

一様局所可積分空間における熱方程式の解の最大正則性と Keller–Segel 系の特異極限問題への応用

勝呂 剛志 (京都大学 数理解析研究所)

本稿では、以下の Keller–Segel 系の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau + \nabla \cdot (u_\tau \nabla \psi_\tau) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{1}{\tau} \partial_t \psi_\tau - \Delta \psi_\tau + \lambda \psi_\tau = u_\tau, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u_\tau(0, x) = u_0(x), \psi_\tau(0, x) = \psi_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (\text{KS})$$

ここで、 $n \geq 3$, $\tau, \lambda > 0$ とする。パラメータ τ は緩和時間パラメータと呼ばれ、形式的に極限 $\tau \rightarrow \infty$ を考えると、移流拡散方程式の初期値問題が導かれる：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi + \lambda \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{DD})$$

この極限操作は特異極限問題と呼ばれ、Biler–Brandolese [1], Raczynski [6] により、 $n = 2$ の場合で、十分小さい初期値 u_0 と $\psi_0 \equiv 0$ の場合に対して示されている。その後、高次元において Lemarié-Rieusset [3] が Morrey 空間へ拡張した。初期値の小ささを外した場合には、Kurokiba–Ogawa [2] により、Lebesgue 空間において示された。これは、初期値問題 (KS), (DD) の初期値に対して、非負値性と可積分性を課すことで、解の L^1 -ノルムを質量とみなした質量保存則が成り立つためであり、解の挙動を研究する上で重要な性質である。近年では、函数に対して空間遠方における減衰を課さない一様局所可積分空間といった質量保存則が成り立たない函数空間の枠組みにおける解の挙動が研究されている。

本稿の目標は、一様局所可積分空間において Keller–Segel 系 (KS) の特異極限問題を解くことである。移流拡散方程式の初期値問題 (DD) の一様局所可積分空間における適切性が Cygan–Karch–Krawczyk–Wakui, Suguro (2021) により独立に示された。ここでは、より拡張された局所 Morrey 空間 $M_q^p(\mathbb{R}^n)$ を考える： $1 \leq q \leq p < \infty$ に対して、

$$M_q^p(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n); \|f\|_{M_q^p} \equiv \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ 0 < R \leq 1}} |B_R|^{-\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B_R(x)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\}.$$

ノルムの定義から、 $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq M_q^p(\mathbb{R}^n)$ であり、定数函数や周期函数が $M_q^p(\mathbb{R}^n)$ に属す。特に、 $q < p$ ならば、 $|x|^{-n/p} \in M_q^p(\mathbb{R}^n)$ である。また、 $s > 0$ に対して、 $M_q^{s,p} \equiv (1 - \Delta)^{-s/2} M_q^p$ と定め、初期値への収束性を考えるために、 $M_q^p(\mathbb{R}^n) \equiv \overline{BUC(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{M_q^p}}$ を導入する。

初期値問題 (KS) がある種のスケール不変性を擁することから、次で定まる許容指数を可積分指数に持つスケール臨界空間において特異極限問題を考察する： $n/2 < p < \theta$,

本研究は東北大学の小川卓克教授との共同研究 [5] に基づく。本研究は科研費 (課題番号: 19J20763, 22K20336) の助成を受けたものである。

$2 < \theta < \infty$, $n < r < \sigma$, $\theta < \sigma < \infty$, $1 < q_0 \leq n/2$, $q_0 \leq q_1 \leq p$, $1 < \alpha_0 \leq n$, $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq r$ は以下を満たす:

$$\frac{2}{\theta} + \frac{n}{p} = 2, \quad \frac{2}{\sigma} + \frac{n}{r} = 1, \quad \frac{2q_0}{n} = \frac{q_1}{p} = \frac{\alpha_0}{n} = \frac{\alpha_1}{r}, \quad \frac{1}{q_0} + \frac{1}{\alpha_1} \leq 1. \quad (\text{A})$$

初期値問題 (KS) の適切性や特異極限問題を考える上で、後に述べる熱方程式の初期値問題の解の最大正則性を用いる. 局所 Morrey 空間は回帰的でないため、最大正則性理論の一般論を適用できない. そこで、局所 Morrey 空間の実補間空間を導入することにより、熱方程式の解の最大正則性を導出する. $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を Littlewood–Paley 分解とし、 $\widehat{\psi} \equiv 1 - \sum_{j \geq 1} \widehat{\phi}_j$ とおく. $1 \leq q \leq p < \infty$, $1 \leq \sigma \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ に対して、Besov–Morrey 空間 $N_{p,q,\sigma}^s$ のノルムを、

$$\|f\|_{N_{p,q,\sigma}^s} \equiv \|\psi * f\|_{M_q^p} + \left\| \left\{ 2^{js} \|\phi_j * f\|_{M_q^p} \right\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{l^\sigma(\mathbb{N})}$$

と定める.

以上の設定の下で、初期値問題 (KS) の Morrey 空間における適切性を述べる:

定理 1 (時間局所適切性, [5]). $n \geq 3$ かつ $\tau, \lambda > 0$ とする. $(p, \theta, r, \sigma, q_0, q_1, \alpha_0, \alpha_1)$ は許容指数条件 (A) をみたすとし、 $(u_0, \psi_0) \in (\mathcal{M}_{q_0}^{n/2} \cap N_{p,q_1,\theta}^{-2/\theta}) \times (\mathcal{M}_{\alpha_0}^{1,n} \cap N_{r,\alpha_1,\sigma}^{1-2/\sigma})$ であるとする. このとき、ある τ に依存しない $T > 0$ と初期値問題 (KS) のある一意な解

$$(u_\tau, \psi_\tau) \in (C([0, T]; \mathcal{M}_{q_0}^{n/2}) \cap L^\theta(0, T; \mathcal{M}_{q_1}^p)) \times (C([0, T]; \mathcal{M}_{\alpha_0}^{1,n}) \cap L^\sigma(0, T; \mathcal{M}_{\alpha_1}^{1,r}))$$

が存在する.

さらに、Morrey 空間の位相で特異極限の収束を示すことができた:

定理 2 (特異極限問題, [5]). 定理 1 の仮定の下で、 $I = (0, T)$ とすると、初期値問題 (DD) のある一意な解 (u, ψ) が存在し、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\|u_\tau - u\|_{L^\theta(I; M_{q_1}^p)} + \|\nabla \psi_\tau - \nabla \psi\|_{L^\theta(I; M_{\alpha_1}^r)} \right) = 0$$

が成り立つ. さらに、任意の $0 < t_0 < T$ に対して、 $I_{t_0} \equiv (t_0, T)$ とおくと、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\|u_\tau - u\|_{L^\infty(I_{t_0}; M_{q_0}^{n/2})} + \|\nabla \psi_\tau(t) - \nabla \psi(t)\|_{L^\infty(I_{t_0}; M_{\alpha_0}^n)} \right) = 0.$$

が成り立つ. 一方で、十分小さい $t_1 > 0$ に対して、 $\eta_\tau(t) \equiv \chi_{[0, \tau^{-1}t_1]}(t)(\psi_0 - (\lambda - \Delta)^{-1}u_0)$ とおくと、以下が成り立つ:

$$\sup_{t \in [0, \tau^{-1}t_1]} \|u_\tau(t) - u(t)\|_{M_{q_0}^{n/2}} + \sup_{t \in [0, \tau^{-1}t_1]} \|\nabla \psi_\tau(t) - \nabla \psi(t) - \nabla \eta_\tau(t)\|_{M_{\alpha_0}^n} \rightarrow 0 \quad \text{as } \tau \rightarrow \infty.$$

定理 1 と定理 2 の証明において、Besov–Morrey 空間における熱方程式の初期値問題の解の最大正則性が鍵となる. 熱方程式の解の最大正則性は UMD (unconditional martingale difference) と呼ばれる性質を持つ函数空間において整備されている. 函数空間が UMD であるならば、回帰的であるという事実が知られているため、局所 Morrey 空間は回帰的ではないことから、熱方程式の解の最大正則性の一般論に乗らない. ここでは、局所 Morrey 空間の実補間空間を考えることで熱方程式の解の時空間評価を示す (斉次 Morrey 空間の実補間空間においては Nogayama–Sawano [4] により示されている):

定理 3 ([5]). $1 \leq q \leq p < \infty$, $1 < \nu < \rho < \infty$, $\mu > 0$ とし, $0 < T < \infty$ に対して, $I = [0, T)$ とする. 任意の $u_0 \in N_{p,q,\rho}^{2(1-1/\rho)}(\mathbb{R}^n)$ と $f \in L^\nu(I; N_{p,q,\infty}^{1/\nu-1/\rho}(\mathbb{R}^n))$ に対して, u は以下の熱方程式の初期値問題の解とする:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta u = f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

このとき, 以下が成り立つ:

$$\|\partial_t u\|_{L^\rho(I; N_{p,q,1}^0)} + \mu \|\Delta u\|_{L^\rho(I; N_{p,q,1}^0)} \leq C \left(\|u_0\|_{N_{p,q,\rho}^{2(1-1/\rho)}} + \|f\|_{L^\nu(I; N_{p,q,\infty}^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\rho}})} \right).$$

注意. 熱方程式の解の最大正則性とは, 熱方程式の初期値問題を考えた際, 問題の解 u が与えられた初期値 u_0 と外力 f と同等の最大な正則性を持つことを意味する. ここでは, 問題の解 u が外力 f の正則性と同等ではないが, 最大のものと同様のスケール不変性を擁する時空間の可積分性をもつことが得られた.

参考文献

- [1] Biler, P. and Brandolese, L., *Studia Math.* **193** (2009), 241–261.
- [2] Kurokiba, M. and Ogawa, T., *J. Evol. Equ.* **20** (2020), 421–457.
- [3] Lemarié-Rieusset, P. G., *Adv. Differential Equations* **18** (2013), 1189–1208.
- [4] Nogayama, T. and Sawano, Y., *J. Math. Anal. Appl.* **516** (2022).
- [5] Ogawa, T. and Suguro, T., *Maximal regularity of the heat evolution equation on spatial local spaces and application to a singular limit problem of the Keller–Segel system*, *Math. Ann.* (2022).
- [6] Raczyński, A., *Asymptot. Anal.* **61** (2009), 35–59.