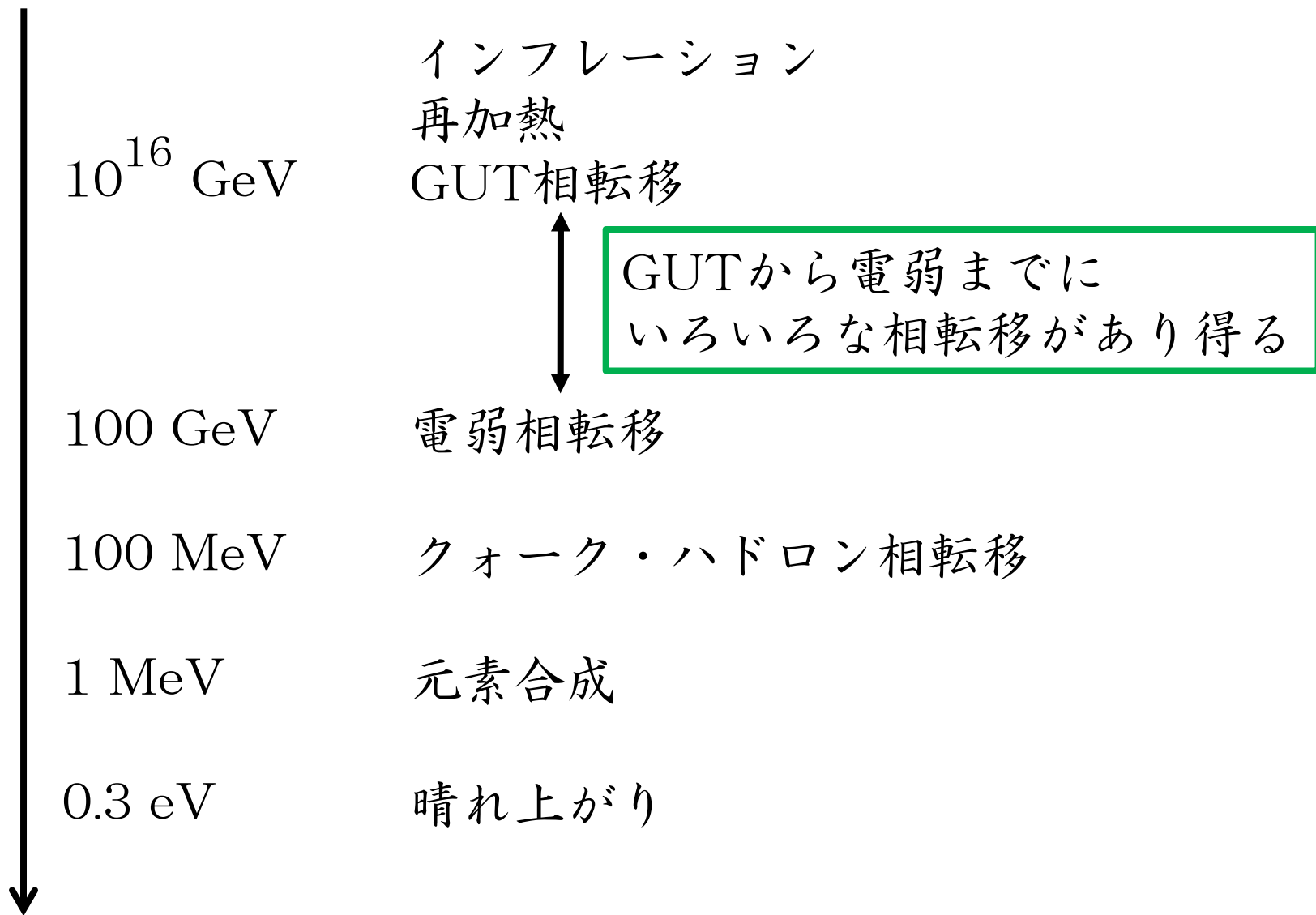
超ひも理論?

大統一理論?
SU(5)? SO(10)?

電弱統一理論
SU(2) × U(1)



宇宙の熱史



自発的対称性の破れ

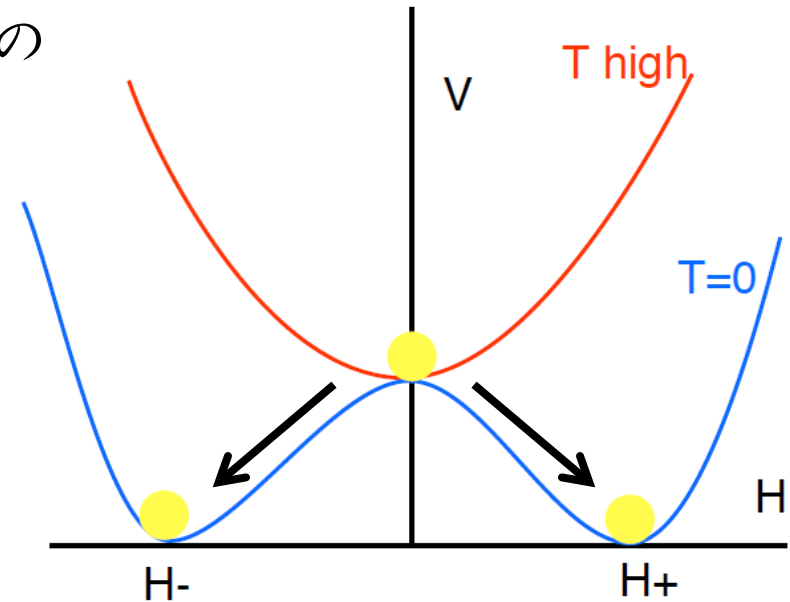


スカラー場（ヒッグス粒子）のポテンシャル

- ・ 高温では真空（基底状態）は $H = 0$
- ・ 低温になると有限の H （2つ）が真空
- ・ 正負対称

ところが低温になってどちらかの真空に落ちてしまうと、そのまわりで対称性はなくなってしまう。

→ 自発的対称性の破れ



どういうdefectができるかは真空の構造による

topological defect

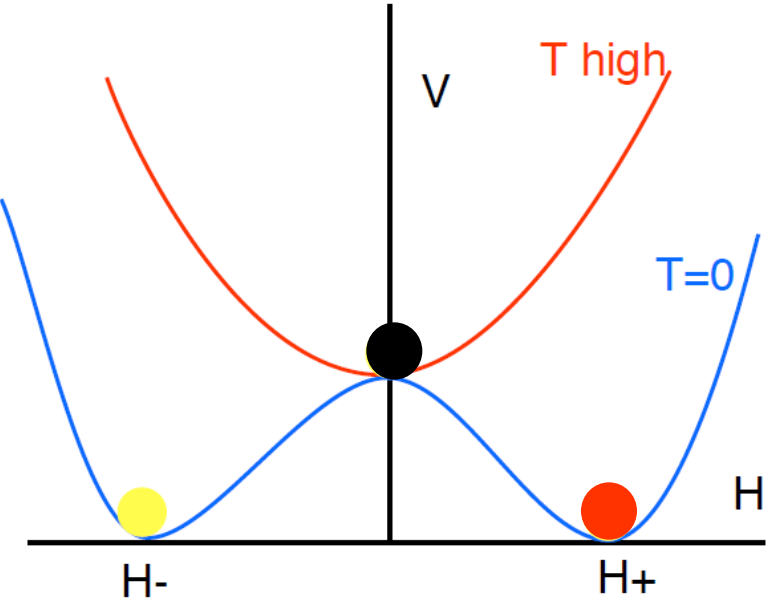
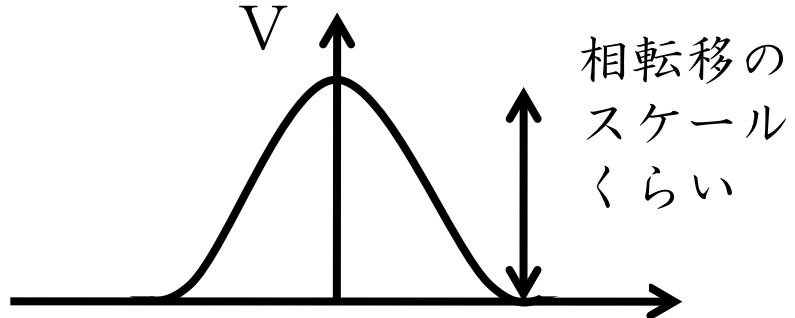
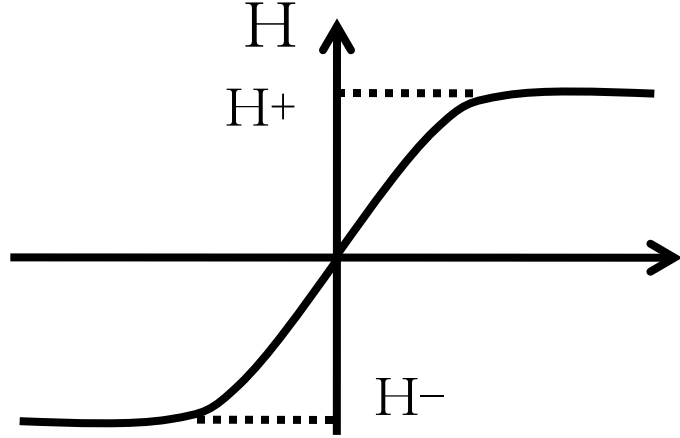
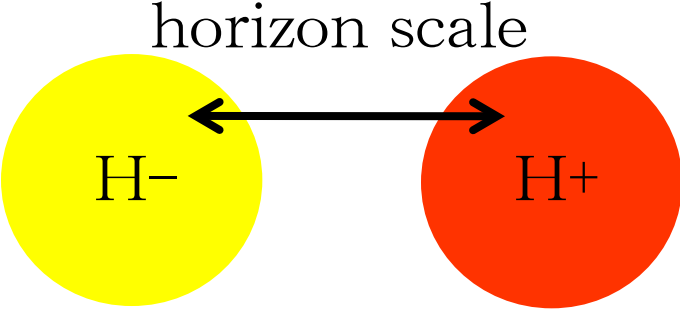
対称性が破れるとき
topological defectが
できることがある。

因果律 + 場の連続性

→ 真空に落ちられない場所

→ topological defect

練習：domain wall

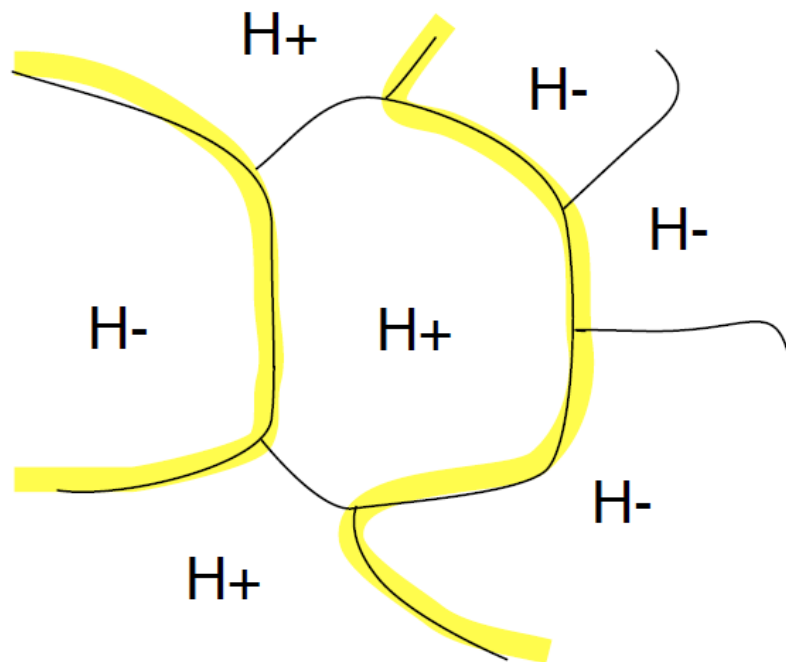


domain wall

宇宙の様々なところで
大スケールではランダムに
小スケールでは連続に
相転移する。

→ domain wall network

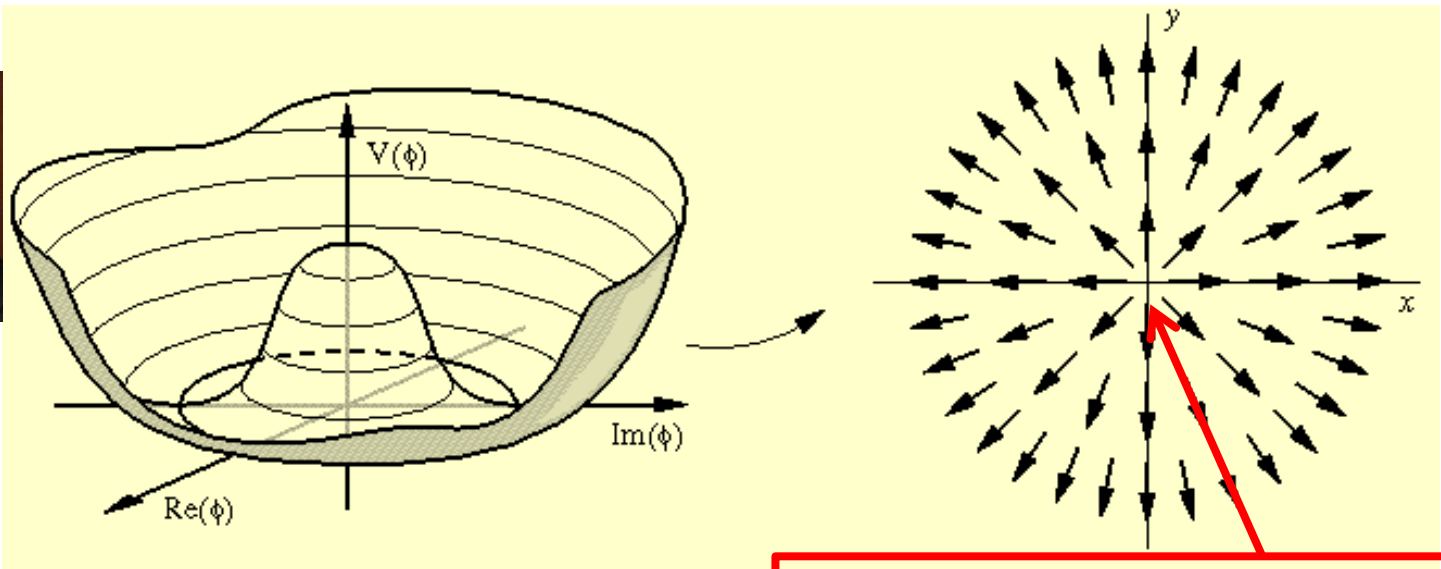
- だいたいhorizonに1枚
- horizonスケールで真っすぐ
- 重さは相転移のエネルギー
スケールで決まる



これが一番単純なtopological defect

cosmic string

複素場で真空が円状



この辺が真空に落ちていない
→ cosmic string!

cosmic stringは

$$\mu = \text{線密度} = \text{張力 (tension)} \sim M_{\text{PT}}^2$$

で特徴付けられる。GUTだと $G\mu \sim M_{\text{PT}}^2/M_{\text{PL}}^2 \sim 10^{-6}$

cosmic stringの宇宙論的効果の大きさは $G\mu$ で決まる。

topological defectまとめ

相転移前と後の対称性（真空の構造）によって
いろいろなtopological defectができたり

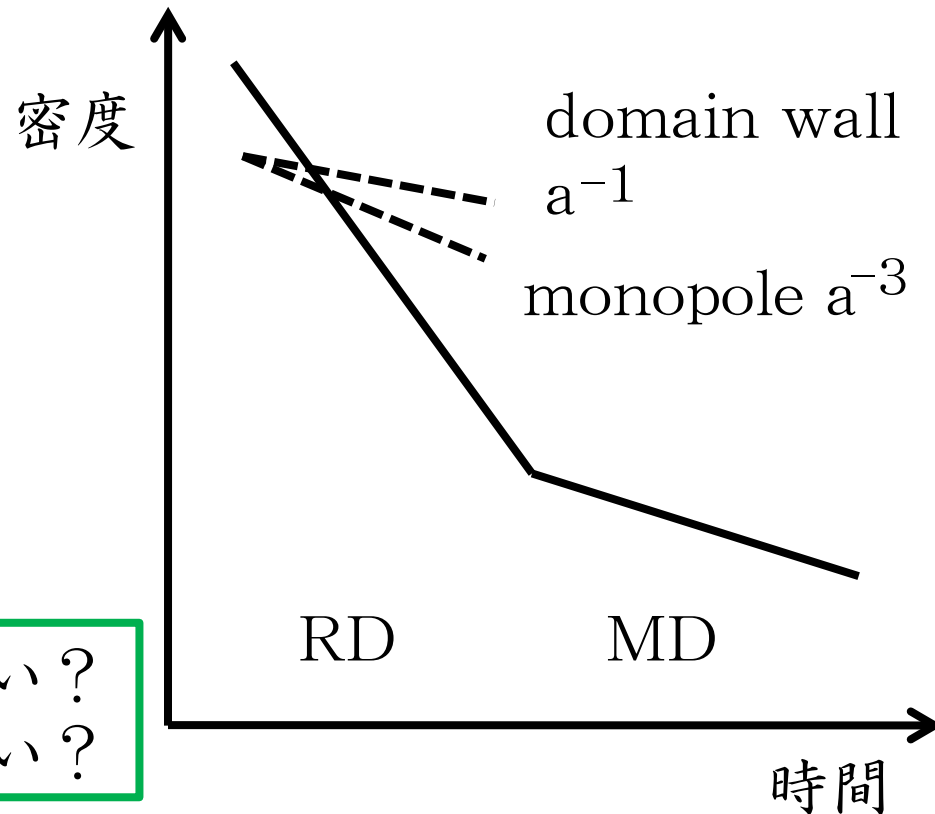
できなかったりする。 $\pi_k(G/H)$

- monopole → 否定
- cosmic string
- domain wall → 否定

大統一理論がまだ完成して
いないので実際の宇宙で
どういものが生成された
のかわからない。

しかし・・・。

cosmic stringはすぐ否定されない？
特殊な場合でないと生成されない？



cosmic stringのdynamics①

粒子のworld line

$$X^\mu = X^\mu(t)$$

粒子はworld lineが最も短くなるように運動する

$$S = -m \int dt \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{dt} \frac{dX^\nu}{dt}}$$

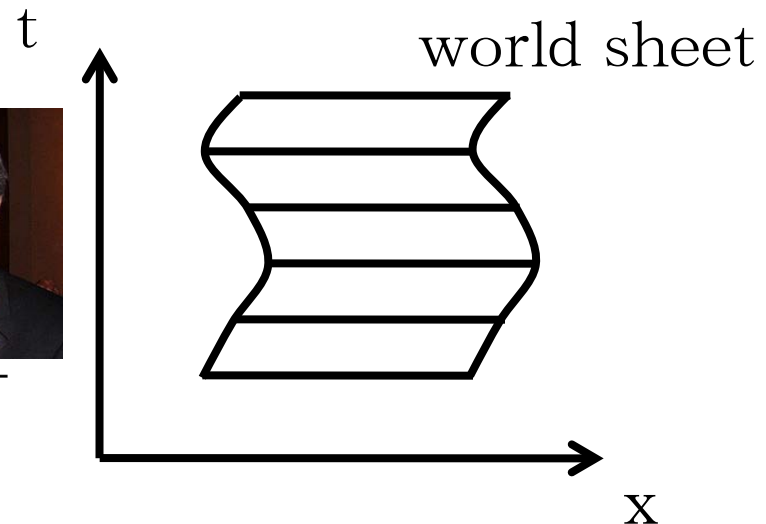
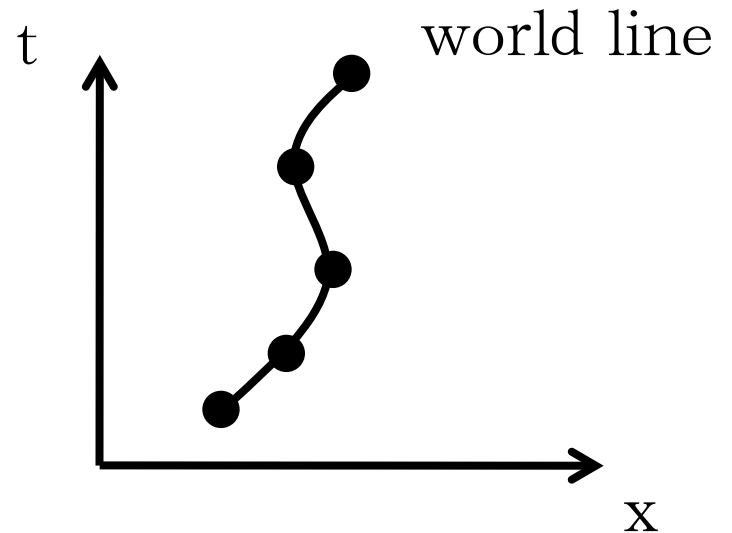
stringのworld sheet

$$X^\mu = X^\mu(t, \sigma) = X^\mu(\sigma_1, \sigma_2)$$

stringはworld sheetの面積が最も小さくなるように運動する

Nambu-Goto action

$$S = -\mu \int d^2\sigma \sqrt{\det \left[g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma_a} \frac{dX^\nu}{d\sigma_b} \right]}$$



cosmic stringのdynamics②

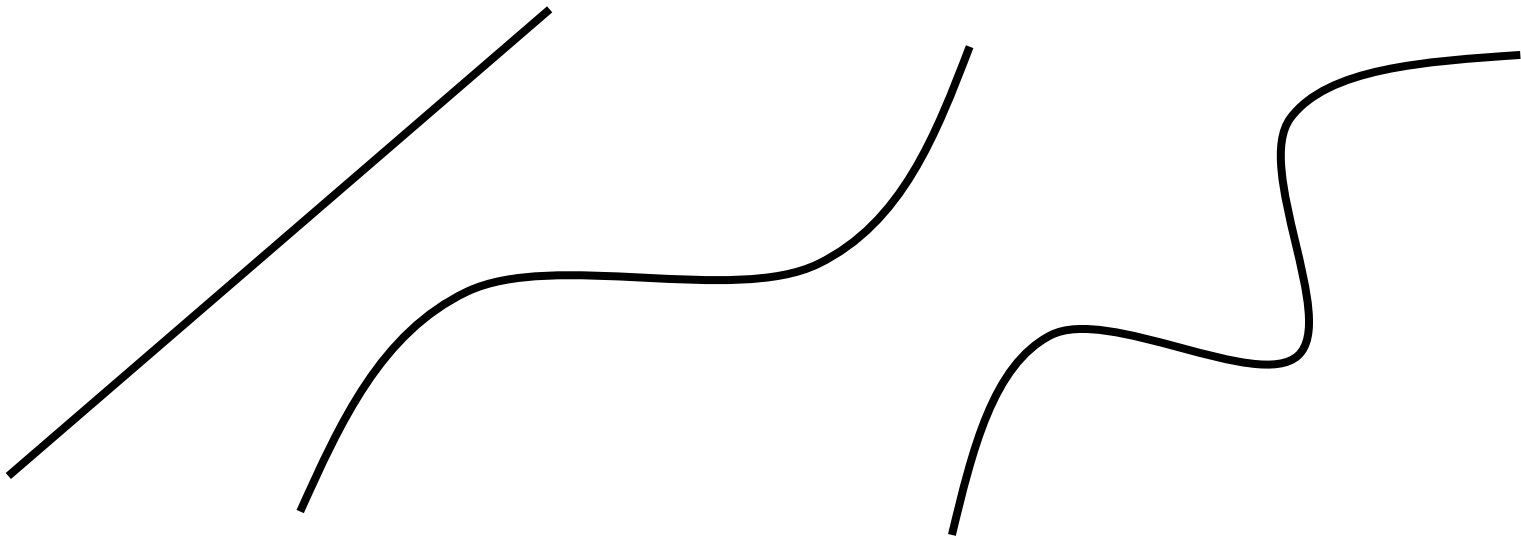
適当なゲージのもとで、波動方程式となる。

$$\ddot{\vec{X}} - \vec{X}'' = 0$$

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}' = 0$$

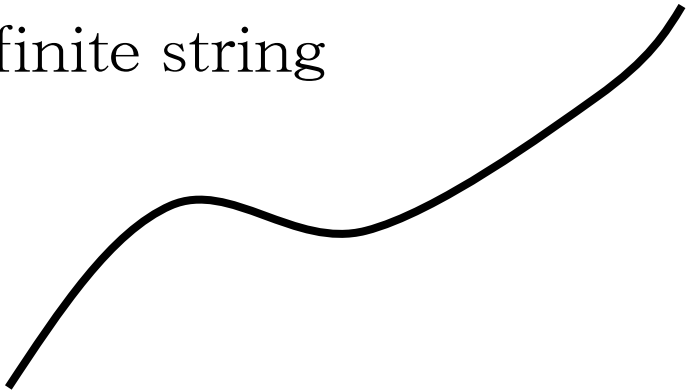
$$|\dot{\vec{X}}|^2 + |\vec{X}'|^2 = 1$$

重心運動のほか、
いろんなモードの
波が伝播する。

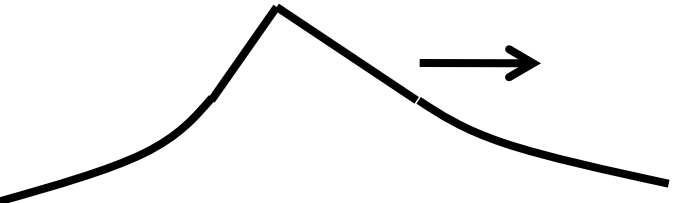


stringの形状

infinite string

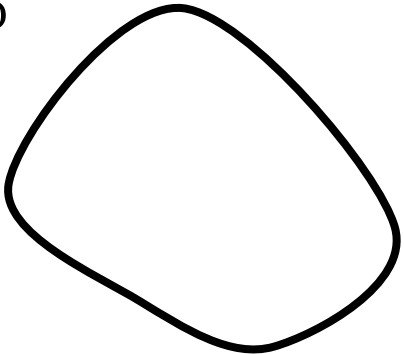


kink

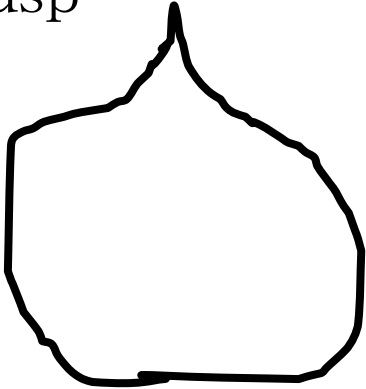


滑らかでない
パターンが光速で進む

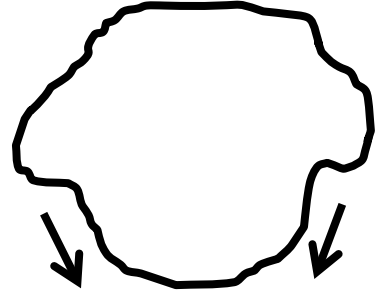
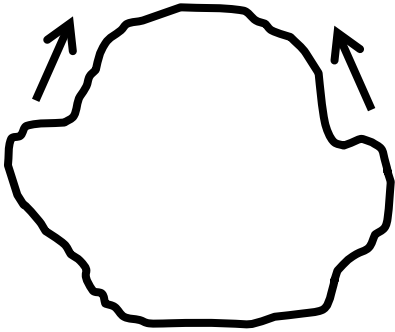
loop



cuspl

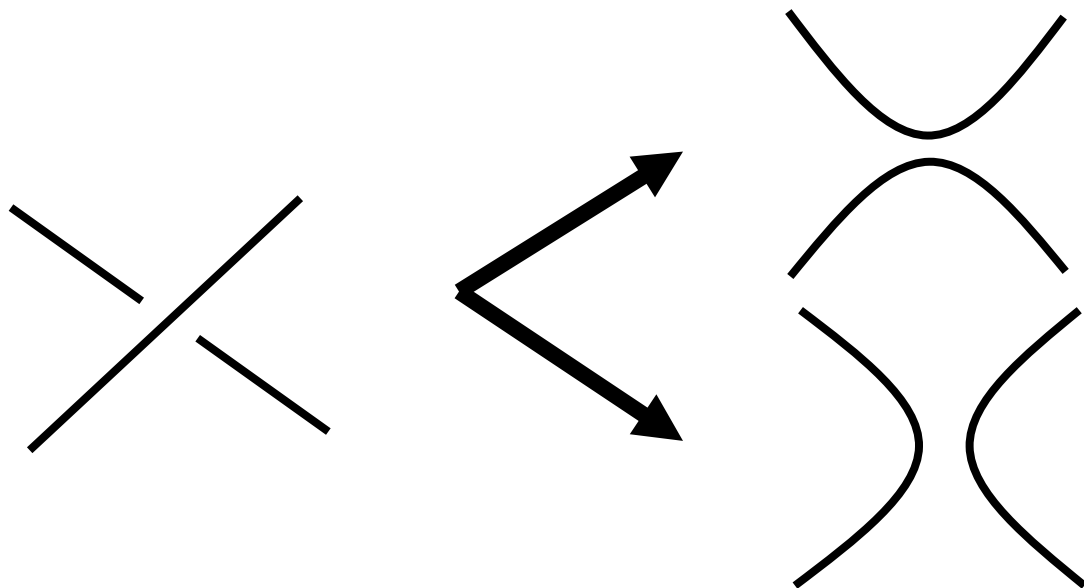


波がうまく
ぶつかると
滑らかでない
点が一瞬だけ
できる



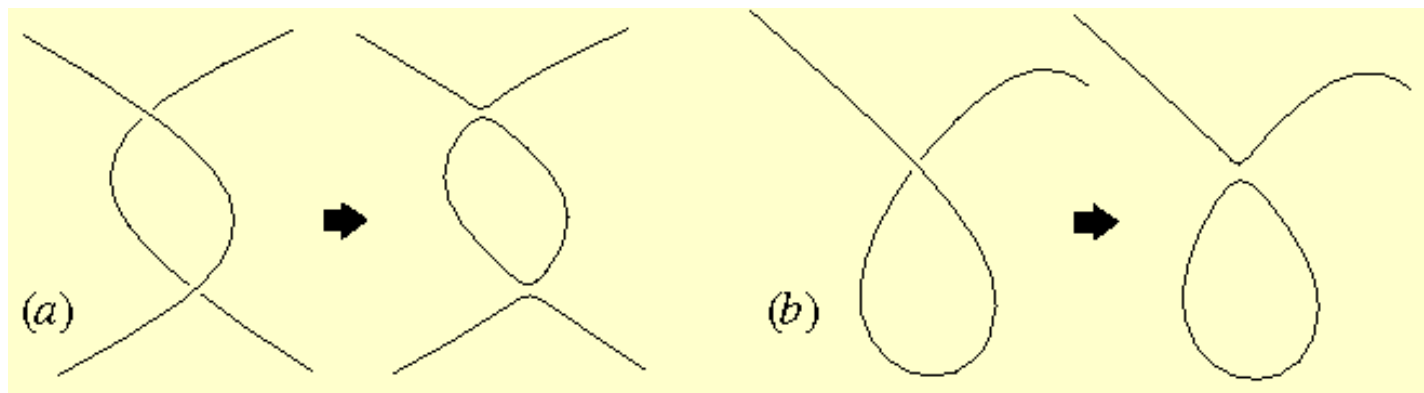
stringの再結合

string同士が衝突するとつなぎかえが起こる。

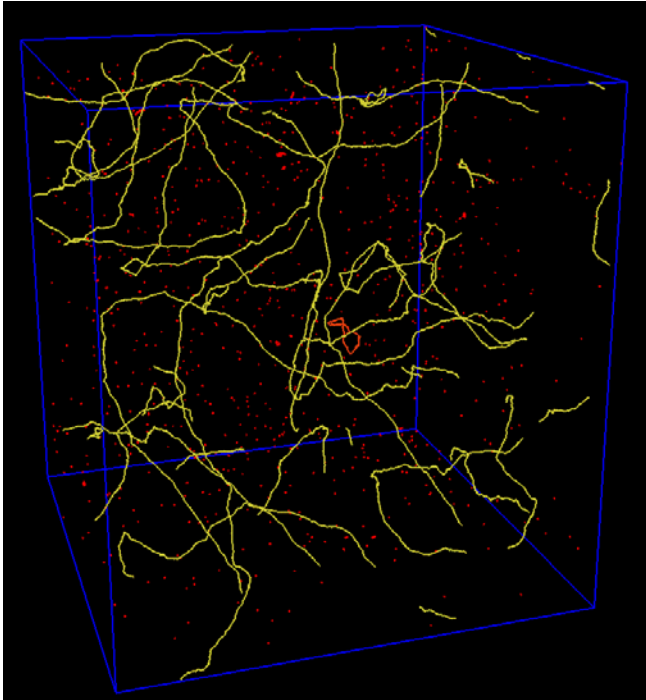


このとき
kinkが
できる。

うまくつなぎかわるとループができる。



cosmic string network



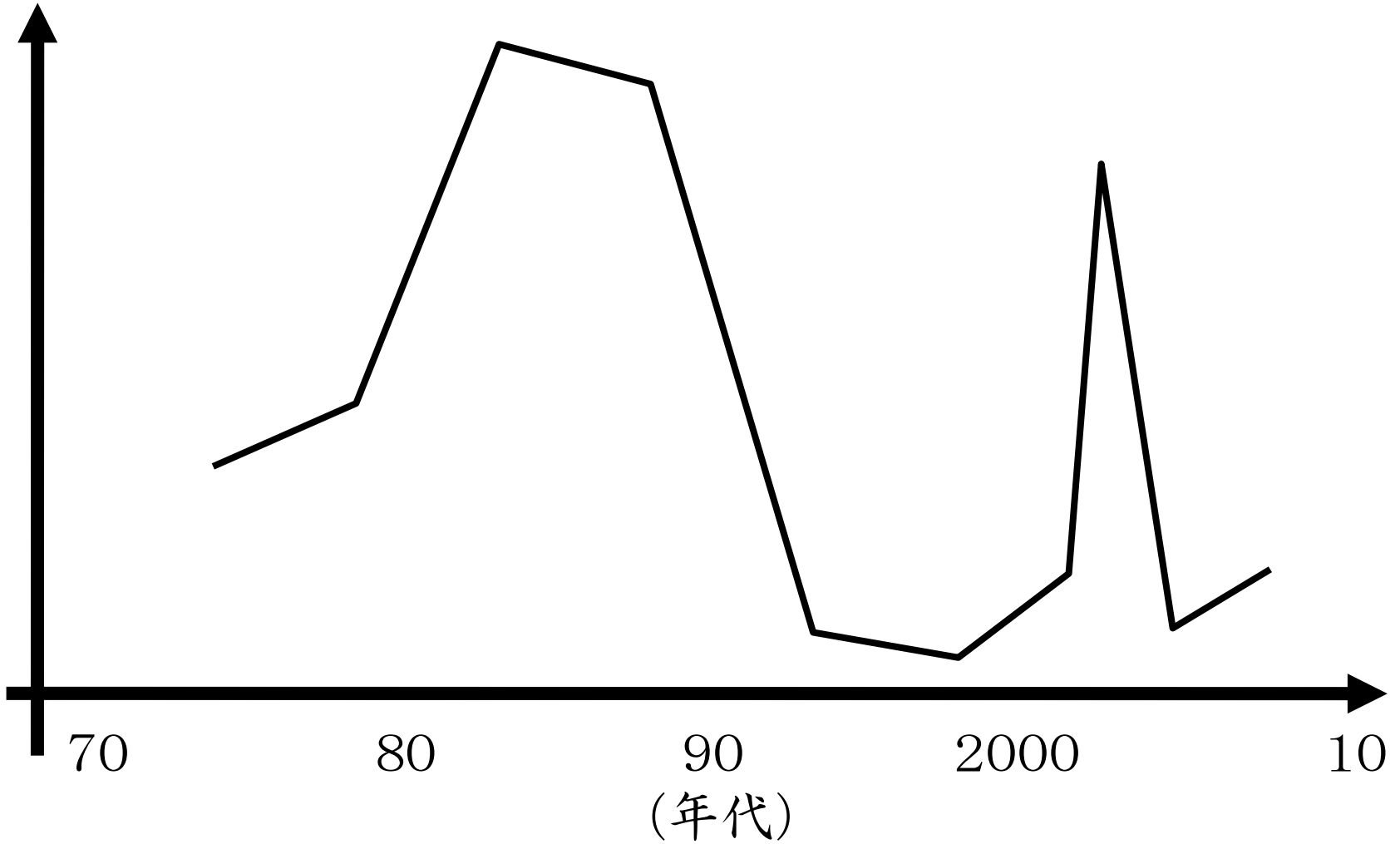
- 初期条件：horizonに1本
- 膨張宇宙で衝突を繰り返し
長い(infinite) stringとループの
ネットワークが形成される
- とても非線形なので大規模数値
シミュレーションか、簡単な
解析的モデルで調べる

こんなのがあったら宇宙はどうなるか？

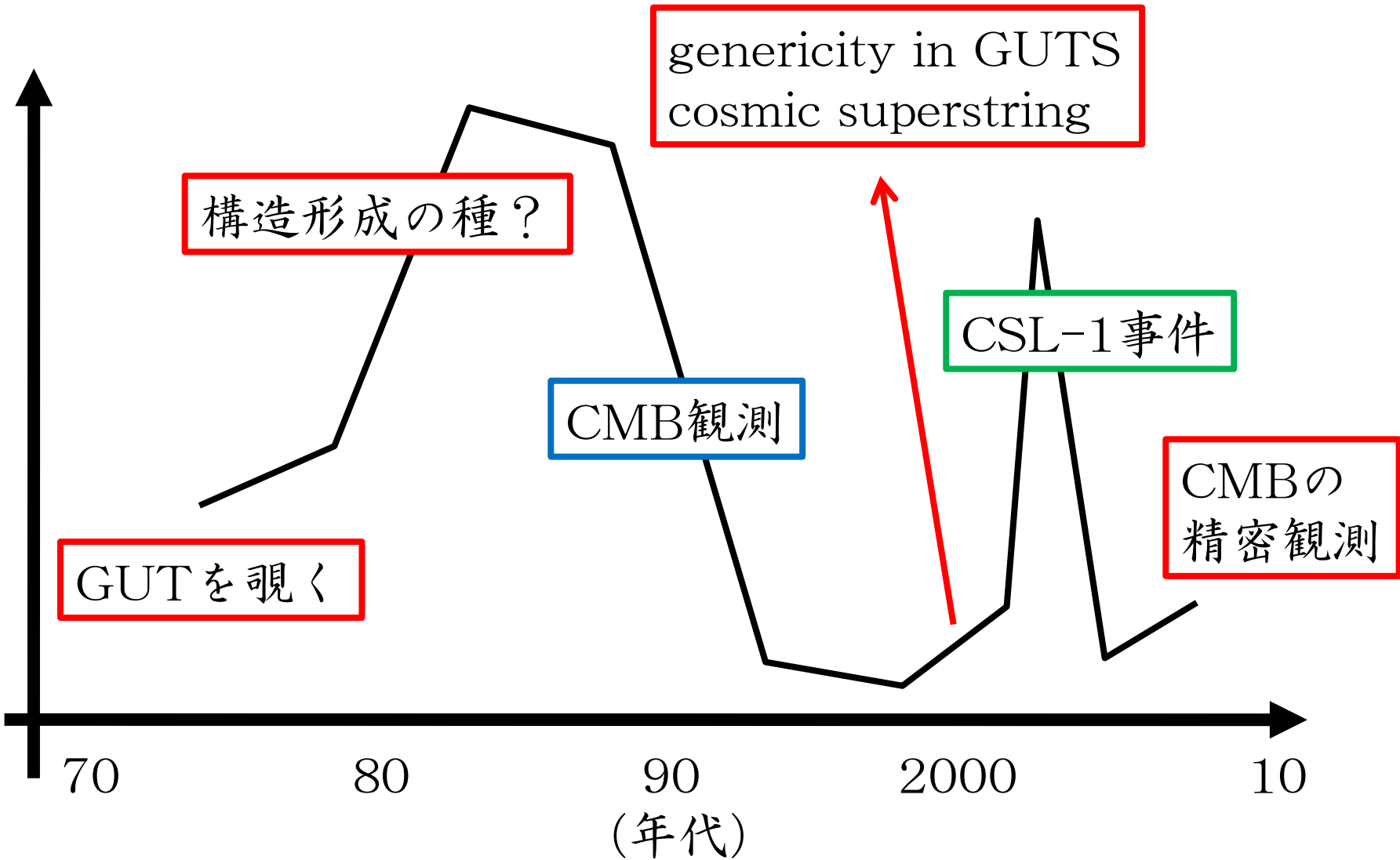
2、イントロダクション

cosmic stringの栄枯盛衰

盛り上がり

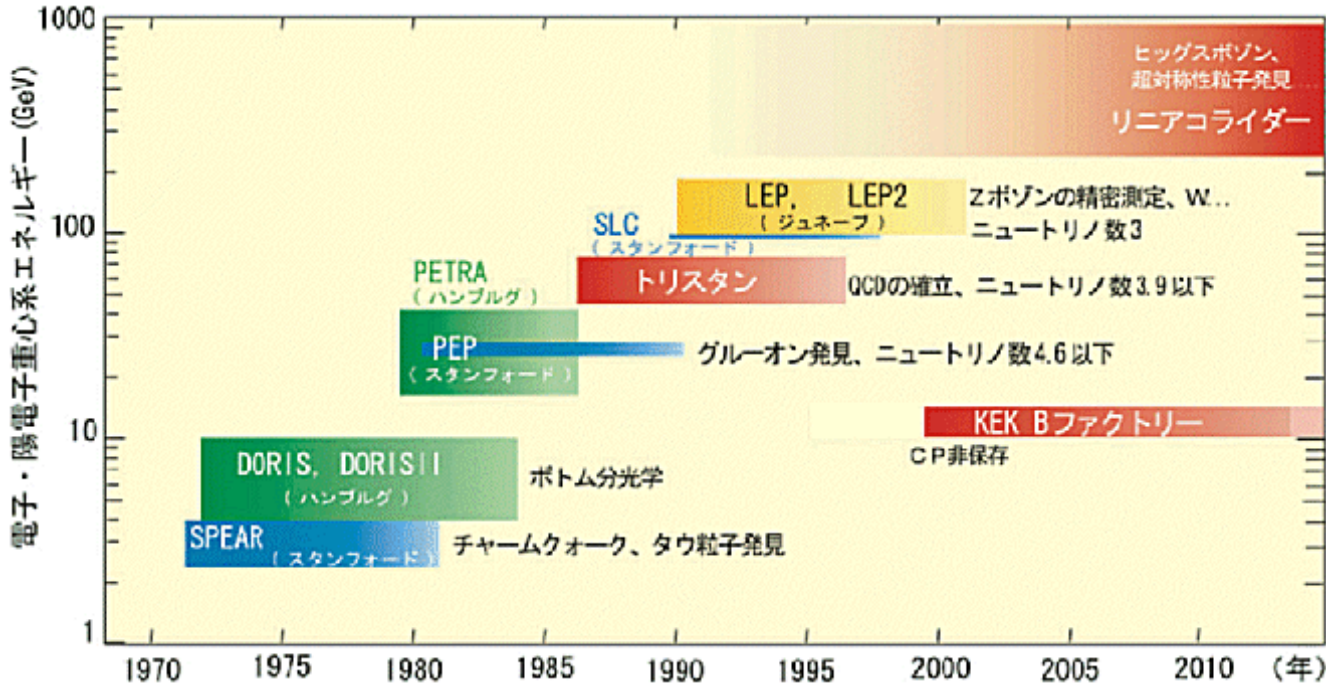
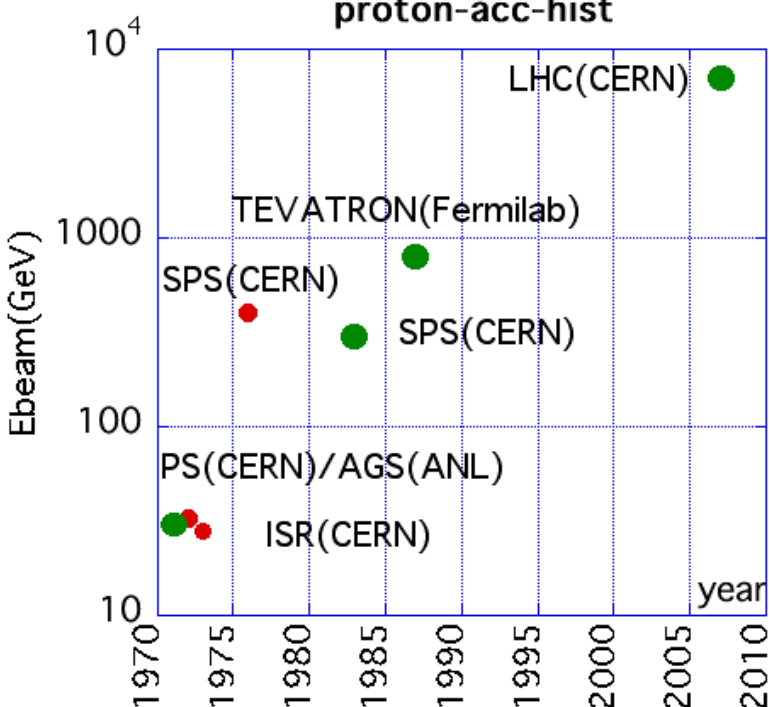


cosmic stringの栄枯盛衰



GUTを覗く

GUTのエネルギースケール
 $\sim 10^{16}$ GeV
 なんて実験では到底到達
 できない。



cosmic stringによる構造形成①

cosmic stringがぐちゃぐちゃ動くと物質にもゆらぎができる。
→ インフレーションの対抗馬として注目される

- CMB

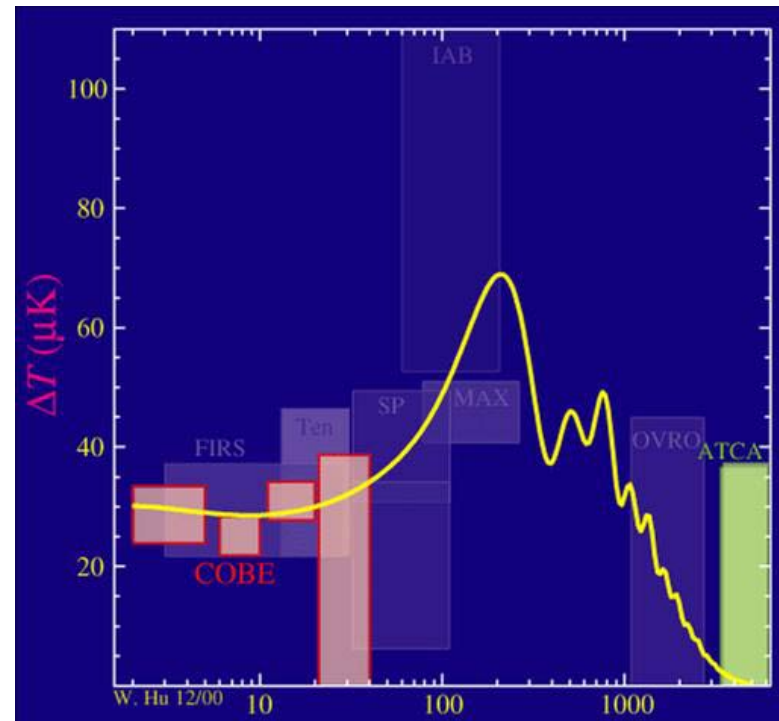
GUTスケールのstringだと

$$\frac{\Delta T}{T} \approx G\mu \approx \left(\frac{10^{16} \text{ GeV}}{10^{19} \text{ GeV}} \right)^2 \approx 10^{-6}$$

オーダーとしてはなかなかよい。

- 銀河

ループにガスが降り積もってきて
銀河ができる。

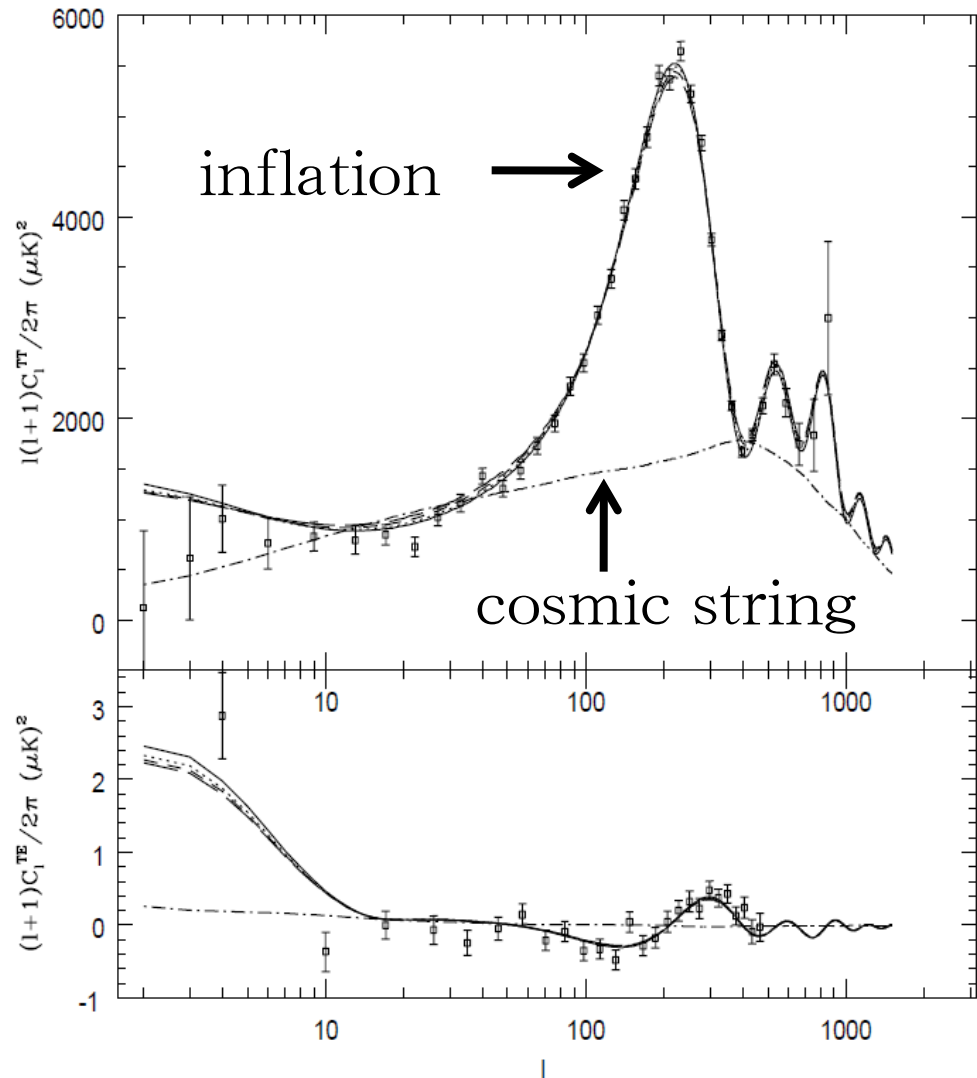


cosmic stringによる構造形成②

しかしCMBの精密観測によって否定される。

→ CMBゆらぎへの寄与は10%以下

パラメータが $G\mu$ しかなく、
予言能力があっけきちんと
否定されたよいサイエンス



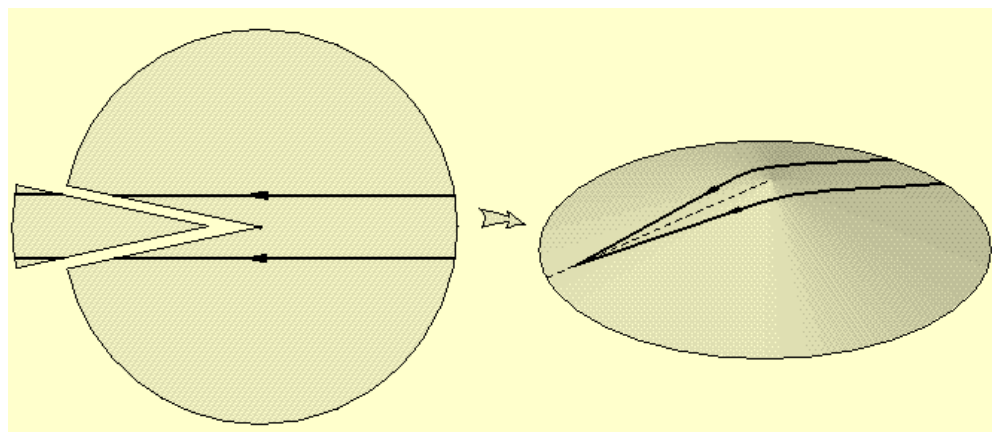
cosmic string探索

重力レンズ

deficit angle

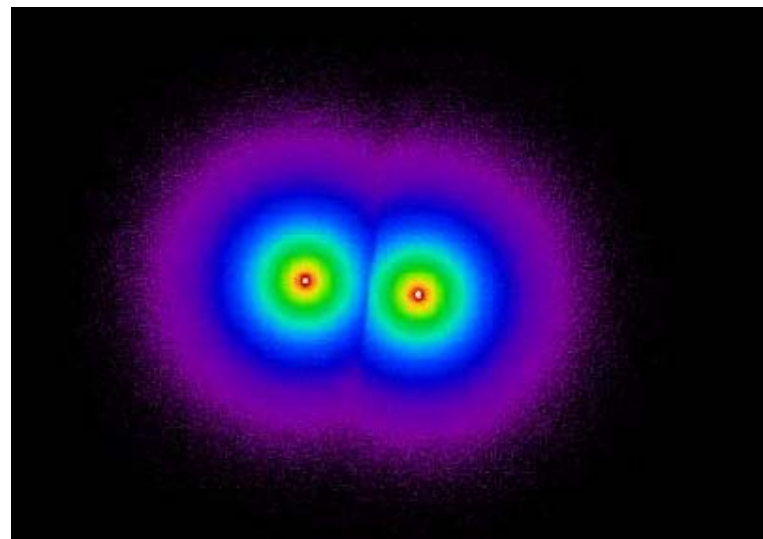
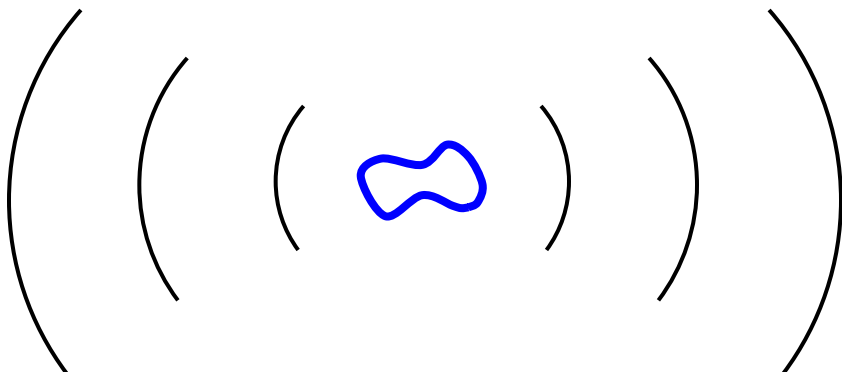
- 特徴的な重力レンズ
- 今のところ見つからない

Christiansen et al. 2008



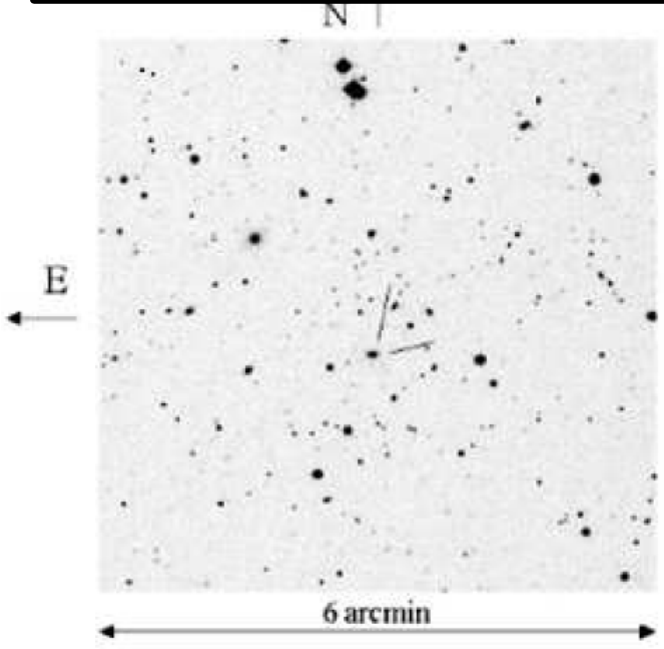
重力波

- loopからよく放出される
- pulsar timingから制限

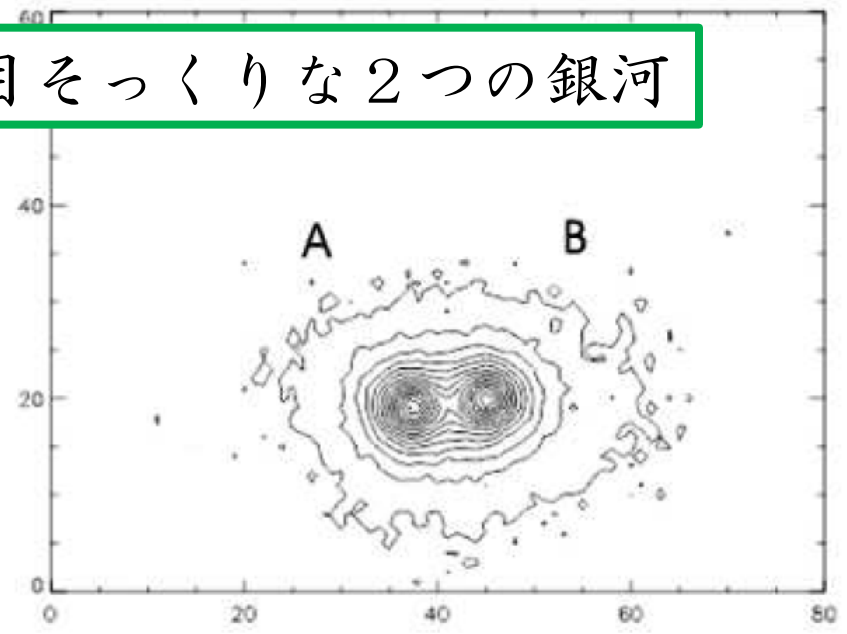
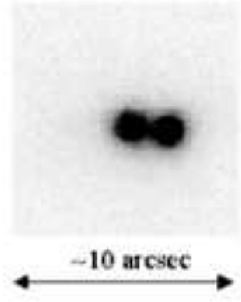


$$G\mu < 10^{-7}, \quad \Omega_{CS} < 0.01$$

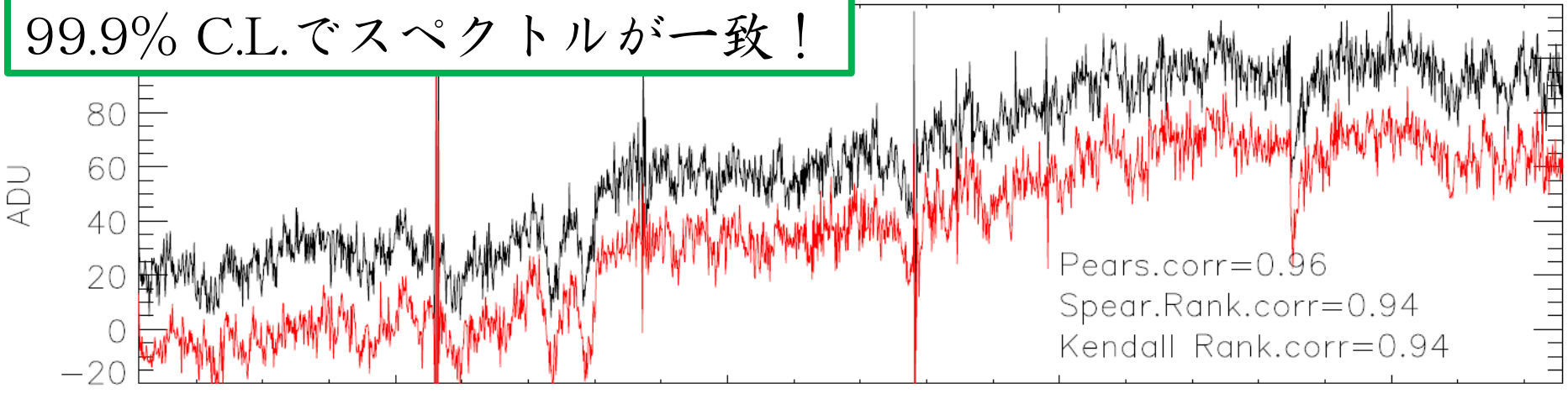
CSL-1事件 (Sazhin et al. 2003-2006)



見た目そっくりな2つの銀河



99.9% C.L.でスペクトルが一致！

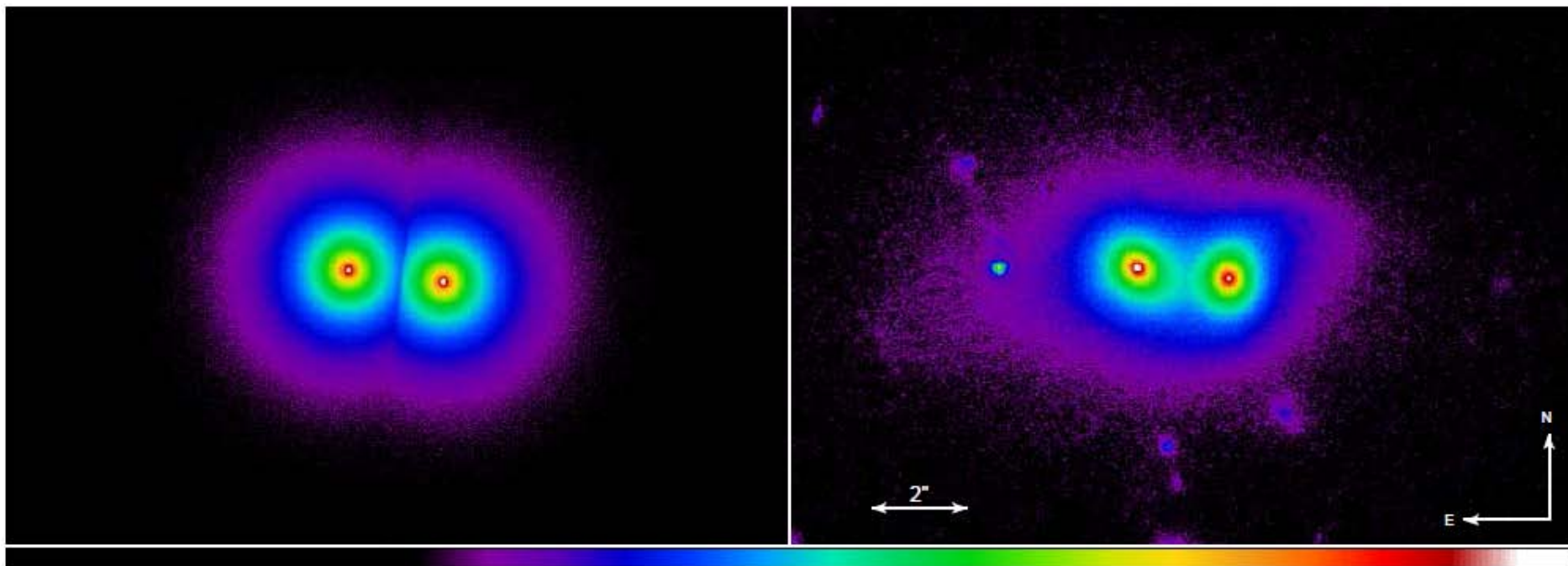


cosmic stringの発見か！？

CSL-1事件の結末

シミュレーション

HSTによる観測



よく似た銀河のbinaryでした・・・

最近の発展の背景：理論①

● genericity in SUSY GUTs (Jeannerot et al., 2003)

インフレーションの後に相転移が起きると、だいたい
どういうゲージ群から出発して、どんな風にSSBしても
cosmic string生成は避けられない。

- ・ 最終的にstandard modelになる
- ・ hybrid inflation
- ・ monopoleやdomain wallが生成されない
- ・ baryogenesis via leptogenesis
- ・ protonが安定
- ・ 群のrankが8以下

$$\begin{aligned} \text{SO}(10) &\rightarrow \text{SU}(4) \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \\ &\rightarrow \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \end{aligned}$$

$$\text{GUT群} \rightarrow \dots \rightarrow \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$$



monopole, cosmic string, domain wall形成

最近の発展の背景：理論②

●superstring

過去の議論：superstringはプランクスケール

- ・inflation前に生成されるだろうからinflationで薄まる
- ・そのような μ のcosmic stringはすでに観測的に棄却

→ cosmic stringとsuperstringは全く別物

ところが、ブレーンワールドモデルによって

superstringのスケールがもっと低くてもよくなった。

- ・ブレーンインフレーションモデルではよく生成される
- ・GUTスケールより低いスケールもあり得る
- ・F-stringとD-string
- ・GUTどころかsuperstringまで探索できる？

→ cosmic superstring!

GUT・superstringどちらにせよ素粒子論的には
cosmic stringの存在はわりと自然(?)

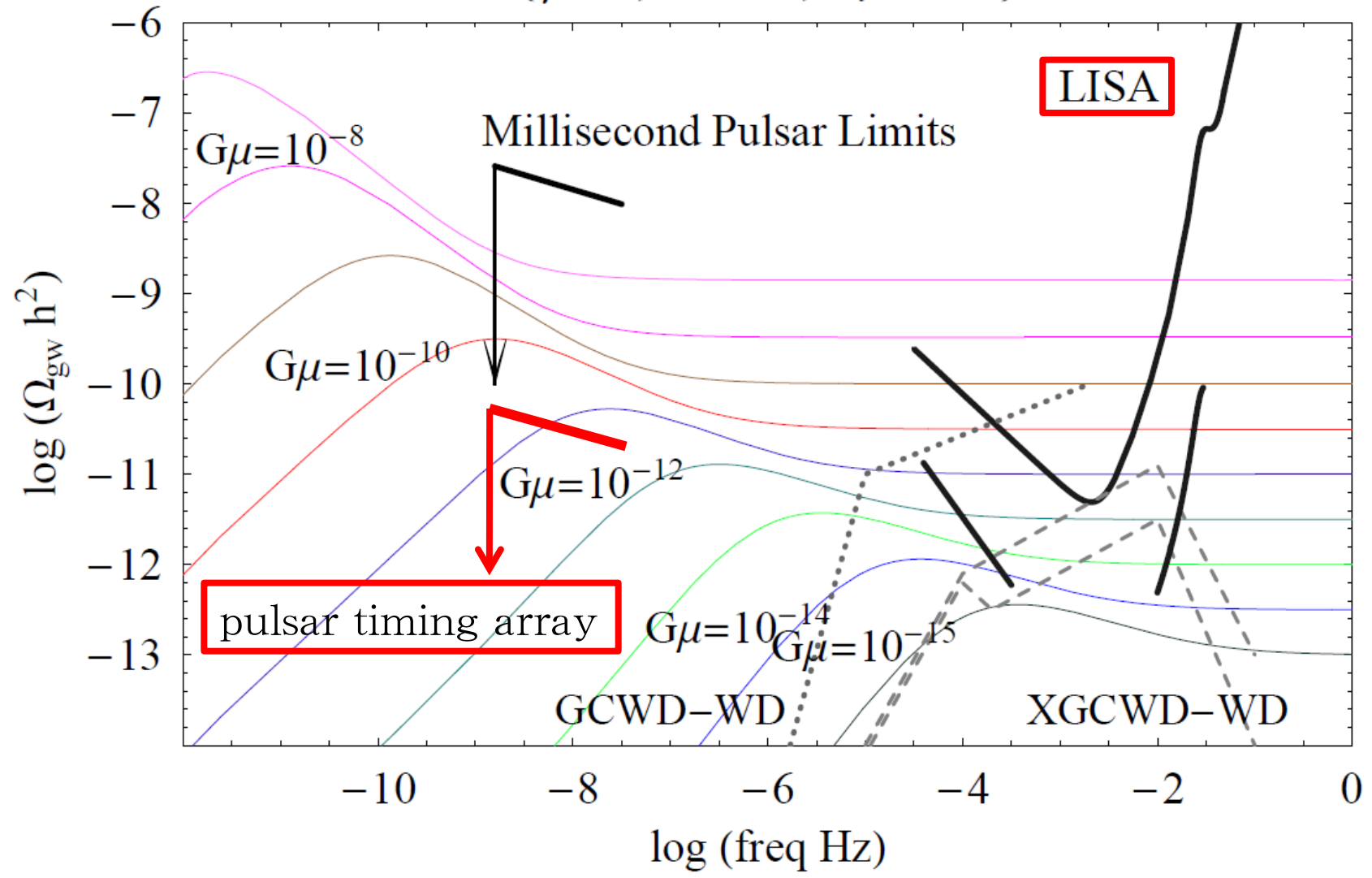
最近の発展の背景：観測

- CMB
 - 小スケール
 - Bモード
 - nonGaussianity
 - 重力波
 - 直接観測：LIGO, LISA, DECIGO . . .
 - pulsar timing array
 - 重力レンズ
- μ が小さくて大スケールの温度ゆらぎでは効かなくても
こういうものではcosmic stringが
dominantである可能性がある

観測技術の発達でより小さな μ まで探索できる

重力波

$\{\gamma=50, \alpha=10^{-5}, N_t=8.111\}$



やりたいこと

モチベーション

- cosmic stringは構造形成の種としては働かないが、理論的にはどうもあるっぽいので探したい
- 普通のcosmic stringとsuperstringを観測的に区別
- もっと小さな μ も視野に入れて
- これまでの研究は大規模なシミュレーションに基づいていたが、モデル化して解析的にできると便利だし理解も深まる

実際にやること

- string networkの解析的モデル
- CMBの小スケール温度ゆらぎの1点関数を計算、シミュレーションと比較
- 後々は2点関数、3点関数、偏光、重力波、weak lensing、micro lensingなども

3、cosmic string と CMB

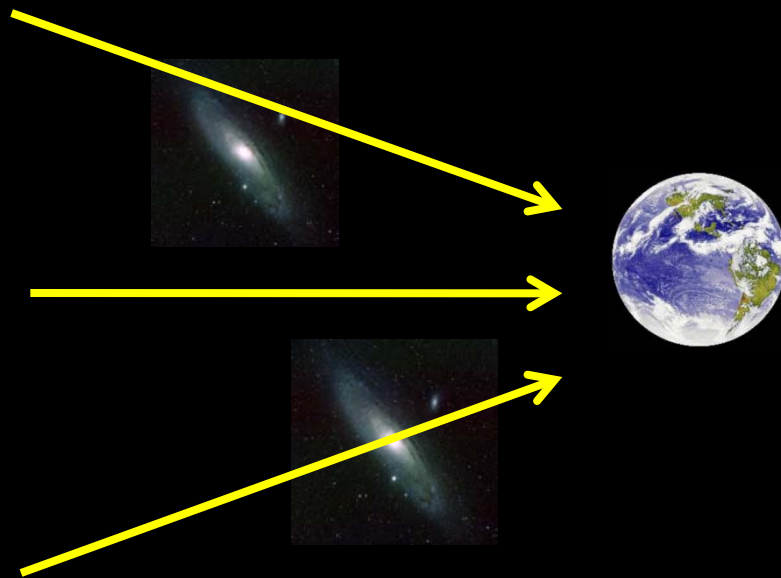
CMBゆらぎ

再加熱

再結合

インフレーション
量子ゆらぎ

光子+バリオン
音波振動



最終散乱面での
ゆらぎ → primary

最終散乱面以降でできる
ゆらぎ → secondary

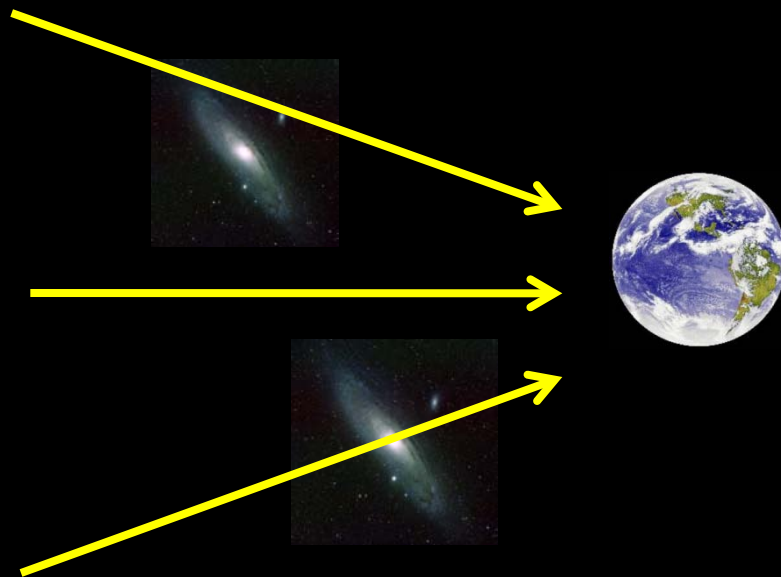
CMBゆらぎ

再加熱

再結合

インフレーション
量子ゆらぎ

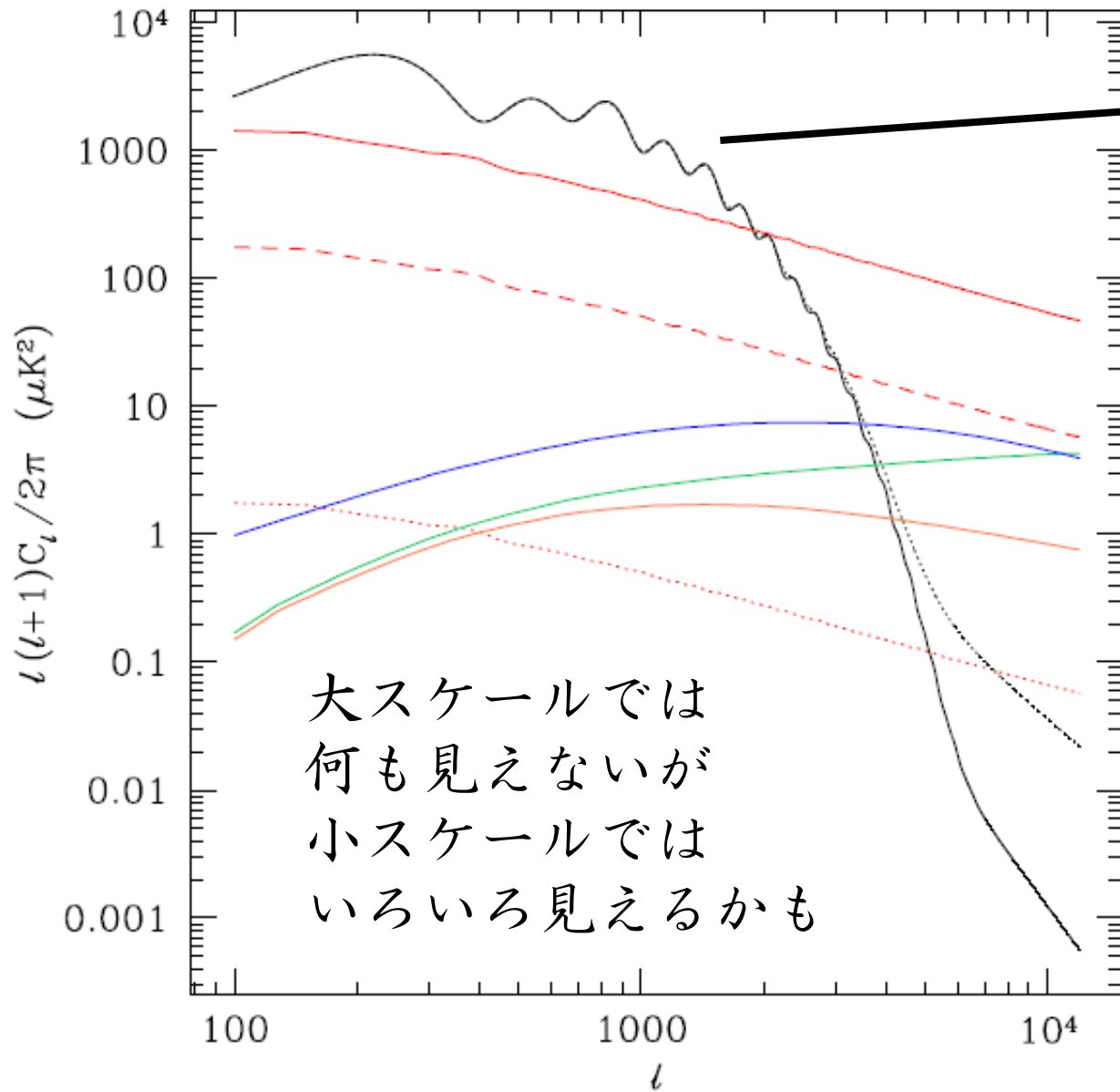
光子+バリオン
音波振動



primary:
inflation, cosmic string

secondary:
SZ, lens, cosmic string

CMBスペクトル



primary
小スケールで
シルク減衰

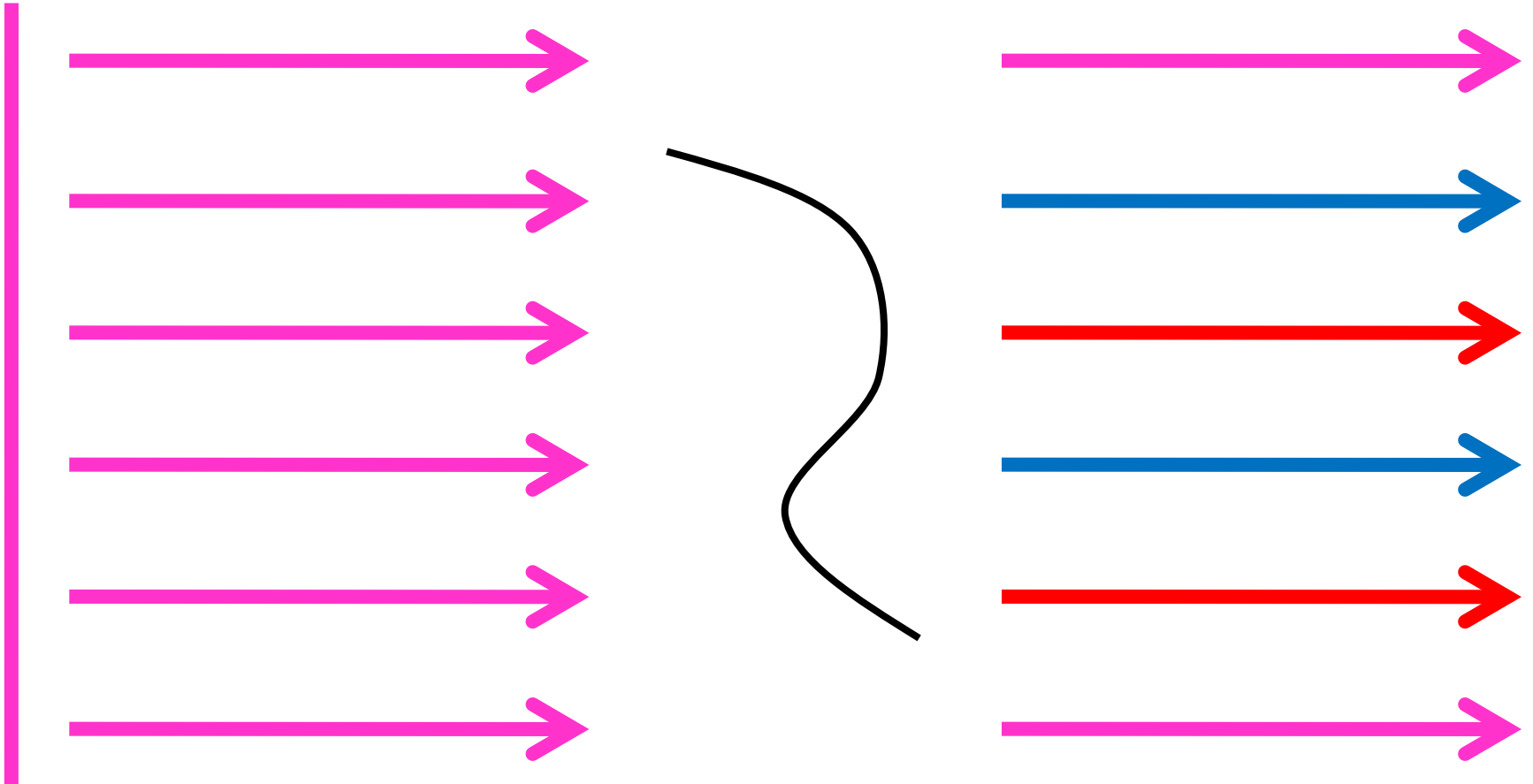
secondary

- cosmic string
- SZ
- OV

小スケール：
等方な放射が
何かを通過して
できる。

イメージ

等方な放射がcosmic stringの近くを通ると温度が変わる



小スケールではsecondaryのISWだけを考えればよい
(再結合以前のプラズマの運動を考えなくてよい)

cosmic stringによる温度ゆらぎ

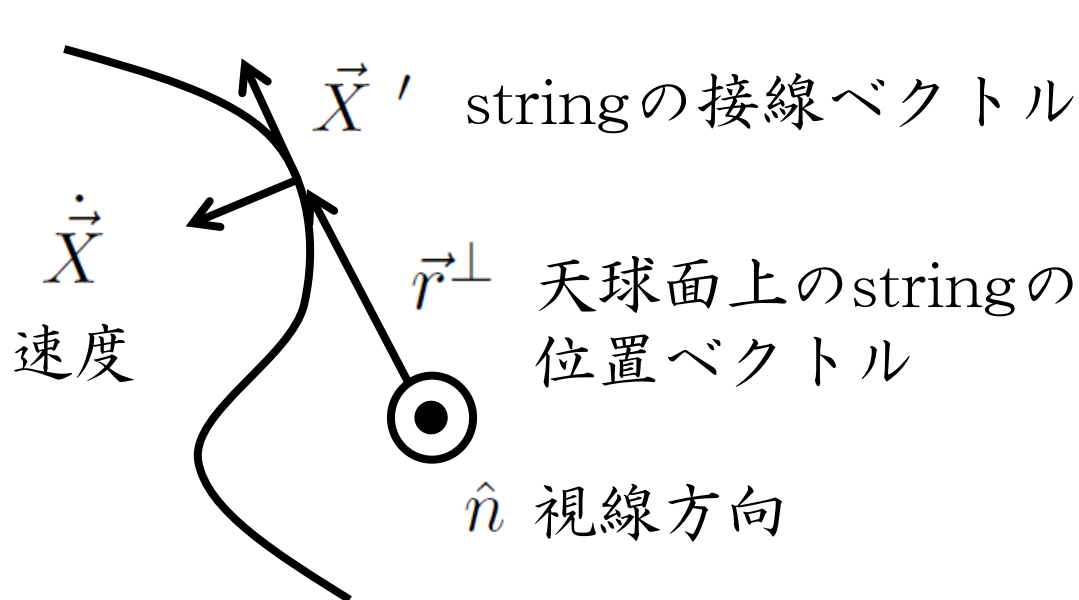
integrated Sachs-Wolfe効果

$$\frac{\Delta E}{E} = - \int_{t_{\text{em}}}^{t_{\text{obs}}} dt \left[\frac{1}{2} \dot{h}_{00} + \hat{n}^i \dot{h}_{0i} + \frac{1}{2} \hat{n}^i \hat{n}^j \dot{h}_{ij} \right]$$

cosmic stringによる温度ゆらぎの一般的な表式

$$\Delta(\hat{n}) = -4G\mu \int d\sigma \frac{\vec{r}^\perp \cdot \vec{u}}{|\vec{r}^\perp|^2} \Big|_{t=t_{\text{lc}}(\sigma)}$$

$$\vec{u} = \dot{\vec{X}} - \frac{\hat{n} \cdot \dot{\vec{X}}'}{1 + \hat{n} \cdot \dot{\vec{X}}} \dot{\vec{X}}'$$

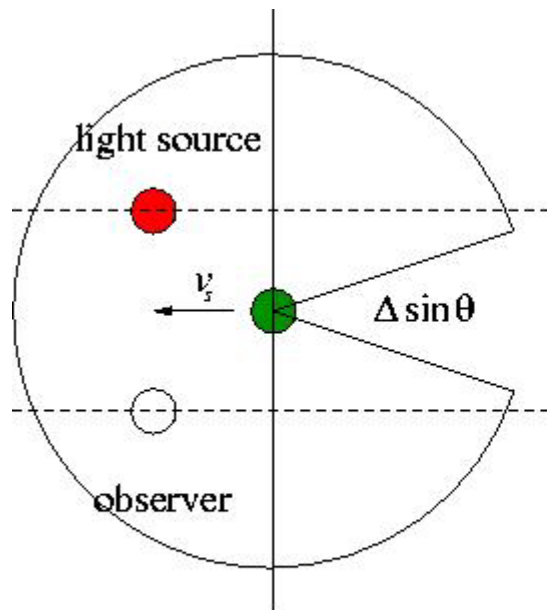
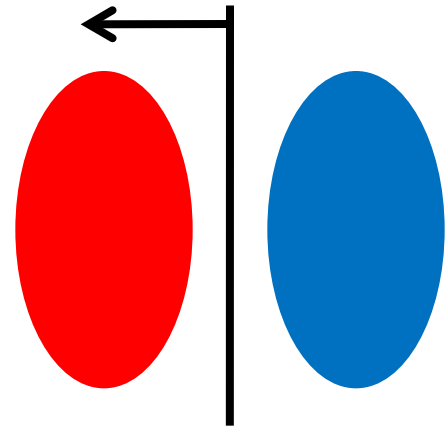


Kaiser-Stebbins effect

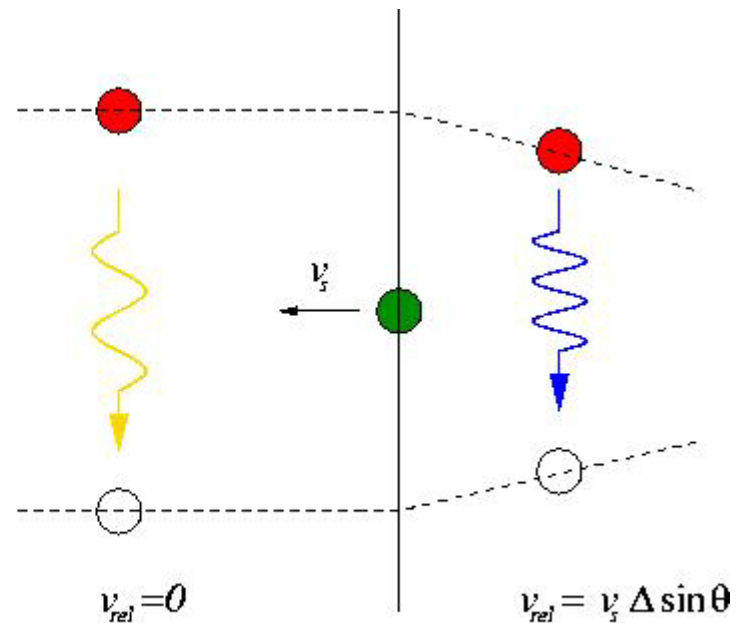
straight stringまわりの温度ゆらぎ

$$\Delta_{CS} = 4\pi \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \alpha G \mu$$

動いていないとゆらぎはできない。
(止まっているとただの重力レンズ)



(a)



(b)

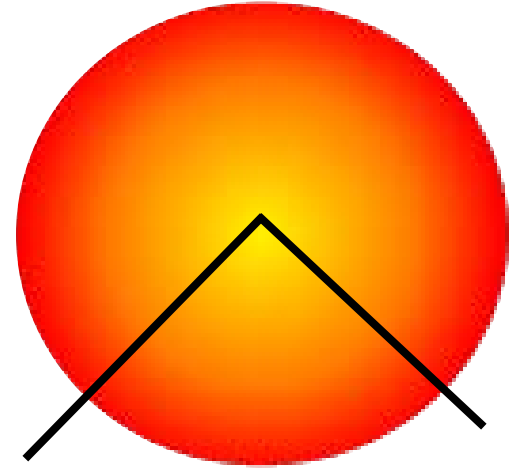
kink と cusp

Stebbins (1988)

kinkまわりの温度ゆらぎ

$$\Delta_{\text{kink}} = 4\alpha G\mu \log \frac{\delta}{L_{\text{kink}}}$$

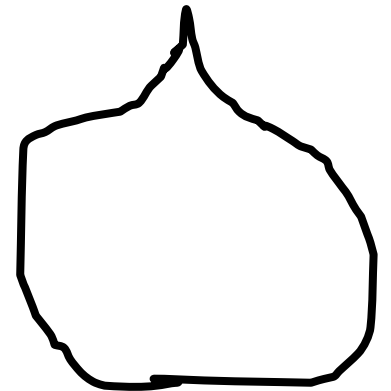
δ : impact parameter
kink付近で対数的に
温度ゆらぎが大きくなる



cuspまわりの温度ゆらぎ

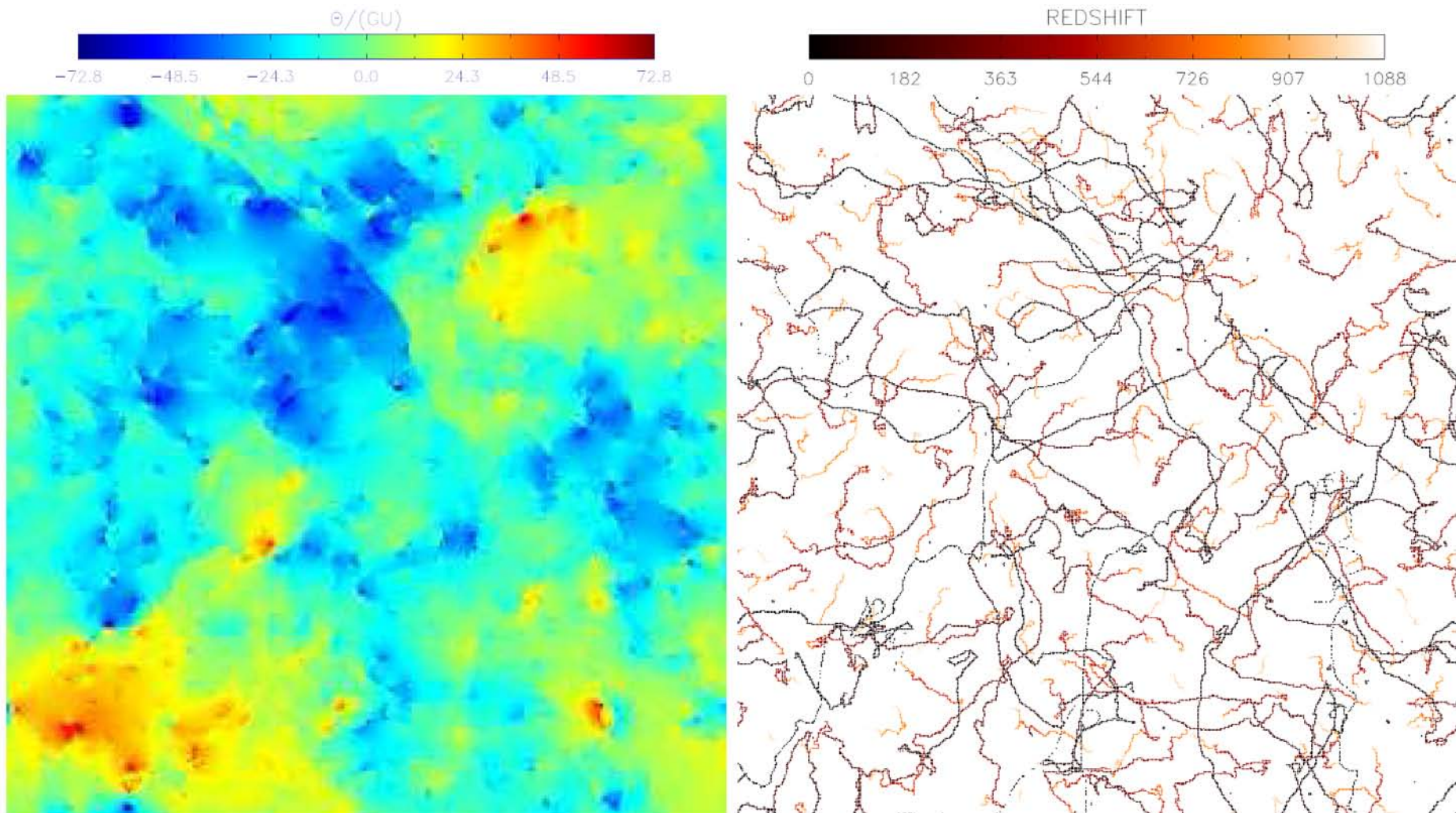
$$\Delta_{\text{cusp}} \approx \alpha(t) \frac{G\mu}{\sqrt{\delta}}$$

- あまりきちんと求められていない
- 時間に依存する
→ 周期的に明るくなるシグナル？



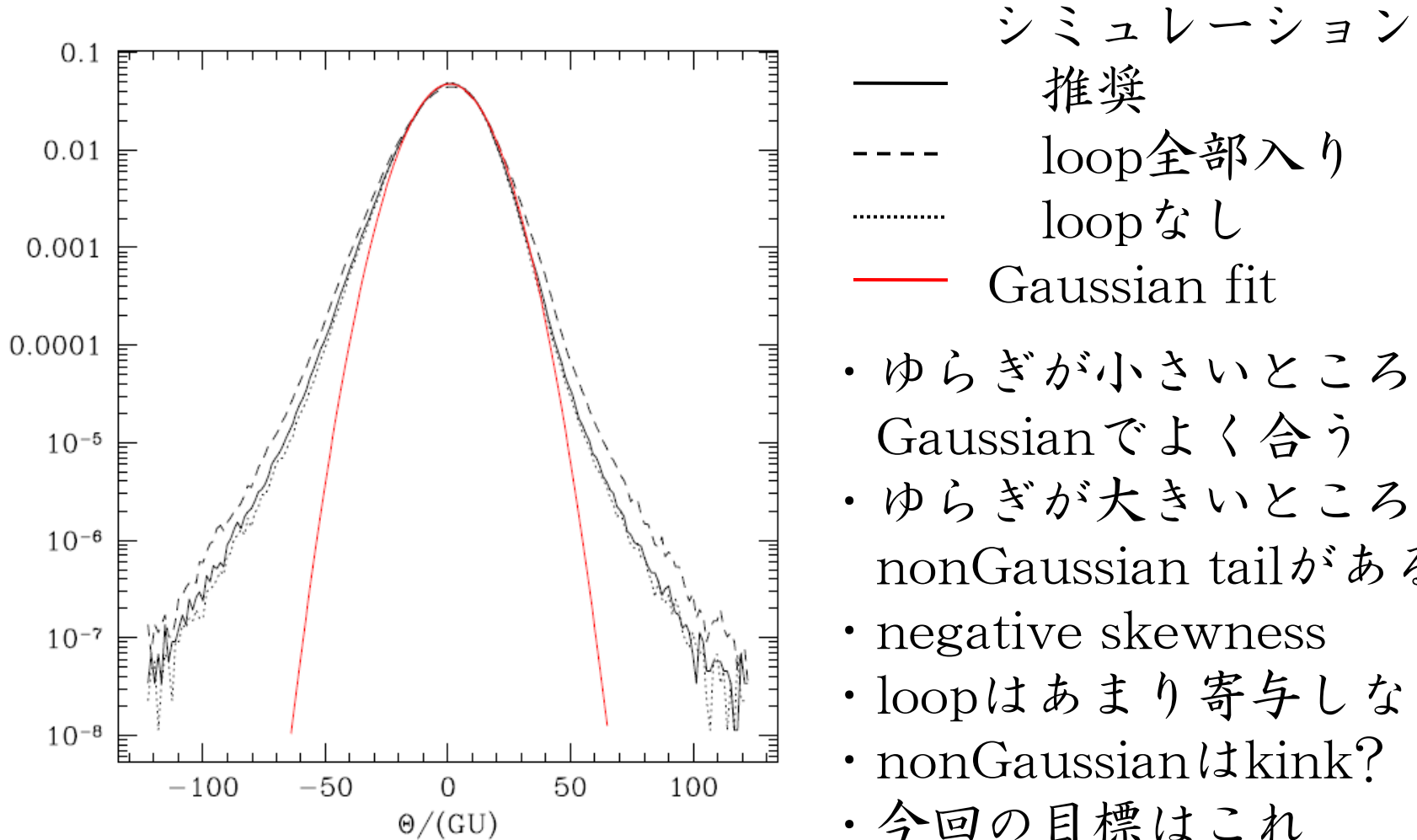
シミュレーション

Fraisse et al. (2008)によるシミュレーション
Nambu-Goto stringのdynamics (P=1) → 光子を伝播

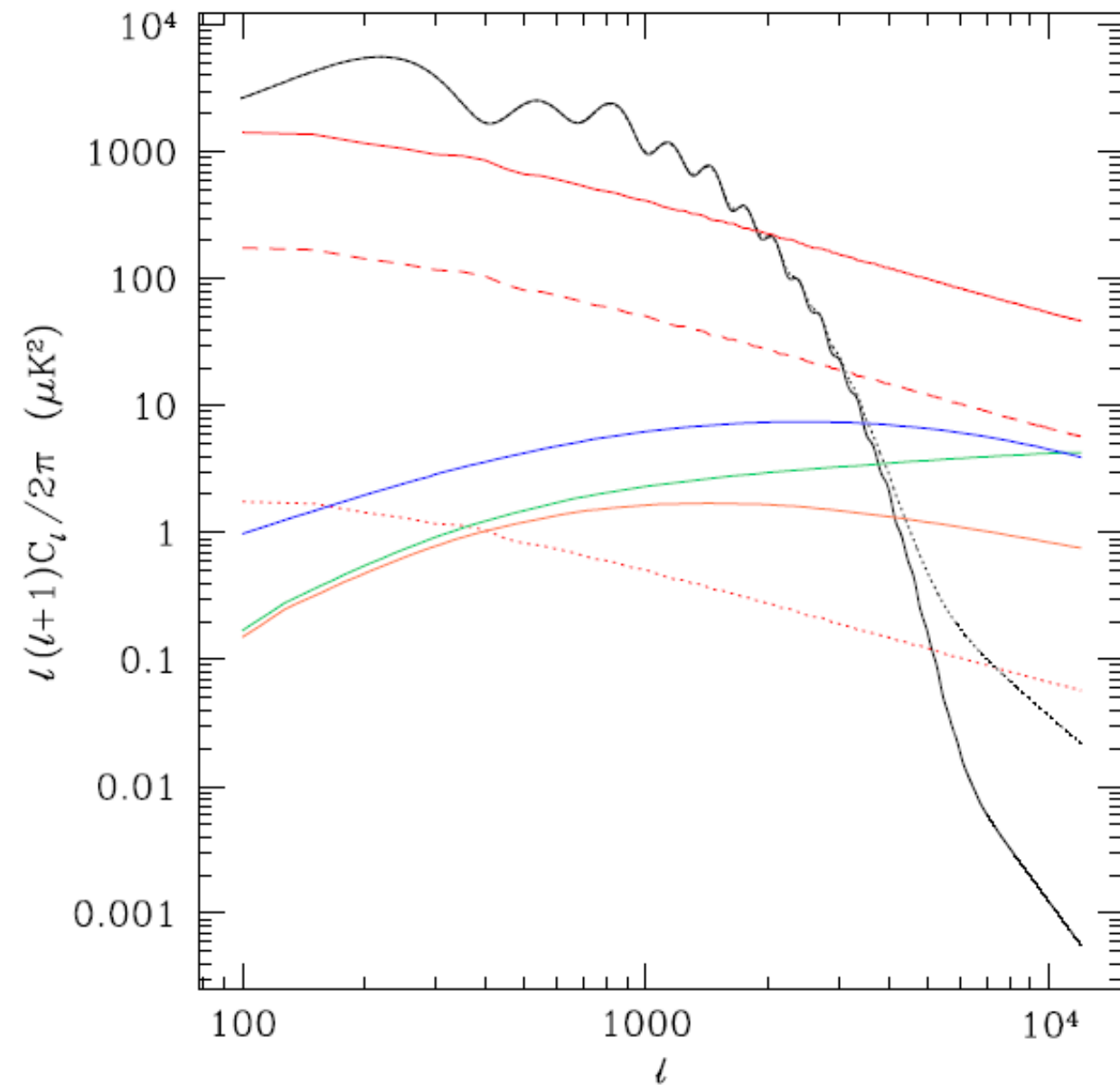


1点関数

シミュレーションで得られた温度の1点関数
解像度 $0.42'$ (とんでもなく細かい)



2点関数



- primary
- $G\mu = 2 \times 10^{-6}$
すでに否定
- - - $G\mu = 7 \times 10^{-7}$
現在の上限
- ⋯ $G\mu = 7 \times 10^{-8}$
- thermal SZ
- kinetic SZ
- OV

- μ^2 でスケール
- th-SZは差っぴける
- 後はnonGaussian B-modeで区別？

まとめ

CMBとcosmic string

- primaryは小スケールで減衰
- 小スケールではISWだけ考えればよい
- 1点関数でnonGaussian tailがある
- μ が上限近くなら2点関数はdominant

シミュレーションの問題点

- dynamical range, resolution
- 1つのモデルに対して多数回試行
- 再結合確率依存性

4、cosmic string と
cosmic superstring

cosmic stringの種類

field-theory string

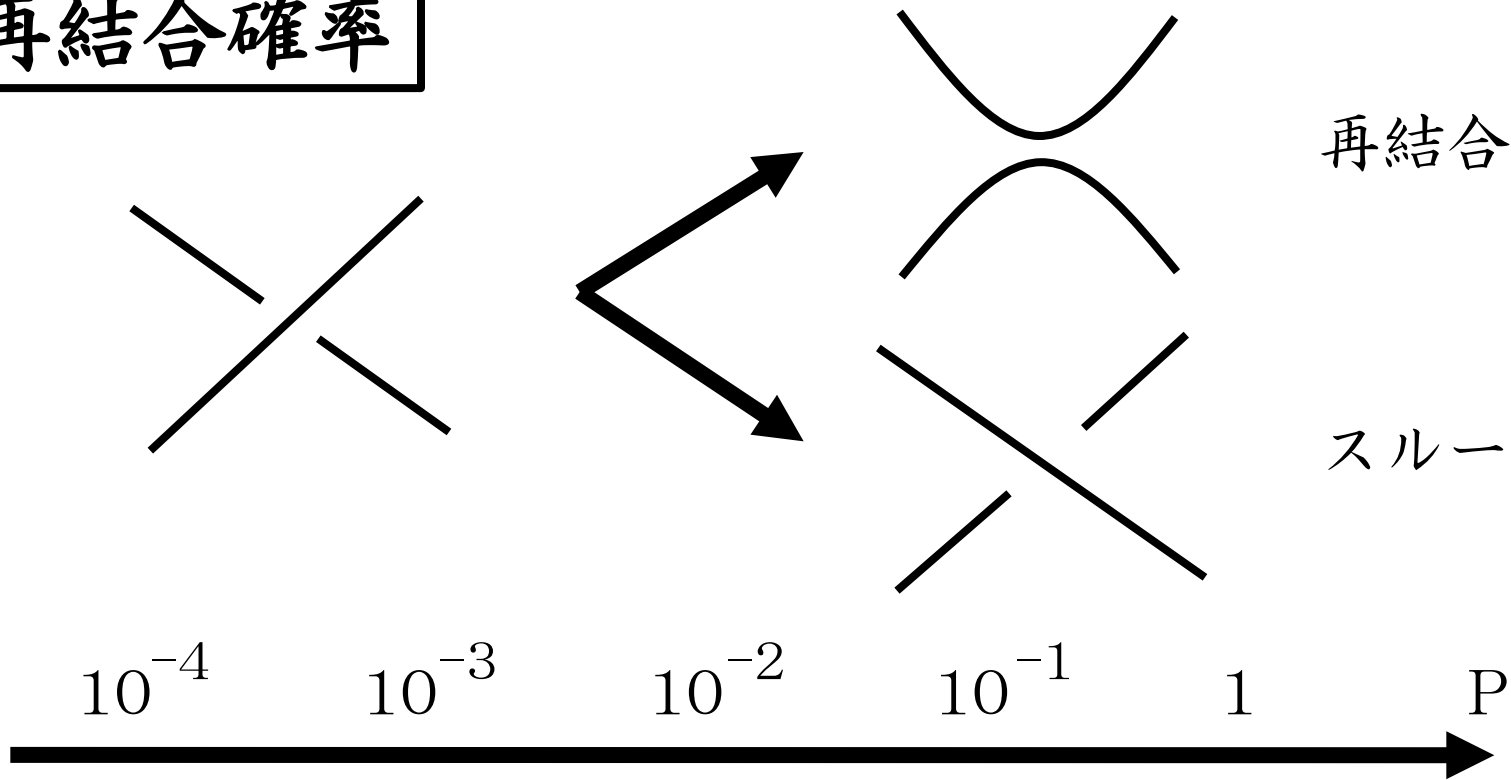
- 普通のcosmic string
- 相転移のときにできる
- μ は相転移のエネルギースケール

superstring

- F-string : いわゆる「超弦」
- D-string : D1-braneまたはDp-braneが丸まったもの
- brane inflationが終わる時にできる
- μ はモデルによる($G\mu = 10^{-11} \sim 10^{-6}$)
- モデルによってF、D、F+Dなど
- Y-junction

観測的には「再結合確率」を通して区別できる
(Y-junction入りネットワークは複雑なので今は無視)

再結合確率



F-string

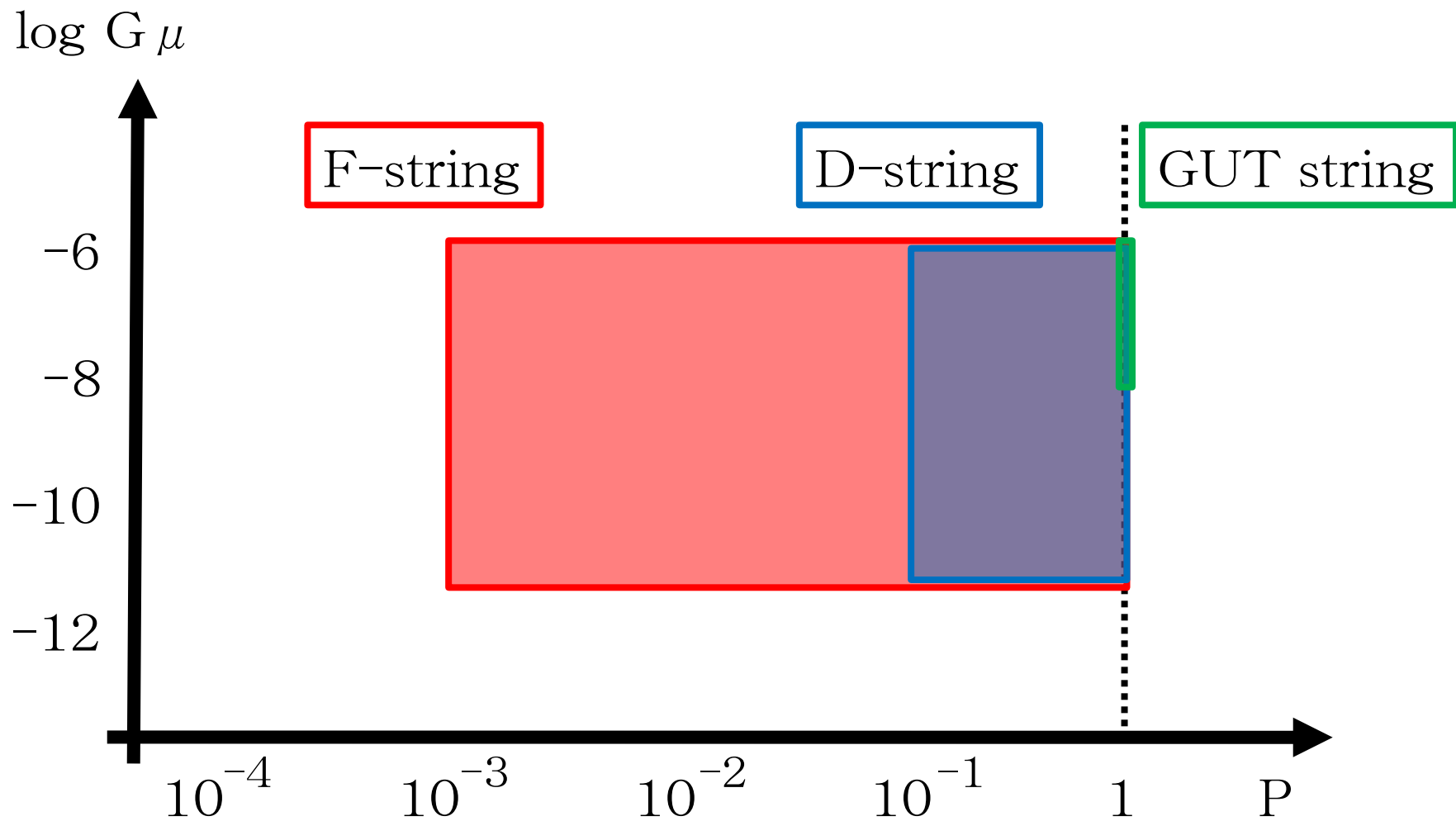
D-string

field-theory string

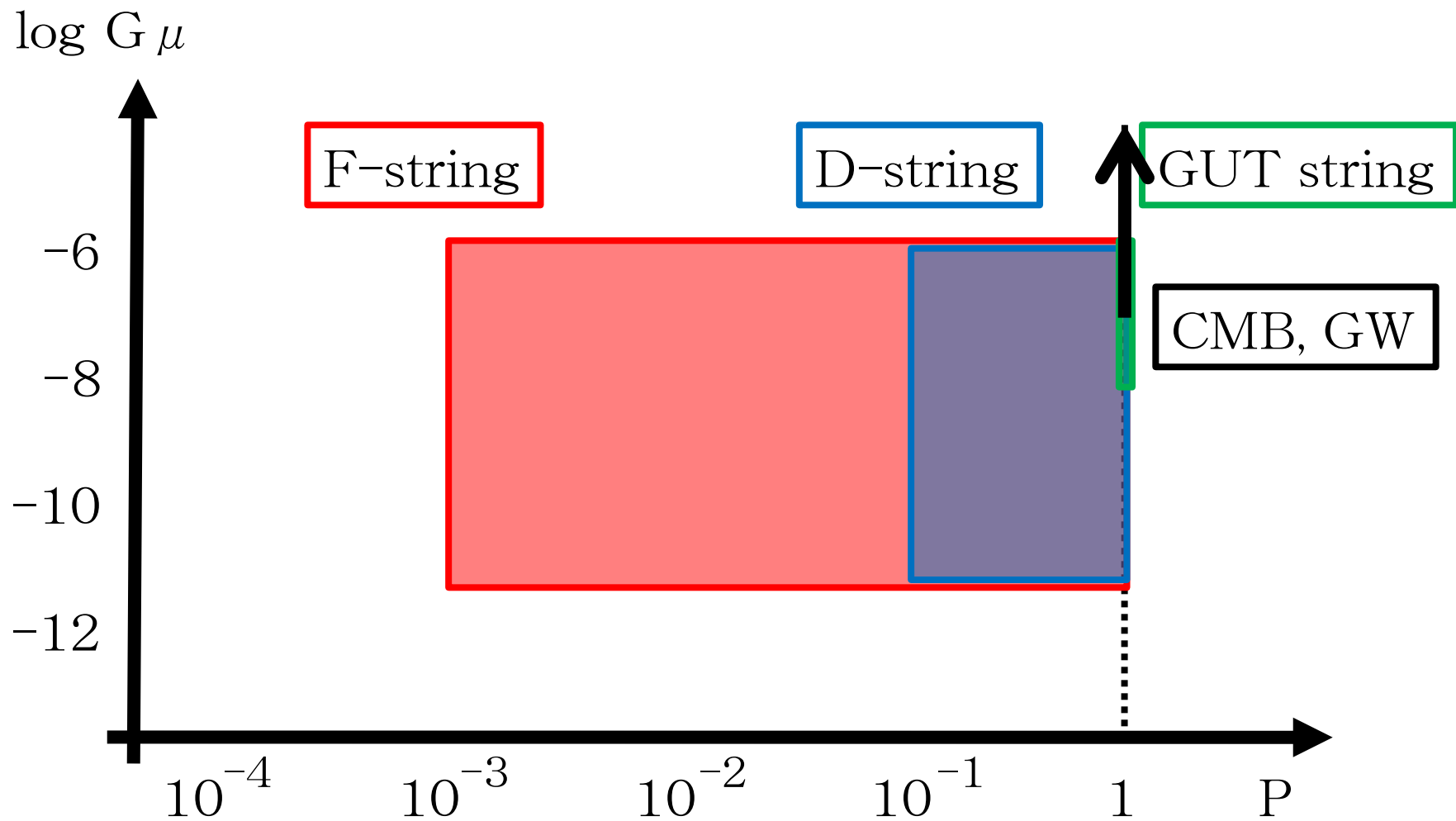
superstringでは一般に $P < 1$

- string couplingの強さ
- extradimensionの効果

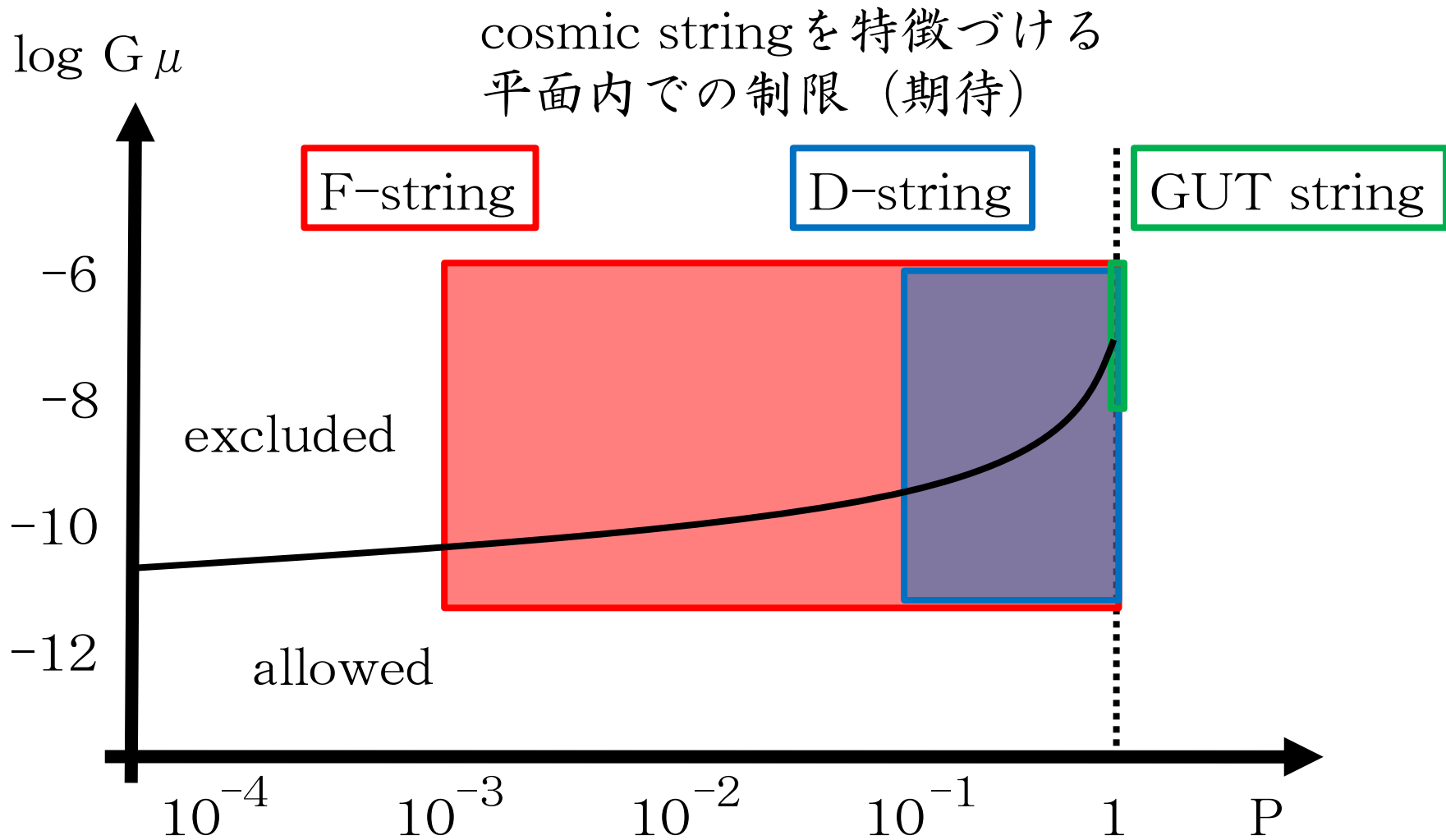
cosmic stringへの制限



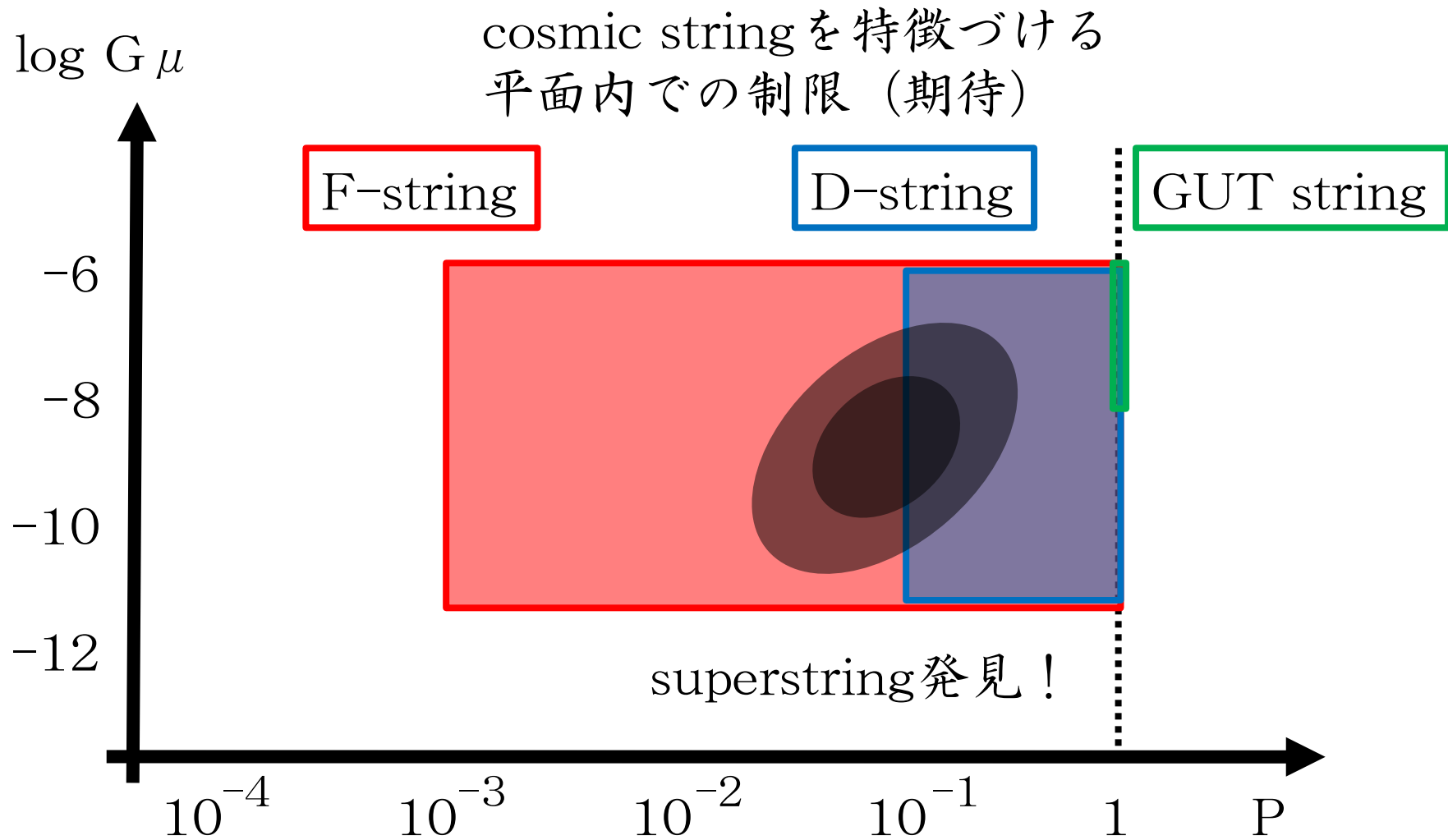
cosmic stringへの制限



cosmic stringへの制限



cosmic stringへの制限

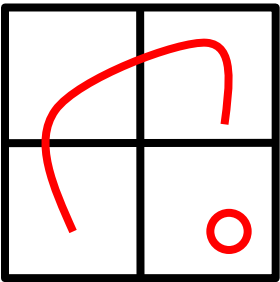


再結合確率はどのような観測的影響を持つか？



networkの状態への影響を考える

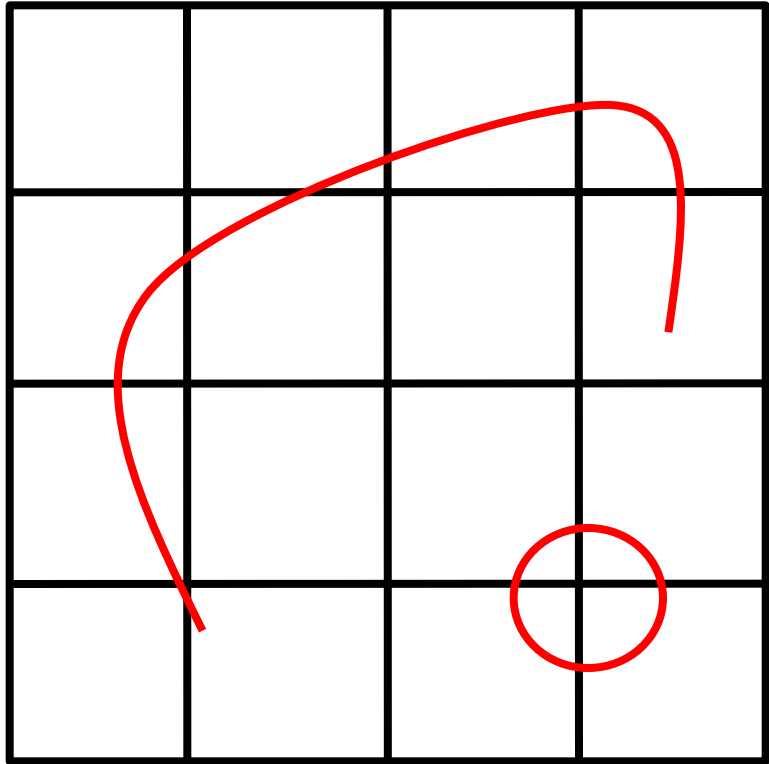
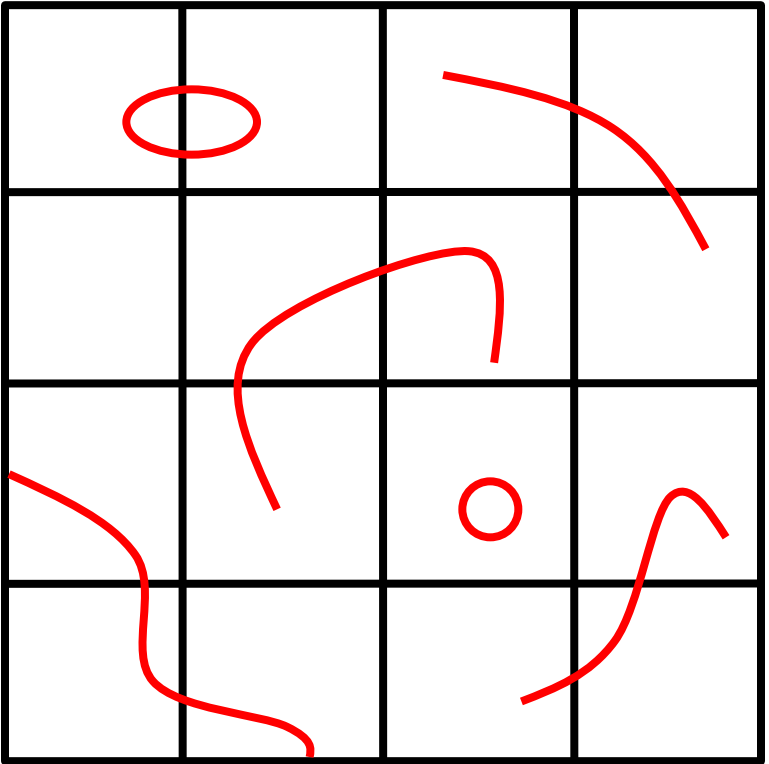
networkはどう
進化するか？



comoving
evolution



scaling
evolution



スケーリング (scale invariant)

「horizon内にhorizonくらいの相関長を持ったstringが
horizon scaleくらいの間隔で分布」

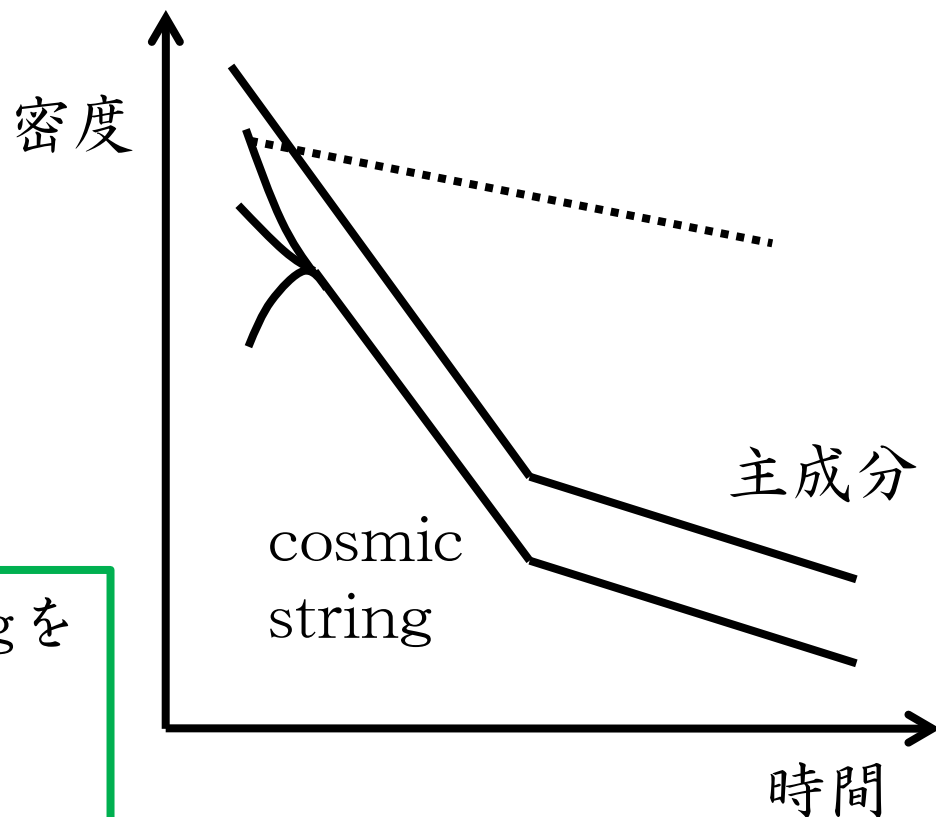
- 全てのスケールがhorizonスケールで特徴付けられる
- 初期条件によらずattractorに落ち着く
- エネルギー密度は
主成分と同じように
時間発展

$$\rho_{cs} \sim \frac{\mu\xi}{\xi^3} \sim \mu H^2$$

$$\frac{\rho_{cs}}{\rho_{tot}} = \frac{G\rho_{cs}}{H^2} \sim G\mu$$

この振る舞いがcosmic stringを
面白くしている。

c.f. monopole, domain wall



なぜスケーリング？

なぜこんなことが起こるか？

cosmic stringのガスの状態方程式は $w = -1/3$ なので何も起こらなかつたらすぐにdominantになる。

→ どんどんエネルギーを捨てないといけない。

→ ・長いstringは衝突によって次々とループを生成
・ループは重力波などを放出してすぐにdecay

スケーリングとは釣り合い

宇宙膨張でcosmic stringがdominantになっていく傾向とループ形成でエネルギーを捨てるのがつりあうとスケーリング

スケーリング状態は安定

スケーリング状態よりstringがたくさんあるとたくさんループ形成が起こってエネルギーが減る

数値シミュレーション

Ringeval et al. (2006)

Nambu-Goto action

comoving box with volume 1

periodic boundary condition

matter domination

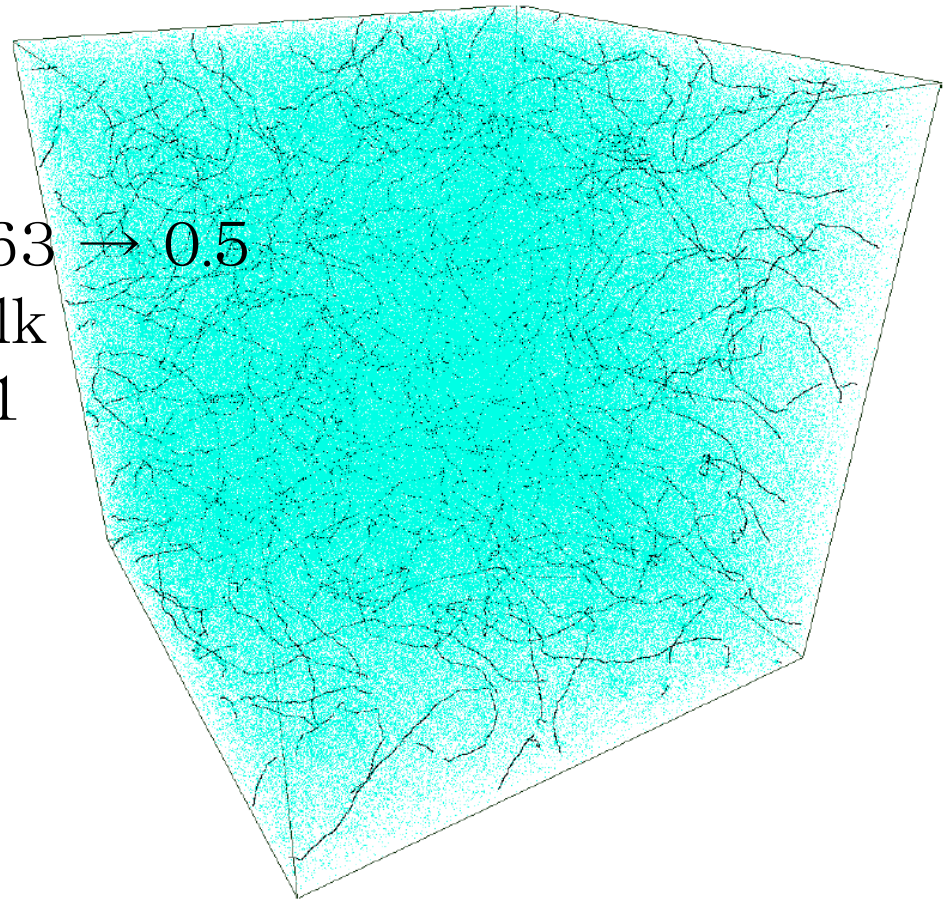
scale factor: $1 \rightarrow 64$

comoving horizon scale: $0.063 \rightarrow 0.5$

initial condition: random walk

initial coherence length: 0.01

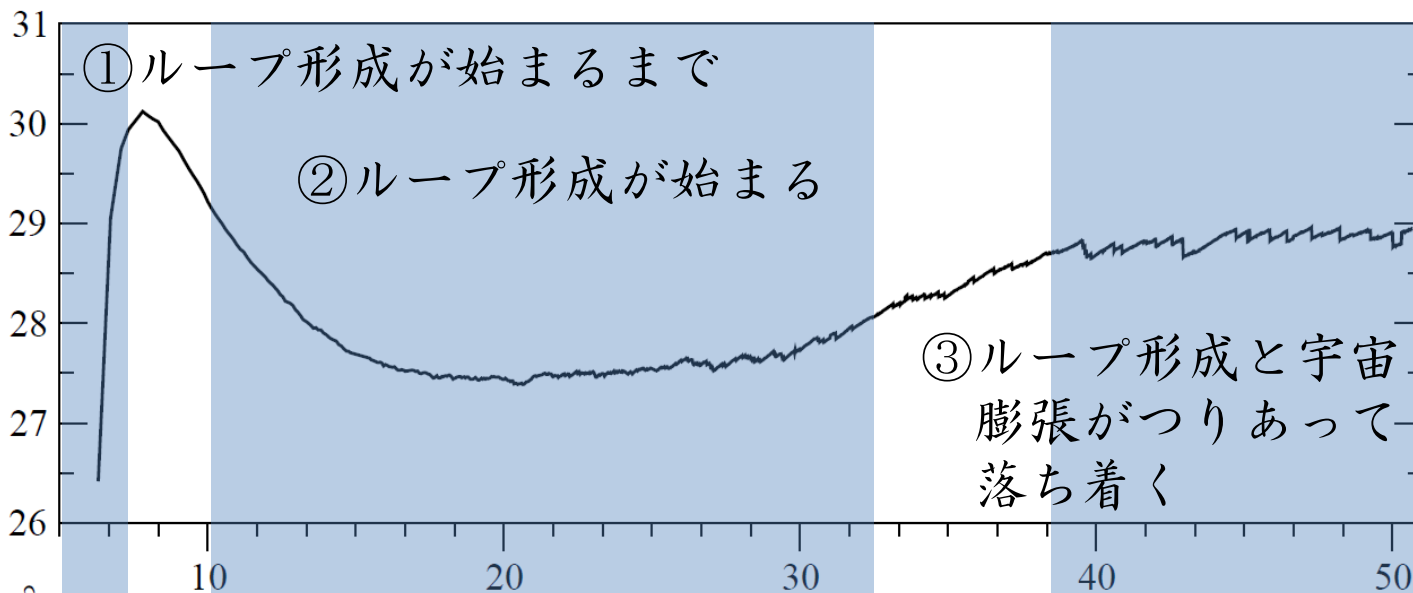
resolution: 0.0005



スケーリングに到達するまで

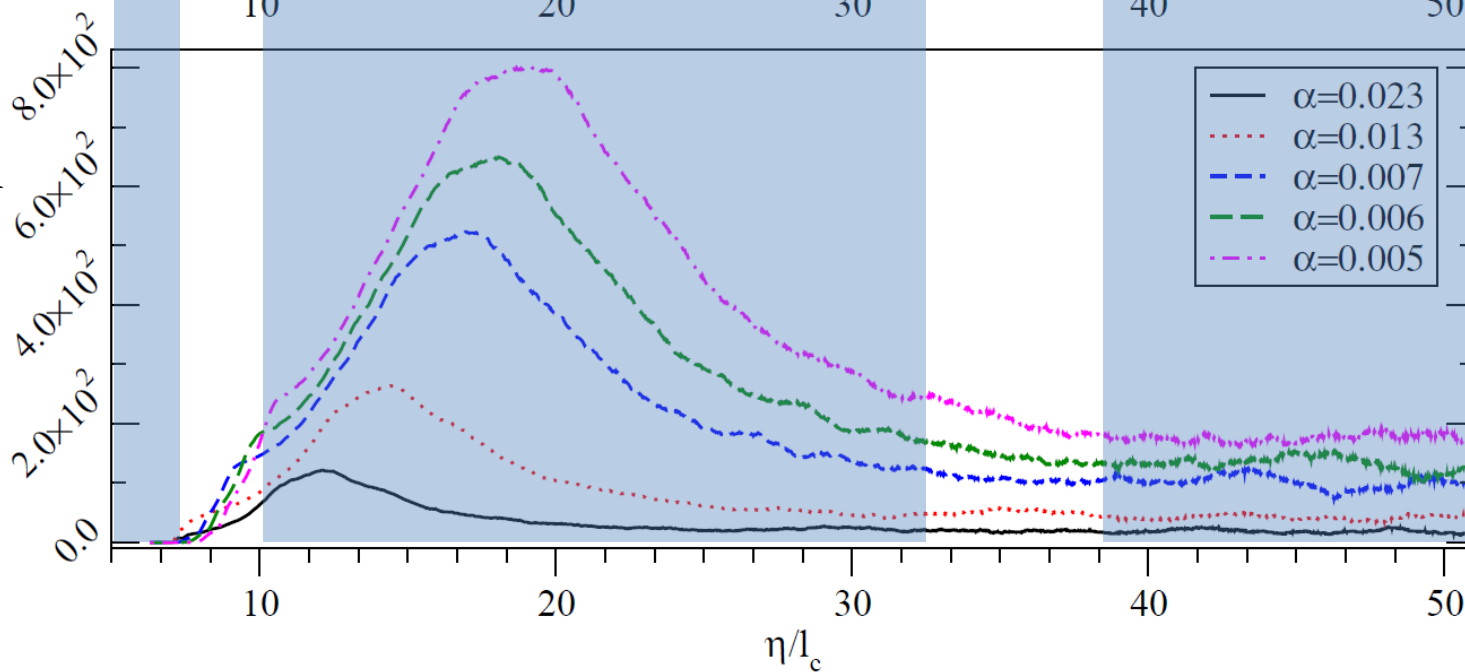
長いstringの
密度

$$\frac{\rho_{\text{inf}}}{\rho_{\text{m}} G \mu}$$



長さ α/H の
ループの密度

$$\frac{1}{\rho_{\text{m}} G \mu} \frac{d\rho_{\alpha}}{d\alpha}$$



再結合確率の影響

スケーリングするためには
どんどんループを作って
エネルギーを捨てなければ
ならない。

再結合確率低い

→ ループできにくい

→ 平衡点でストリング多い

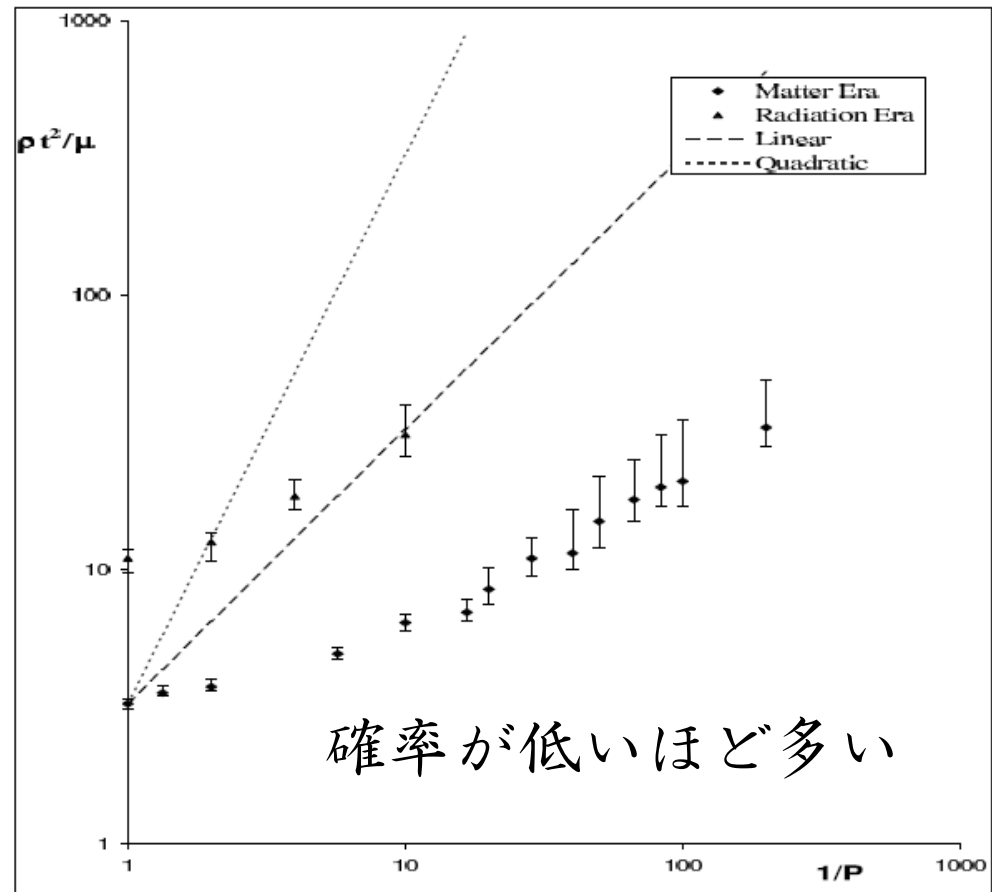
$P \rightarrow$ horizon内の本数

$\mu \rightarrow$ 1本の重さ

観測的に P と μ に制限。

(ただしシミュレーションも
解析的モデルもあまり収束
していない。)

スケーリングに到達したとき
horizon内に何本あるか？



Avgoustidis & Shellard (2005)

まとめ

cosmic stringの種類：field, F, D

- μ と P で cosmic string を特徴づける
(しかし superstring にはそれ以外の特徴もある)
- P から一意に決めることはできないが、
1 より有意に小さかったら superstring !

ネットワーク

- 初期条件によらず、ある状態に落ち着く
- 落ち着く先は P に依存する
→ P により予言が異なる (CMB・重力波)

5、CMBゆらぎの 再結合確率依存性

やること

簡単な解析的モデルでCMBの1点関数を計算する。

- ネットワークのモデル化
 - 既成のスケーリングモデルの拡張
 - シミュレーションとよく合う ($P < 1$ も含めて)
- CMBゆらぎのモデル化
 - オリジナル
 - まず $P = 1$ で Fraisse et al. と合わせる
 - これを $P < 1$ に拡張
 - 1点関数の P 依存性がわかる

ネットワークのモデル化

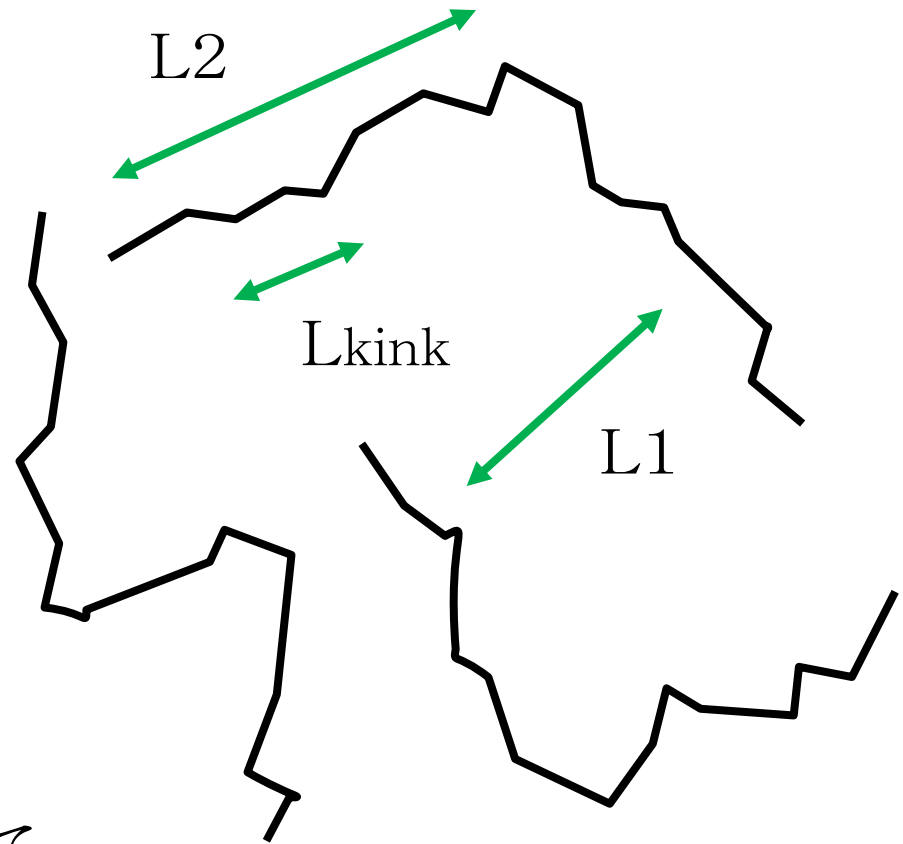
Kibble & Copeland (1991)

次のように簡単化してモデル化

- ・ 真っ直ぐなsegmentとその上に分布するkink
- ・ つながりは無視
- ・ loopはすぐdecay (無視)
- ・ L1: segment間の平均距離
- ・ L2: segmentの長さ
- ・ Lkink: kink間の平均距離
- ・ v: segmentの平均速度

→ velocity-three scale model

- ・ これらを時間の関数として発展方程式を立てて解く
- ・ スケーリング状態の存在、エネルギー密度などを再現
- ・ シミュレーション: $L1 \sim L2 \sim 1/H \gg Lkink, v \sim 0.5$



segment と kink

真っ直ぐな segment と kink に注目。
(ループ と cusp は無視する)

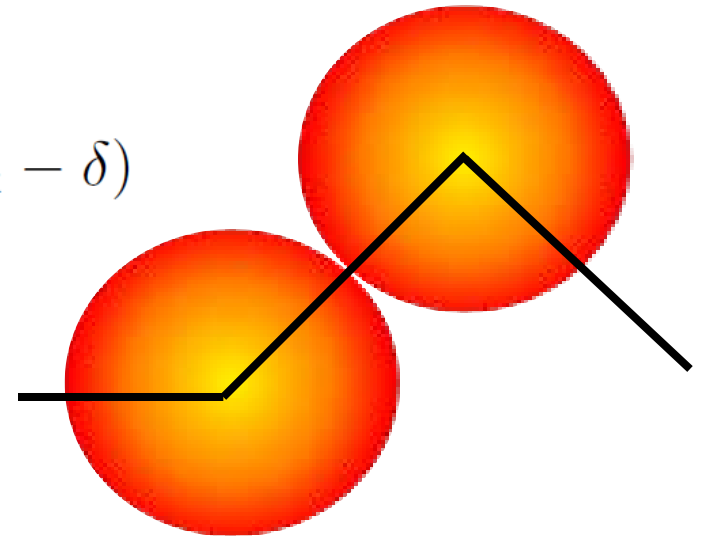
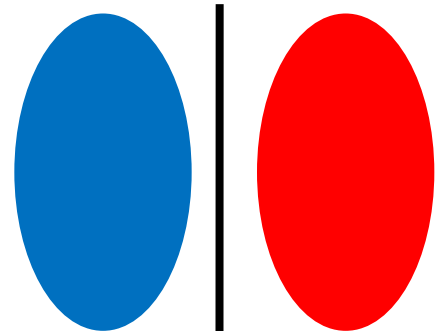
segment 周りの温度ゆらぎ

$$\Delta_{\text{seg}} = 4\pi \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \alpha G \mu$$

kink 周りの温度ゆらぎ

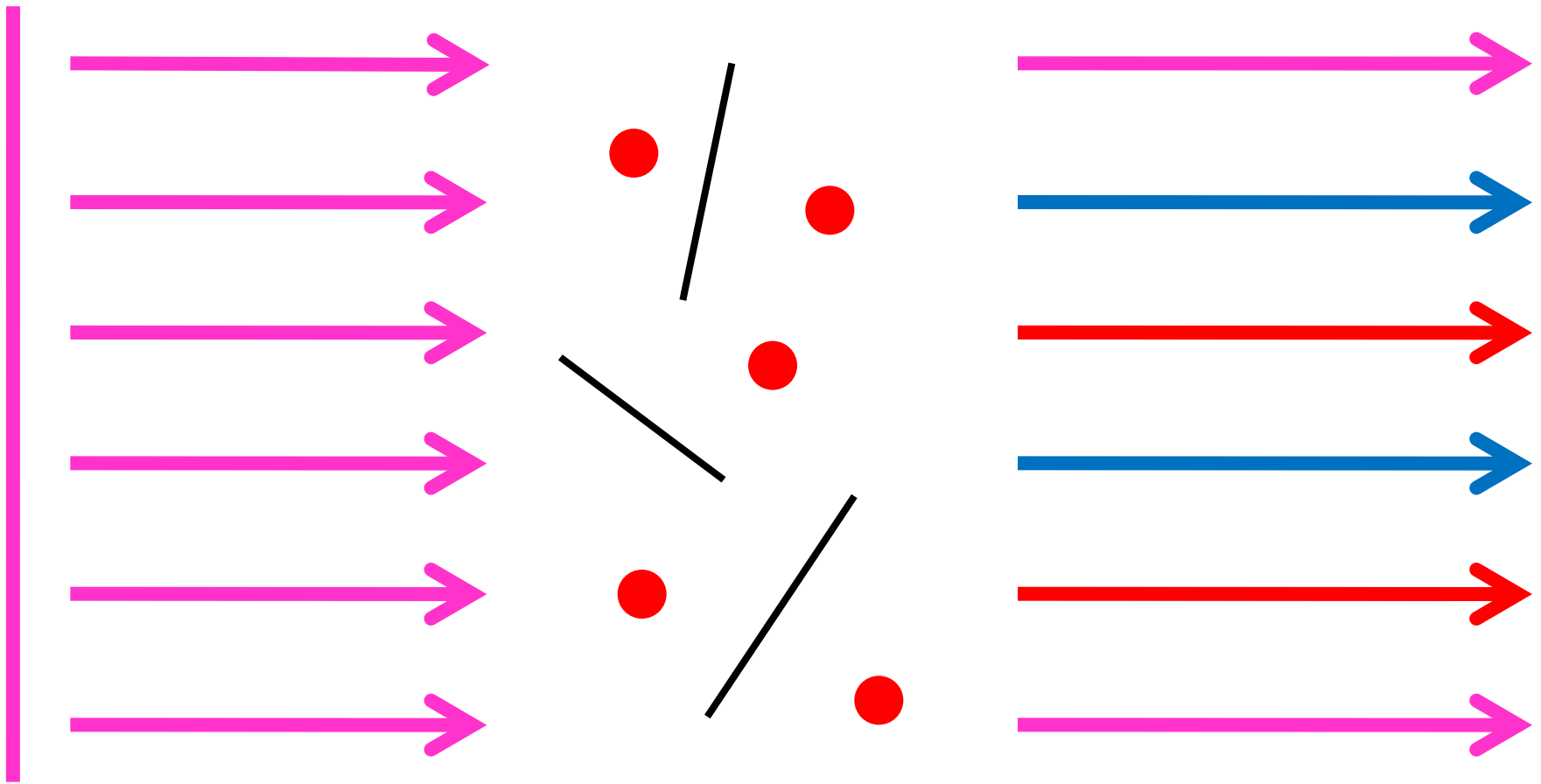
$$\Delta_{\text{kink}} = -4G\mu\alpha \log\left(\frac{\delta}{L_{\text{kink}}}\right) \Theta(L_{\text{kink}} - \delta)$$

δ : impact parameter



温度ゆらぎのモデル化

segmentとkinkがランダムに独立に分布し
通る場所によって様々な温度ゆらぎができる

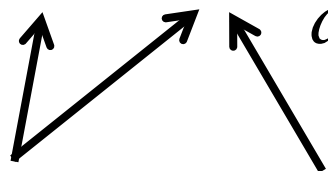


segmentの近くを何回も通過 \rightarrow random walk \rightarrow Gaussian
kinkの近くをたまに通過 \rightarrow nonGaussian tail

統計的情報

ネットワークの進化の情報と素過程を組み合わせると、
温度ゆらぎの統計的情報が得られる。

一般に数密度 n 、断面積 σ の粒子に対する optical depth は

$$\tau = \int_0^{z_{\text{rec}}} n(z) \sigma(z) \frac{d\lambda}{dz} dz$$


$$\tau_{\text{seg}} \gg 1$$

$$\tau_{\text{kink}} \ll 1$$

ネットワークの
進化の情報

素過程

ネットワークの発展①

いろいろなスケール

- L1: segment間の平均距離
- L2: segmentの長さ
- Lkink: kink間の平均距離
- v: segmentの平均速度

$L = L1 = L2$ とする。

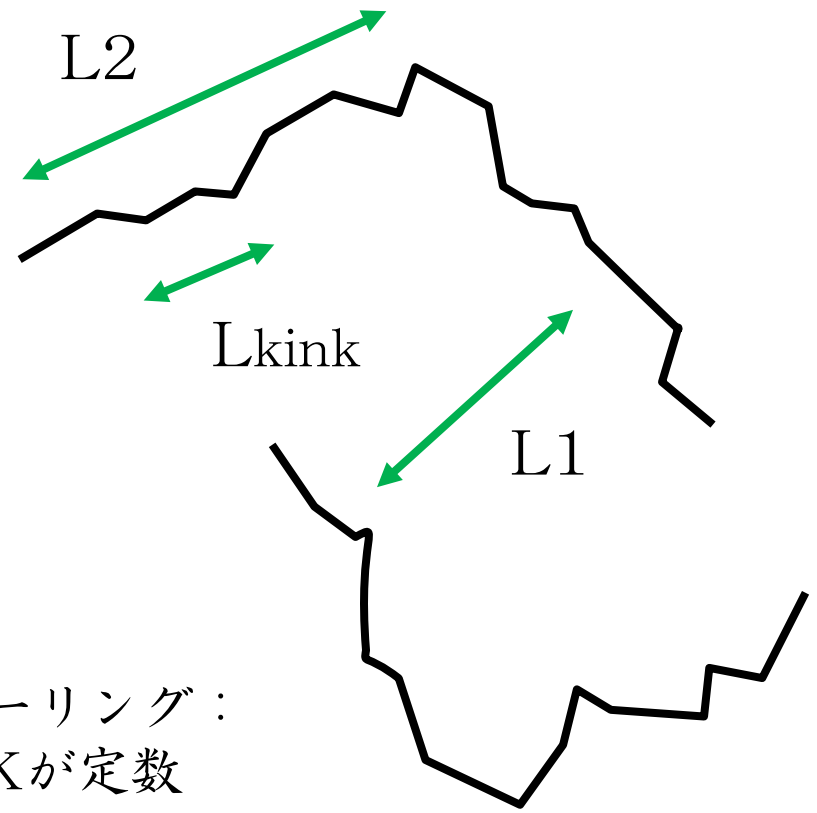
horizonスケールで規格化

$$L = \frac{1}{\gamma H}, \quad L_{\text{kink}} = \frac{1}{KH} \quad \text{スケーリング: } \gamma \cdot K \text{ が定数}$$

いろいろな量がL, Lkinkで表される

$$n_{\text{seg}} = \frac{1}{L^3}, \quad N_{\text{seg}} = \frac{1}{H^3 L^3} = \gamma^3, \quad \rho_{\text{seg}} = \frac{\mu L}{L^3} = \frac{\mu}{L^2},$$

$$N_{\text{kink}} = \frac{1}{H^3 L^3} \frac{L}{L_{\text{kink}}} = \frac{1}{H^3 L^2 L_{\text{kink}}} = \gamma^2 K$$



ネットワークの発展②

ネットワークの大スケール構造の発展方程式

宇宙膨張

ループ形成

$$\frac{d\rho_{\text{seg}}}{dt} + 2H(1 + v_{\text{rms}}^2)\rho_{\text{seg}} = -\frac{\tilde{c}v_{\text{rms}}}{L}\rho_{\text{seg}}$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} - H(1 + v_{\text{rms}}^2)L = \frac{1}{2}\tilde{c}v_{\text{rms}} \quad c \sim 0.23: \text{形成効率}$$

$$\rightarrow \frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 1 - \beta - \frac{1}{2}\beta\tilde{c}v_{\text{rms}}\gamma - \beta v_{\text{rms}}^2$$

曲率による加速 宇宙膨張

$$\frac{dv_{\text{rms}}}{dt} = (1 - v_{\text{rms}}^2) \left(\frac{k(v_{\text{rms}})}{\xi} - 2Hv_{\text{rms}} \right)$$

$$k(v_{\text{rms}}) \equiv \frac{\langle (1 - v^2)(\vec{v} \cdot \vec{u}) \rangle}{v(1 - v^2)} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1 - 8v_{\text{rms}}^6}{1 + 8v_{\text{rms}}^6}$$

ネットワークの発展③

スケーリングとは、 $\gamma \cdot v_{\text{rms}}$ が一定値に落ち着くこと。
霧困気をつかむため、 $v_{\text{rms}} = \text{一定}$ と簡単化して
方程式を解いてみる (one-scale model)。

$$\frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 1 - \beta - \frac{1}{2} \beta \tilde{c} v_{\text{rms}} \gamma - \beta v_{\text{rms}}^2$$

解は

$$\gamma(t) = \frac{2(1 - \beta - \beta v_{\text{rms}}^2)}{\beta \tilde{c} v_{\text{rms}}} \left[1 - \left(\frac{t_0}{t} \right)^{1 - \beta - \beta v_{\text{rms}}} \right]^{-1}$$

これは時間がたつと一定値に近づいて初期条件を忘れる。

→ スケーリング！

ネットワークの発展④

スケーリングするとわかっていれば、スケーリング解は $\gamma \cdot v_{\text{rms}}$ を定数として代数方程式を解けばよい。

$$\frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 1 - \beta - \frac{1}{2} \beta \tilde{c} v_{\text{rms}} \gamma - \beta v_{\text{rms}}^2$$

$$\frac{dv_{\text{rms}}}{dt} = (1 - v_{\text{rms}}^2) \left(\frac{k(v_{\text{rms}})}{\xi} - 2H v_{\text{rms}} \right)$$

$$k(v_{\text{rms}}) \equiv \frac{\langle (1 - v^2)(\vec{v} \cdot \vec{u}) \rangle}{v(1 - v^2)} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1 - 8v_{\text{rms}}^6}{1 + 8v_{\text{rms}}^6}$$

解は次のようになる。

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}}{3\tilde{c}}} \approx 2.5, \quad v_{\text{rms}}^2 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\tilde{c}}{3\sqrt{2}}} \approx 0.29$$

horizonの1/2.5倍ほどのsegmentが常にhorizon内に16本ほどある、ということになる。

ネットワークの発展⑤

Avgoustidis & Shellard (2005)

一般の再結合確率 P に拡張する。

$$\frac{d\rho_{\text{seg}}}{dt} + 2H(1 + v_{\text{rms}}^2)\rho_{\text{seg}} = -\frac{\tilde{c}Pv_{\text{rms}}}{L}\rho_{\text{seg}}$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} - H(1 + v_{\text{rms}}^2)L = \frac{1}{2}\tilde{c}Pv_{\text{rms}}$$

$$\rightarrow \frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 1 - \beta - \frac{1}{2}\beta\tilde{c}Pv_{\text{rms}}\gamma - \beta v_{\text{rms}}^2$$

衝突しても
再結合しない
可能性がある

解は次のようになる。

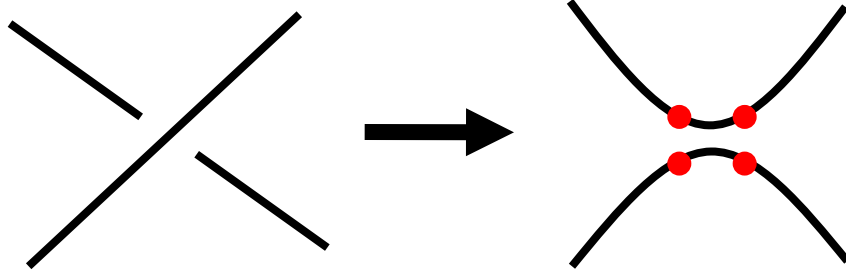
$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}}{3\tilde{c}P}}, \quad v_{\text{rms}}^2 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\tilde{c}P}{3\sqrt{2}}}$$

再結合確率が低いと segment の数が多くなり、シミュレーションの結果を再現する。

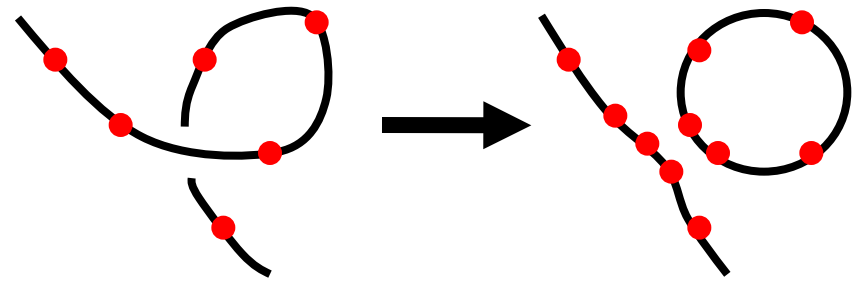
kink①

L_{kink} を求める代わりにkinkの数を数える。

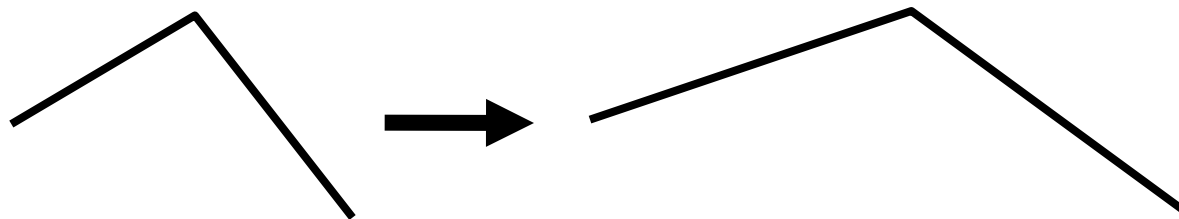
kinkはどうやって生成・消滅するか？



①組み換えのとき生成



②ループ形成のときに生成とともに離脱



③宇宙膨張でなまされる
④重力波放出でdecay

ここでは簡単のため生成と宇宙膨張だけ

kink②

●生成

kinkの生成率はループの生成率に比例する。

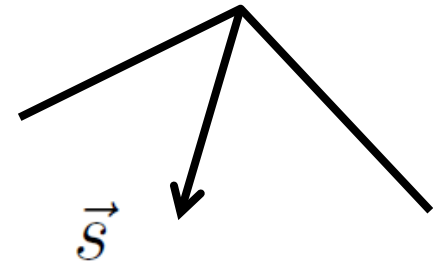
まず体積 V のcomoving boxで考える。

$$\frac{d\bar{N}_{\text{kink}}}{dt ds} = q \frac{d\bar{N}_{\text{loop}}}{dt} = q \frac{P v_{\text{rms}}}{L} \frac{V}{L^3} \quad q: \text{kink生成効率}$$

●宇宙膨張によるdecay Bennett & Bouchet (1990)

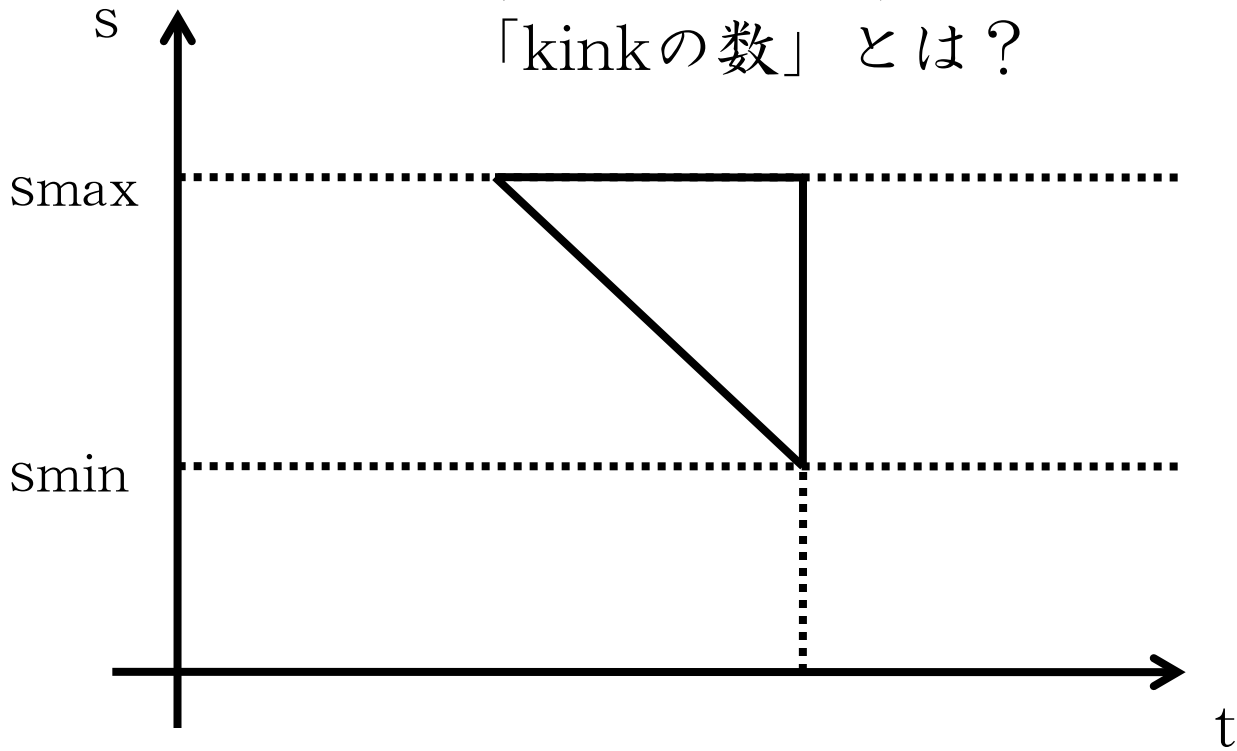
$$s = s_0 \left(\frac{a(t)}{a(t_0)} \right)^{-(1-2v_{\text{rms}}^2)} = s_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\epsilon(P)}$$

$$\epsilon = \frac{2(1-2v_{\text{rms}}^2)}{3} \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi \tilde{c} P}{3\sqrt{2}}}$$



kink③

kinkは強いものから
弱いものまで様々。
「kinkの数」とは？



生成率をt-s平面上の三角形内で積分すればよい。

$$\bar{N}_{\text{kink}}(t) = \int_{\nabla} dt ds \frac{d\bar{N}_{\text{kink}}}{dt ds}$$

$$N_{\text{kink}}(t) = \frac{\bar{N}_{\text{kink}}(t)}{H^3 V} \approx \frac{2qPv_{\text{rms}}\gamma^4\epsilon}{3} \left(\frac{S_{\text{max}}}{S_{\text{min}}} \right)^{1/\epsilon} \quad (\text{定数})$$

現象論的
パラメータ

ネットワークとkink数の発展

以上より

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}}{3\tilde{c}P}}, \quad v_{\text{rms}}^2 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\tilde{c}P}{3\sqrt{2}}}$$

$$N_{\text{kink}} \approx \frac{2qPv_{\text{rms}}\gamma^4\epsilon}{3} \left(\frac{s_{\text{max}}}{s_{\text{min}}} \right)^{1/\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{2(1 - 2v_{\text{rms}}^2)}{3} \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi\tilde{c}P}{3\sqrt{2}}}$$

$c, q \rightarrow$ シミュレーションからだいたいわかる

$s_{\text{max}}/s_{\text{min}} \rightarrow$ 現象論的パラメータ

あとで $P = 1$ のときの CMB 1 点関数のシミュレーションと合わせるときに決める。そして P 依存性を予言。

1点関数の計算①

segmentのCMB光子に対するoptical depthは

$$\begin{aligned}\tau_{\text{seg}} &= \int_0^{z_{\text{rec}}} n_{\text{seg}} \sigma_{\text{seg}} \frac{d\lambda}{dz} dz = \int_0^{z_{\text{rec}}} N_{\text{seg}} H^3 L^2 \frac{dz}{H(1+z)} \\ &= \gamma \log(1+z_{\text{rec}}) \approx \frac{16}{\sqrt{P}}\end{aligned}$$

となって多数回散乱する。毎回温度が Δ_{seg} だけ上がるか下がるかなので、温度ゆらぎはrandom walkとなる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \Delta_{\text{seg}} \sqrt{\tau_{\text{seg}}} \approx 2\pi\alpha_{\text{seg}} \sqrt{\log(1+z_{\text{rec}})} \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{3\tilde{c}P} \right)^{1/4} G\mu \\ &\approx 14P^{-1/4} G\mu\end{aligned}$$

ここで $\langle \alpha_{\text{seg}} \rangle = 1/2$ とした。

1点関数の計算②

kinkはimpact parameter δ によって温度が変わる。

$$\Delta_{\text{kink}} = -4G\mu\alpha_{\text{kink}} \log\left(\frac{\delta}{L_{\text{kink}}}\right)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{kink}}}{d\Delta} = \frac{L_{\text{kink}}^2}{\Delta_0} e^{-|\Delta|/\Delta_0}, \quad \Delta_0 \equiv 2\alpha_{\text{kink}}G\mu$$

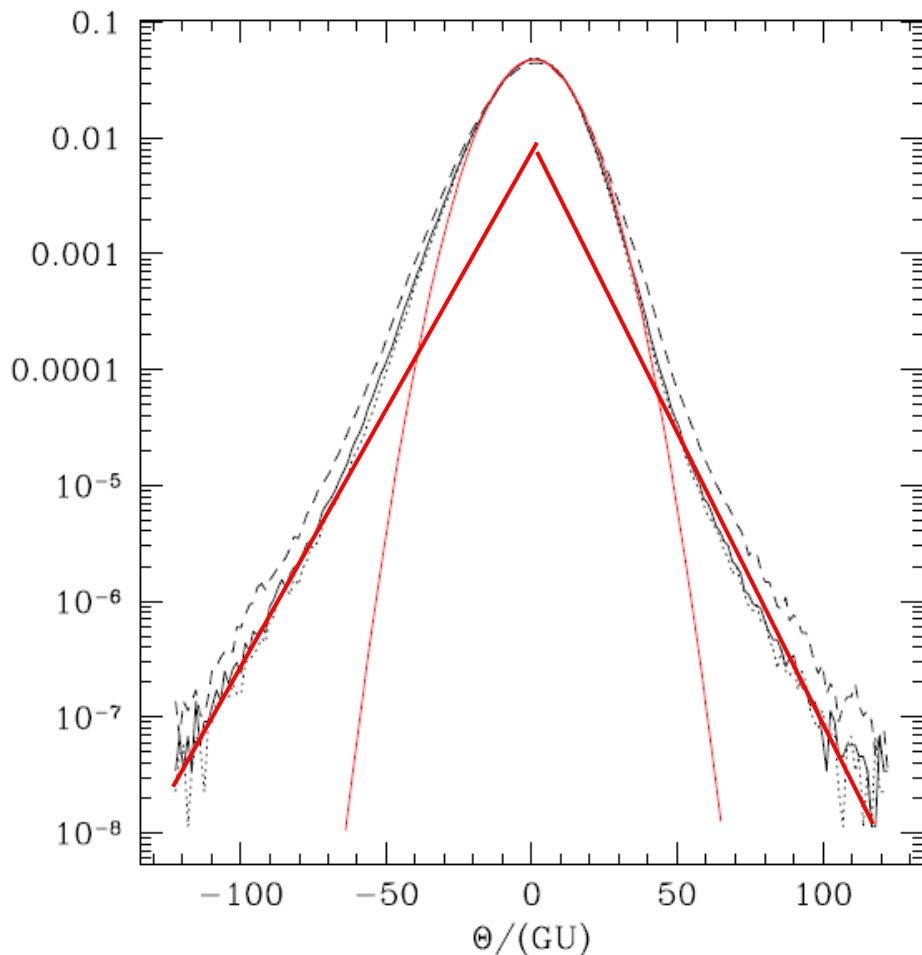
$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{kink}}}{d\Delta} &= \int_0^{z_{\text{rec}}} N_{\text{kink}} H^3 \frac{d\sigma_{\text{kink}}}{d\Delta} \frac{dz}{H(1+z)} \\ &= \frac{\gamma^2}{K\Delta_0} e^{-|\Delta|/\Delta_0} \log(1+z_{\text{rec}}) \end{aligned}$$

以上のように次のような1点関数を得た（注意）。

$$\frac{dP_{\text{tot}}}{d\Delta} = \frac{dP_{\text{G}}}{d\Delta} + \frac{dP_{\text{NG}}}{d\Delta}$$

$$\frac{dP_{\text{G}}}{d\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\Delta^2/2\sigma^2}, \quad \frac{dP_{\text{NG}}}{d\Delta} = A e^{-|\Delta|/\Delta_0}$$

シミュレーションとの比較 (P = 1)



$$P_G(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P_{NG}(\Delta) = Ae^{-\Delta/\Delta_0}$$

$$\sigma \approx 14G\mu$$

$$A \approx 10\alpha_{\text{kink}}^{-1} \left(\frac{s_{\text{max}}}{s_{\text{min}}}\right)^{-5.1} (G\mu)^{-1}$$

$$\Delta_0 = 2\alpha_{\text{kink}}G\mu$$

$$\sigma_{\text{sim}} \approx 12G\mu$$

$$A_{\text{sim}} \approx 0.03(G\mu)^{-1}$$

$$\Delta_{0,\text{sim}} \approx 9G\mu$$

Gaussian部分はよく合う。
nonGaussianを合わせるのに
 $s_{\text{max}}/s_{\text{min}}$, α_{kink} を調整。

angular resolution

kinkによる温度ゆらぎはkinkに近づくほど大きい。しかし角度分解能が悪いとkinkが分解できなくなる。角度分解能 θ でkinkに最も近づくのは

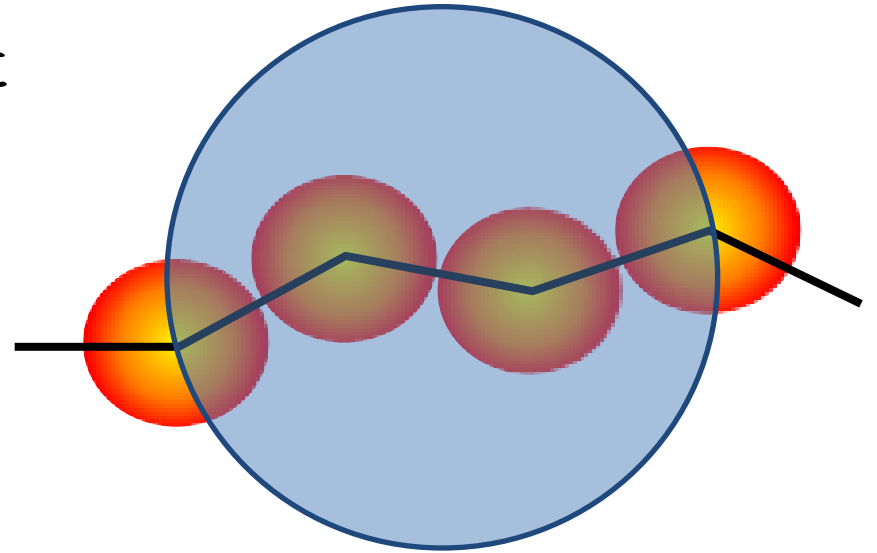
$$\delta_{\min}(z, \theta) = \theta d_A(z)$$

するとある z のkinkによる最大の温度ゆらぎは

$$\begin{aligned}\Delta_{\max}(z, \theta) &= 2\Delta_0 \log \left(\frac{L_{\text{kink}}(z)}{\delta_{\min}(z)} \right) \\ &= -2\Delta_0 \log [2\theta K (\sqrt{1+z} - 1)]\end{aligned}$$

ある温度ゆらぎに寄与する最大の z は

$$z_{\max}(\Delta, \theta) = \min \left[\left(1 + \frac{e^{-|\Delta|/2\Delta_0}}{2\theta K} \right)^2 - 1, z_{\text{rec}} \right]$$

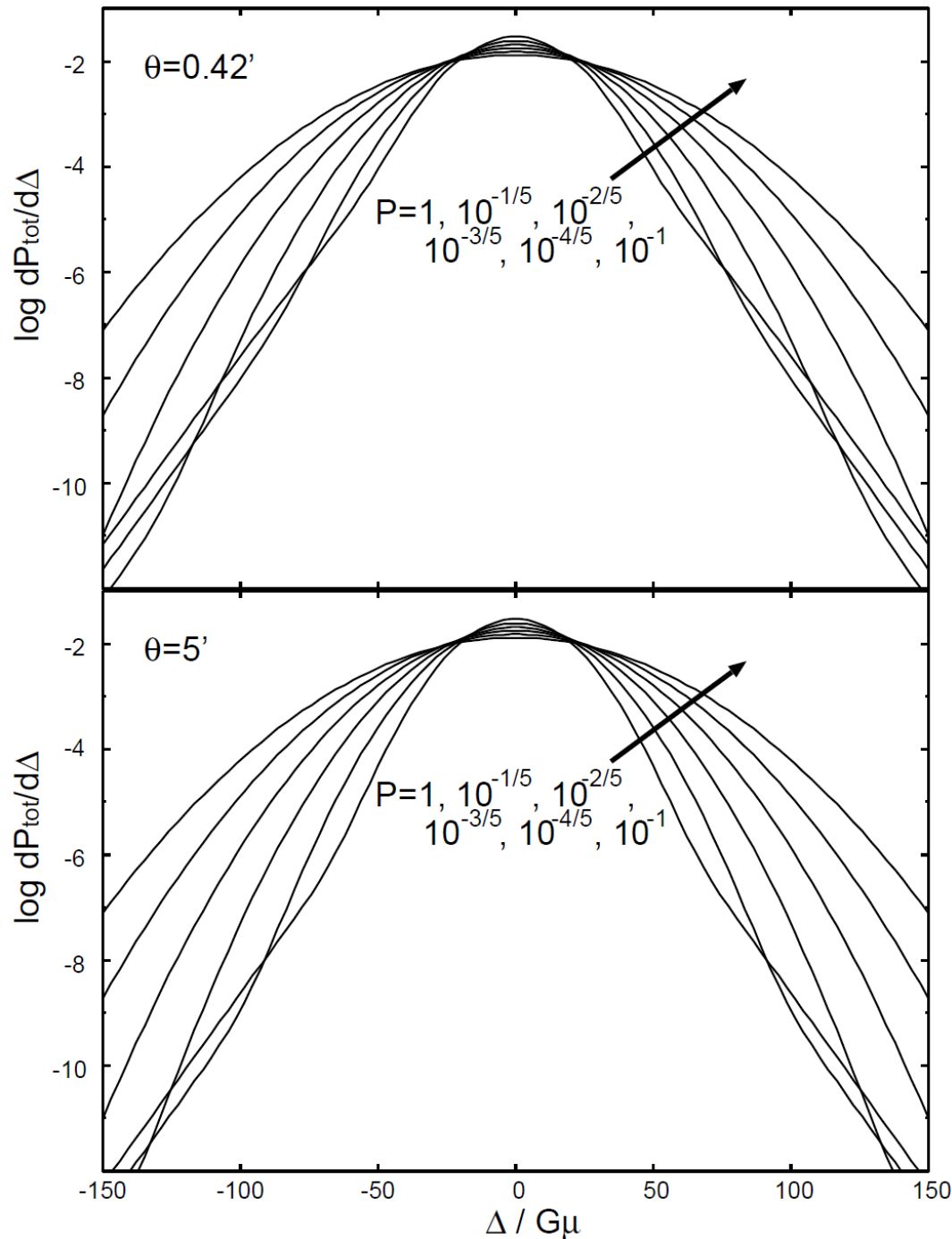


積分区間を
変更する。

P依存性の予言

結果

- Pが小さいとsegmentの数が増えてGaussian部分が卓越する
- 角度分解能が悪いとkinkが分解できずnon-Gaussian部分は抑制される
- Planck程度の分解能ではnon-Gaussian部分の観測は難しい
- arcminuteレベルの観測でPが大きければ観測できるかも



まとめ

簡単なモデル化でCMBの1点関数を計算

- ・ ネットワークをvelocity-one scale modelで解析
- ・ kink数をカウント
- ・ Gaussian: segmentによるランダムウォーク
- ・ non-Gaussian: kinkに接近したとき

結果

- ・ $P = 1$ でGaussian部分はパラメータなしでシミュレーションとよく合う
- ・ nonGaussian部分でパラメータを調整
- ・ $P < 1$ でのふるまいを予言
→ P が大きいほどnon-Gaussianityが大きい

今後

- ・ kinkの分布関数 (重力波にも応用)
- ・ より観測的に重要な2点関数・多点関数を計算する