モンジュ・アンペール固有関数の逆反復法による近似について *

北川　潤 †

Michigan State University

1　導入

有界凸領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を定めた時、**モンジュ・アンペール固有値問題**とは以下を満たすような（恒等的に 0 でない）凸関数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ と $\lambda > 0$ を求める問題である：

$$\begin{cases} \det D^2 u(x) = \lambda |u(x)|^n, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

この問題はガウス曲率のべき乗での曲面の発展などに関連性がある．本講演では (1.1) を満たす**固有関数** u を逆反復法を用いて近似する方法について述べる．

Lions [3] によって Ω が一様凸で滑らかな領域の場合、(1.1) の解が存在するような $\lambda_{\mathrm{MA}} := \lambda > 0$ が唯一存在し、固有関数は（正の定数倍を除き）一意的に定まり、滑らかであることが知られている．更に Tso [4] は

$$\mathcal{K}^\infty := \{u \in C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega}) \mid u \not\equiv 0 \text{ は凸関数、且つ} \partial\Omega \text{上で } u \equiv 0\},$$
$$R(u) := \frac{-\int_\Omega u(x) \det D^2 u(x) dx}{\|u\|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega)}},$$

と置き、

$$\lambda_{\mathrm{MA}} = \inf_{u \in \mathcal{K}^\infty} R(u)$$

によって固有値が求められることを示した．この R はいわゆる Rayleigh 商の非線形版とも考えられる．ちなみに Ω が凸であるが一様凸でない、または滑らかでない場合にも上記の Lions、Tso の結果が成り立つことは Le [2] によって示されている．

2　結果

上記の R を用いて固有関数の近似に以下のような漸化式を考えることができる：

$$\det D^2 u_{k+1} = R(u_k)|u_k|^n \quad \text{on } \Omega, \tag{2.1}$$
$$u_{k+1}(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega,$$

*本講演は Farhan Abedin 氏（Lafayette College）との共同研究に基づく．

†kitagawa@math.msu.edu

ここで上記の方程式は Aleksandrov 弱解の意味で解釈する．本研究の主結果は以下の通りである：

Theorem 2.1 ([1]). Ω が有界凸領域、且つ凸関数 $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ が以下を満たすとする：

1. $\partial\Omega$ 上で $u_0 \leq 0$
2. $R(u_0) < \infty$
3. Aleksandrov の意味で Ω 上で $\det D^2 u_0 \geq \mathcal{L}^n$（但し $\mathcal{L}^n$ は n 次元ルベーグ測度）.

この時 (2.1) で定義された列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ は (1.1) を満たす固有関数に Ω 上で一様収束し、$\lim_{k\to\infty} R(u_k) = \lambda_{\mathrm{MA}}$ である．

ここで一つ注目すべき点は、u_0 自体は Dirichlet 境界条件を満たさなくてもよいため適当な $r > 0$ をとることで $u_0(x) = |x|^2/2 - r$ とすることが可能である．

定理の証明には $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ のコンパクト性、部分列が全て同じ固有関数に収束すること、且つ 0 関数に収束しないことの証明が必要となる．いずれの証明で以下の単調性公式が重要な役割を持つ：

Lemma 2.2.

$$R(u_{k+1})\|u_{k+1}\|^n_{L^{n+1}(\Omega)} \leq R(u_k)\|u_k\|^n_{L^{n+1}(\Omega)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

参考文献

[1] Farhan Abedin and Jun Kitagawa. Inverse iteration for the Monge–Ampère eigenvalue problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(11):4875–4886, 2020.

[2] Nam Q. Le. The eigenvalue problem for the Monge-Ampère operator on general bounded convex domains. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 18(4):1519–1559, 2018.

[3] P.-L. Lions. Two remarks on Monge-Ampère equations. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 142:263–275 (1986), 1985.

[4] Kaising Tso. On a real Monge-Ampère functional. *Invent. Math.*, 101(2):425–448, 1990.