Moser–Trudinger 不等式のべき乗近似

橋詰　雅斗　(広島大・先進理工)*

空間次元を $N \geq 2$, $B \subset \mathbb{R}^N$ を単位球, $1 < p < N$ とし, $W_0^{1,p}(B)$ を Sobolev 空間とする．Sobolev 不等式

$$\|u\|_{L^{\frac{pN}{N-p}}(B)} \leq S_p \|\nabla u\|_{L^p(B)}, \quad u \in W_0^{1,p}(B) \tag{1}$$

により，連続埋め込み $W_0^{1,p}(B) \hookrightarrow L^{pN/(N-p)}(B)$ が成立する．一方，$p = N$ の場合，$W_0^{1,N}(B) \not\subset L^\infty(B)$ となるが，N. S. Trudinger[5], J. Moser[4] により次の不等式が得られている:

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,N}(B) \\ \|\nabla u\|_{L^N(B)} \leq 1}} \int_B e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx \begin{cases} \leq C|B|, & \alpha \leq \alpha_N, \\ = +\infty, & \alpha > \alpha_N. \end{cases} \tag{2}$$

ここで $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{1/(N-1)}$ であり，ω_{N-1} は単位球表面積を表す．Sobolev 不等式 (1) および Moser–Trudinger 不等式 (2) はそれぞれ Orlicz 空間への埋め込みの意味で最良であるため，Moser–Trudinger 不等式 (2) はしばしば臨界 Sobolev 不等式と呼ばれる．しかしながら，(1) に直接的な極限操作 $p \to N$ を施しても臨界 Sobolev 不等式 (2) は得られない．この不連続性に着目し，本講演では $p \to N$ とした際に (2) の汎関数に収束し，さらに集中レベルも連続的に繋がる $W_0^{1,p}$ 関数不等式を構築する．

まず，Moser–Trudinger 不等式の集中レベルについて紹介する．$B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$ を原点中心半径 ε の球,

$$\mathscr{B}_N := \left\{ u \in W_{0,rad}^{1,N}(B) \;\middle|\; \|\nabla u\|_{L^N(B)} \leq 1 \right\},$$

$$X_N := \left\{ \{u_n\} \subset \mathscr{B}_N \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^N(B_\varepsilon)} = 1 \ (\forall \varepsilon > 0) \right\}$$

とする．このとき，次が成立する．

$$\sup_{\{u_n\} \in X_N} \left(\limsup_{n\to\infty} \int_B e^{\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} dx \right) = |B|(1 + e^{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}}). \tag{3}$$

この左辺の値を Moser–Trudinger 不等式の集中レベルと呼ぶ．右辺の具体的な値は，以下の通り Moser–Trudinger 不等式 (2) の変分問題を考える際に重要な役割を担う:

前提として，Moser–Trudinger 汎関数は $\alpha = \alpha_N$ において非コンパクト性（$W_0^{1,p}(B)$ の弱位相に関する不連続性）を持つ．つまり，ある関数列 $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(B)$ で

$$\|\nabla u_n\|_{L^N(B)} \leq 1, \quad u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{weakly in } W_0^{1,N}(B)$$

を満たし，

$$\lim_{n\to\infty} \int_B e^{\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} dx \neq \int_B e^{\alpha_N |u_0|^{\frac{N}{N-1}}} dx$$

となるものが存在する（Fatou の補題より，“>” となることも分かる）．この性質により，(2) の達成可能性は非自明なものとなっている．実際，(2) の最大化問題に関して，最

本講演は猪奥倫左氏（東北大学）との共同研究に基づく．
*e-mail: mhashizume@hiroshima-u.ac.jp

大化列の部分列が上記の性質を満たすか否かで最大化関数の存在・非存在が変わる. しかし, このような非コンパクト性がありながらも, Carleson–Chang[1] は, 以下の二つを示すことにより (2) を達成する最大化関数の存在を示した（球対称再配列の議論により, $W^{1,N}_{0,rad}(B)$ の中で考察すれば十分ということに注意する）.

(I) (2) の最大化関数が存在しないならば, 全ての最大化列は X_N の元. さらに,

$$\sup_{\substack{u\in W^{1,N}_{0,rad}(B)\\ \|\nabla u\|_{L^N(B)}\le 1}} \int_B e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}}\,dx \le |B|(1+e^{\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}}).$$

(II) ある関数 $w \in W^{1,N}_{0,rad}(B)$ が存在して,

$$\int_B e^{\alpha_N |w|^{\frac{N}{N-1}}}\,dx > |B|(1+e^{\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}}).$$

その後, de Figueiredo–do Ó–Ruf[2] によって, 右辺の値は (3) の集中レベルそのものであることが明らかにされた.

次に, 本講演で考察する関数を定義する.

定義 1 関数 $F_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ を次で定義する.

$$F_p(s) := \left[1+\frac{N-p}{N(p-1)}\alpha_p |s|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{N(p-1)}{N-p}}, \quad \alpha_p := \left(\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} |B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{N}}\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

ただし, $|B|$ は単位球 $B \subset \mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度を表す.

関数 F_p に関して, Sobolev 不等式 (1) と直接計算により次が成り立つ.

命題 1 (I) ある定数 $C_p > 0$ が存在して，任意の $u \in C_0^\infty(B)$ に対して

$$\int_B F_p\left(u/\|\nabla u\|_{L^p(B)}\right) dx \le C_p.$$

(II) 任意の $u \in C_0^\infty(B)$ に対して

$$\lim_{p\to N}\int_B F_p\left(u/\|\nabla u\|_{L^p(B)}\right) dx = \int_B e^{\alpha_N\left(|u|/\|\nabla u\|_{L^N(B)}\right)^{\frac{N}{N-1}}}\,dx.$$

命題 1 により, 関数 F_p は Sobolev 型不等式の性質を満たし, Moser–Trudinger 型汎関数に関する一つの近似となっている.

定義 2 集合 $\mathscr{B}_p \subset W_0^{1,p}(B)$ および集中列の集合 X_p を

$$\mathscr{B}_p := \left\{u \in W^{1,p}_{0,rad}(B) \;\middle|\; \|\nabla u\|_{L^p(B)} \le 1\right\},$$

$$X_p := \left\{\{u_n\} \subset \mathscr{B}_p \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^p(B_\varepsilon)} = 1 \ (\forall \varepsilon > 0)\right\}.$$

で定義する.

主結果は次の集中レベルの連続性である.

定理 2 次が成立する.

$$\sup_{\{u_n\}\in X_p}\left(\limsup_{n\to\infty}\int_B F_p(u_n)dx\right)\to |B|(1+e^{\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}})\quad (p\to N).$$

最後に, 関数 F_p が現れる不等式を紹介する. $u\in W^{1,N}_{0,rad}(B)$ に対して，Alvino 不等式または radial lemma と呼ばれる次の不等式

$$|u(x)|\le \alpha_N^{-\frac{N-1}{N}}\left(N\log\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{N-1}{N}}\|\nabla u\|_{L^N(B)}$$

が知られている．これは

$$e^{\alpha_N\left(|u(x)|/\|\nabla u\|_{L^N(B)}\right)^{\frac{N}{N-1}}}\le\frac{1}{|x|^N}$$

と同値である．ここで左辺に Moser–Trudinger 不等式の関数が現れる．同様に, $u\in W^{1,p}_{0,rad}(B)$ に対して radial lemma を考えると

$$F_p\left(u(x)/\|\nabla u\|_{L^p(B)}\right)\le\frac{1}{|x|^N}$$

となり, 左辺に F_p が現れる.

講演では定理 2 の証明の概略と，$\int_B F_p(u)dx$ が持つ幾つかの性質についても述べる.

参考文献

[1] L. Carleson, S.-Y. A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), no. 2, 113–127.

[2] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó, B. Ruf, *On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), no. 2, 135–152.

[3] M. Hashizume, N. Ioku, *$W^{1,p}$ approximation of the Moser–Trudinger inequality* , arXiv:2212.02086.

[4] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077–1092.

[5] N. S. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** 1967 473–483.